休姆斯題解叢書

1986

向量分析

原理及題解

駱傳孝 譯

含380個問題及解答

曉園出版社
世界圖書出版公司

向量分析

原理及題解

駱傳孝 譯

曉園出版社
世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

向量分析原理及题解

M. R. 施皮格尔　著

骆传孝　译

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司 重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1993 年 11 月第　一　版　　开本：787×1245 1/20

1993 年 11 月第一次印刷　　印张：14

印数：0001－900　　字数：21万字

ISBN：7－5062－1640－x/O・81

定价：10.90元 (W_B9304/10)

序　文

向量分析，這個十九世紀中葉所發展出來的學科，如今已成為工程師、物理學家、數學家及其他科學家們所需具備的基本數學知識。這個發展是必然的，因為向量分析不但對物理或幾何問題產生的數學公式提供了一套完整簡明的符號；同時它也對物理及幾何觀念架構的形成有很大的助益。總之，向量分析可以說是物理科學最有效的語言及思考工具。

本書的設計，使它可以作為向量分析正式課程的教科書，或作為現行教本的輔助教材。在物理學、力學、電磁理論、氣體動力學或許多其他會用到向量方法的課程中，本書也是一本有價值的參考書籍。

在各章的開始，先明確的敘述相關的定義、原理及定理的說明。然後跟著大量按內容分類的解說題及補充題。解說題用來說明及擴展定理的應用，使讀者能循序漸進的瞭解教材的內容，達到有效的學習。解說題也包含了大量定理的證明及公式的推導。附有答案的補充題，使讀者能充分的複習有關的教材。

本書包含了向量代數、向量微積分、司托克士定理、散度定理及其他的積分定理，並附有在各不同領域中的許多應用。此處，本書還特別討論了曲線座標及張量分析，這些課程在學習高等工程、物理及數學時都非常有用。

本書也加入了一些較初級課程更深入的教材使得教材內容更具備彈性，更有參考價值，也更能引發讀者對向量分析的興趣。

駱　傳　章

目　錄

第一章　向量和純量　1

1. 向量　1　/ 2. 純量　1　/ 3. 向量代數　1　/ 4. 向量代數定律　2　/ 5. 單位向量　3　/ 6. 正交單位向量 i , j , k　3　/ 7. 向量的分量　4　/ 8. 純量場　4　/ 9. 向量場　4　/ 習題與解答　5　/ 補充題　18

第二章　點積與叉積　23

1. 點積或純量積　23　/ 2. 叉積或向量積　23　/ 3. 三重積　24　/ 4. 向量集的倒數集　25　/ 習題與解答　25　/ 補充題　42

第三章　向量微分　47

1. 向量的常導數　47　/ 2. 空間曲線　47　/ 3. 連續性與可微性　48　/ 4. 微分公式　49　/ 5. 向量的偏微分　49　/ 6. 向量的微分　50　/ 7. 微分幾何　50　/ 8. 力學　51　/ 習題與解答　52　/ 補充題　71

第四章　梯度，散度與旋度　77

1. 向量微分運算子，DEL　77　/ 2. 梯度　77　/ 3. 散度　77　/ 4. 旋度　78　/ 5. 包含 ∇ 的一些公式　78　/ 6. 不變性　79　/ 習題與解答　80　/ 補充題　100

第五章　向量積分　107

1. 向量常積分　107　/ 2. 線積分　107　/ 3. 曲面積分　108　/ 4. 體積積分　109　/ 習題與解答　110　/ 補充題　133

第六章　散度定理，司托克士定理及相關的積分定理　139

1. 高斯散度定理　139　/ 2. 司托克士定理　139　/ 3. 平面中的革忍定理　139　/ 4. 相關的積分定理　140　/ 5. ∇形成的積分運算子　141　/ 習題與解答　141　/ 補充題　171

第七章　曲線座標　177

1. 座標變換　177　/ 2. 正交曲線座標　177　/ 3. 曲線座標系中的單位向量　178　/ 4. 弧長及體積元　179　/ 5. 梯度、散度及旋度　179　/ 6. 特殊正交座標系　180　/ 習題與解答　184　/ 補充題　206　/ 補充題解答　210

第八章　張量分析　215

1. 物理定律　215　/ 2. N維空間　215　/ 3. 座標變換　215　/ 4. 求和慣例　216　/ 5. 逆變與協變向量　216　/ 6. 逆變、協變及混合張量　217　/ 7. 克郎乃克　218　/ 8. 高於二秩的張量　218　/ 9. 純量或不變量　218　/ 10. 張量場　218　/ 11. 對稱及反對稱張量　218　/ 12. 張量的基本運算　219　/ 13. 矩陣　219　/ 14. 矩陣代數　220　/ 15. 線素及計量張量　221　/ 16. 共軛或倒數張量　221　/ 17. 相伴張量　221　/ 18. 向量的長度，向量間的夾角　222　/ 19. 自然分量　222　/ 20. 克雷斯托福記號　223　/ 21. 克雷斯托福記號的轉換定律　223　/ 22. 測地線　223　/ 23. 協變導數　224　/ 24. 排列符號與排列張量　224　/ 25. 梯度、散度及旋度的張量形　225　/ 26. 本性或絕對導數　225　/ 27. 相對與絕對張量　226　/ 習題與解答　226　/ 補充題　260　/ 補充題解答　267

索　引　273

第 一 章

向量和純量

1·1 向 量

向量(vector) 就是一種同時具有方向和大小的量，如位移、速度、力及加速度等都是向量。

用圖形來表示，向量可用一個箭頭 OP (圖1)來代表它的方向，而它的大小則以此箭的長度來表示。箭的尾端 O 點稱爲此向量的**原點**(origin)或**始點**(initial point)，而箭頭 P 則稱爲此向量的**終點**(terminal point 或 terminus)。

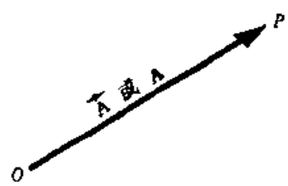


圖1

在分析中，向量可用一個字母上面冠以箭頭表示，如圖1中的 $\vec{A}$ 所示，而它的大小則用 $|\vec{A}|$ 或 A 表示。在印刷體中，常用粗體字 **A** 來代表向量 $\vec{A}$，而用 $|\mathbf{A}|$ 或 A 來代表向量的大小。在本書中我們將採用粗體字來代表向量。向量 OP 也可以表示成 $\overrightarrow{OP}$ 或 **OP**，此時我們用 $\overline{OP}$, $|\overrightarrow{OP}|$ 或 $|\mathbf{OP}|$ 來代表它的大小。

1·2 純 量

純量(scalar) 就是一種有大小但沒有方向的量，例如，質量、長度、時間、溫度及實數等。純量可用一般的字母來代表，而純量的運算與初等代數的運算法則相同。

1·3 向量代數

將數或純量之代數學中的四則運算，予以適當的定義，就可以擴充到**向量代數**((vector algebra)。下面就是一些基本的定義。

1. 兩個向量 **A** 和 **B** **相等**(equal)的條件爲：它們的大小和方向相同，而與它們始點的位置無關。因此在圖2中，**A**＝**B**。
2. 若一個向量與 **A** 的方向相反，且與 **A** 的大小相等，則此向量記作 $-\mathbf{A}$ (圖3)。
3. 向量 **A** 與 **B** 的**和**(sum)或**合量**(resultant)爲一向量 **C**，此向量係將 **B** 的始點與 **A** 的終點相重合，再將 **A** 的始點連至 **B** 的終點而形成(圖4)。此和記作 **A**＋

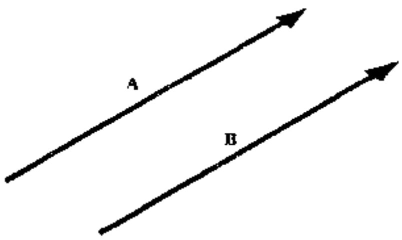


圖 2

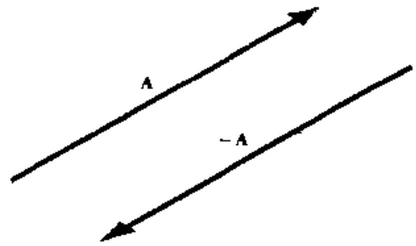


圖 3

B，即 **C** = **A** + **B** 。

此處對向量和的定義與向量加法中的**平行四邊形定律**（parallelogram law）等價。（參閱 1.3 題）

由此定義可立即推廣到多個向量的和。（參閱1.4題）

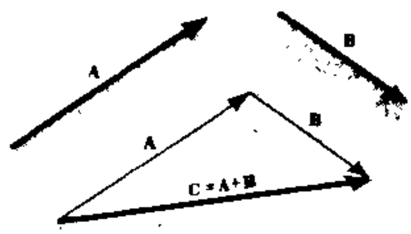


圖 4

4. 向量 **A** 與 **B** 的**差**（difference），記作 **A** − **B** ，就是一向量 **C** ，將其加上向量 **B** 就可得出向量 **A** 。 **A** − **B** 也可以定義成和 **A** + (−**B**) 。

   若 **A** = **B** ，則 **A** − **B** 定義爲**零向量**（null 或 zero vector），而用 0 或 **0** 來代表。它的大小爲 0 ，沒有特定的方向。一個非零向量稱爲**真向量**（proper vector）。除非特別說明，本書所有的向量都指的是眞向量。

5. 一個向量 **A** 與一純量 m 的**乘積**（product）爲一向量 m**A** ，它的大小是 **A** 之大小的 $|m|$ 倍，而方向則與 **A** 的方向相同或相反，視 m 的正負而定。若 $m = 0$ ，則 m**A** 爲零向量。

1-4 向量代數定律

若 **A**，**B**，**C** 均爲向量，而 m，n 爲純量，則

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$	加法交換律
2. $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$	加法結合律
3. $m\mathbf{A} = \mathbf{A}m$	乘法交換律
4. $m(n\mathbf{A}) = (mn)\mathbf{A}$	乘法結合律
5. $(m+n)\mathbf{A} = m\mathbf{A}+n\mathbf{A}$	分配律
6. $m(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = m\mathbf{A}+m\mathbf{B}$	分配律

注意在上面的定律中，只有提到向量與純量的乘積。在第 2 章中我們將定義向量與向量的乘積。

由上面的定律，我們可以將向量方程式當作一般的代數方程式來處理。例如，若 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$ ，則由移項可得 $\mathbf{A}=\mathbf{C}-\mathbf{B}$ 。

1.5 單位向量

所謂單位向量(unit vector)就是具有單位大小的向量，如果 **A** 是一個大小 $A\neq 0$ 的向量，則 $\mathbf{A}/A$ 爲一與 **A** 具有相同方向的單位向量。

任何一個向量 **A** 都可以用與它同方向的單位向量 **a** 乘上它的大小 A 來表示，即 $\mathbf{A}=A\mathbf{a}$ 。

1.6 正交單位向量 i , j , k

與三維直角座標系中正 x 軸、正 y 軸、正 z 軸同方向的一組單位向量非常重要，分別記作 **i** , **j** , **k** (圖5) 。

除非特別說明，我們都使用*右旋直角座標系*(right-handed rectangular coordinate systems)。這個名稱的由來是因爲如果我們由 Ox 向 Oy 按右旋螺絲的方向轉 90° 就會得到正 z 軸的方向，如圖5所示。

一般來說，共始點但不共面的三個向量 **A** , **B** , **C** ，如果由 **A** 向 **B** 以右旋的方式，旋轉不到 180° 就能到達 **C** 的方向，則稱此三向量形成一個*右旋系統*(right-handed system 或 dextral system)，如圖6所示。

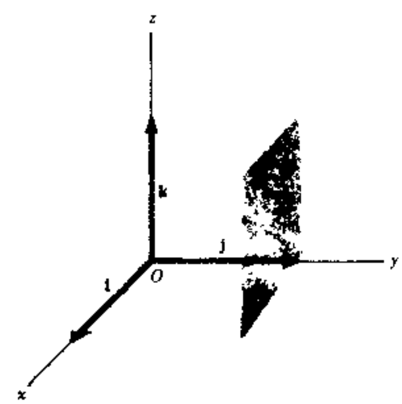


圖5

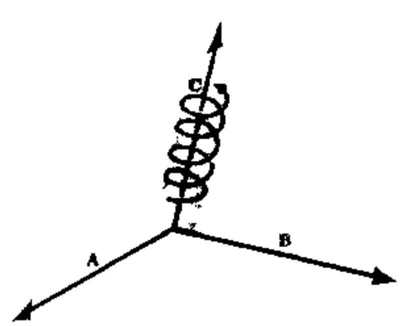


圖6

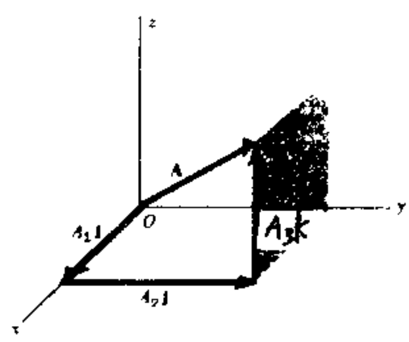


圖7

1·7 向量的分量

在三維空間中的任一向量 **A** 都可以將其用始點在原點 O 的直角座標系中的一個向量來表示（圖 7）。若 (A_1, A_2, A_3) 爲將 **A** 的始點置於 O 時其終點的直角座標，則向量 $A_1\mathbf{i}$，$A_2\mathbf{j}$，$A_3\mathbf{k}$ 稱爲 **A** 的**直角分向量**（rectangular component vectors）或簡稱爲 **A** 分別在 x，y 及 z 方向的**分向量**（component vectors）。A_1，A_2，A_3 稱爲 **A** 的**直角分量**（rectangular component）或 **A** 在 x，y 及 z 方向的**分量**（component）。

$A_1\mathbf{i}$，$A_2\mathbf{j}$ 及 $A_3\mathbf{k}$ 的和或合量即爲 **A**，所以我們可以寫作

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$$

A 的大小爲

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

特別地，由 O 至點 (x, y, z) 的**位置向量**（position vector）或**向徑**（radius vector）可以寫作

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

其大小爲

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1·8 純量場

如果在空間中某一區域 R 中的每一點 (x, y, z) 都會對應到一個數或純量 $\phi(x, y, z)$，則 ϕ 稱爲一個**位置純量函數**（scalar function of position）或**純量點函數**（scalar point function），並且我們說在 R 中定義了一個**純量場**（scalar field）ϕ。

例題 1.1

(a) 在某一定時間，地球表面或地球內部任一點的溫度定義了一個純量場。

(b) $\phi(x, y, z) = x^3 y - z^2$ 定義了一個純量場。

一個與時間無關的純量場，稱爲一**穩定**（stationary）或**穩態**（steady-state）純量場。

1·9 向量場

如果在空間中某一區域 R 中的每一點 (x, y, z) 都會對應到一個向量 $\mathbf{V}(x, y, z)$，則稱 **V** 爲一個**位置向量函數**（vector function of position）或**向量點函數**（vector point function），並且我們說在 R 中定義了一個**向量場**（vector field）**V**。

例題1.2

(a)　在某一定時間，在一流動流體中任一點 (x, y, z) 的速度定義了一個向量場。

(b)　$\mathbf{V}(x, y, z)=xy^2\mathbf{i}-2yz^3\mathbf{j}+x^2z\mathbf{k}$ 定義了一個向量場。

一個與時間無關的向量場，稱爲穩定或穩態向量場。

習題與解答

1.1　辨別下列何者爲純量，何者爲向量。

(a) 重量　(c) 比熱　(e) 密度　(g) 體積　(i) 速率

(b) 卡路里　(d) 動量　(f) 能量　(h) 距離　(j) 磁場強度

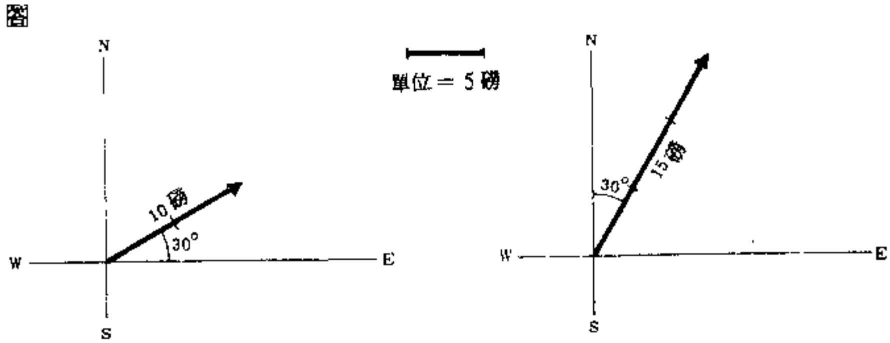
答　(a) 向量　(c) 純量　(e) 純量　(g) 純量　(i) 純量

(b) 純量　(d) 向量　(f) 純量　(h) 純量　(j) 向量

1.2　用圖形表示(a)一個向東偏北 30° 方向的10 磅力。

(b)一個向北偏東 30° 方向的15 磅力。

答



圖(a)　圖(b)

選擇所示的單位，所要求的向量如圖所示。

1.3　一汽車向北走了三哩，再向東北走了5哩。用圖形來表示這些位移，並用(a)圖形(b)分析法來求總位移。

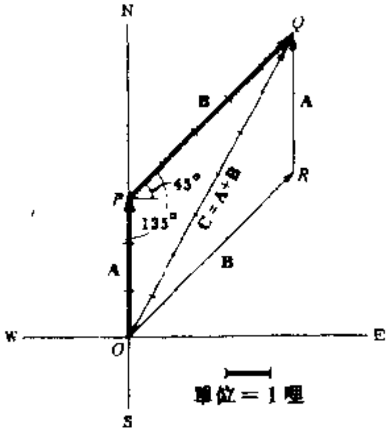
答　向量**OP**或**A**代表向北3哩的位移。

向量**PQ**或**B**代表向東北5哩的位移。

向量**OQ**或**C**代表總位移，或用**A**與**B**的和來代表，即 $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$。這就是向量加法的三角形定律。

合量**OQ**也可以利用以 $\mathbf{OP}=\mathbf{A}$ 及**OR**（等於向量**PQ**或**B**）爲邊所建立的平行四邊形 $OPQR$ 得到，這就是向量加法的平行四邊形定律。

(a)　圖形法　在向量**OQ**上用1哩的單位測量，得出其大小約爲7.4哩，再用量角器量出角 $EOQ=61.5°$。則向量**OQ**的大小爲7.4哩，方向爲東偏



北61.5°。

(b) 分析法 由三角形OPQ，將**A**，**B**，**C**的大小分別用A，B，C來代表，利用餘弦定律可得

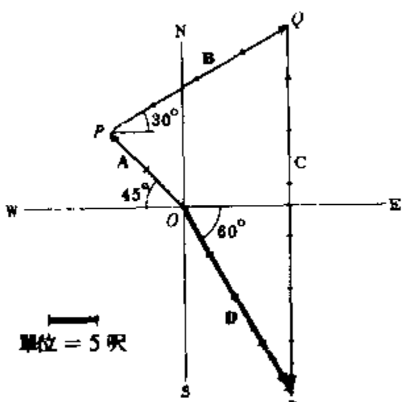
$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\angle OPQ = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\cos 135^\circ = 34 + 15\sqrt{2} = 55.21$$

因此C＝7.43（近似值）。

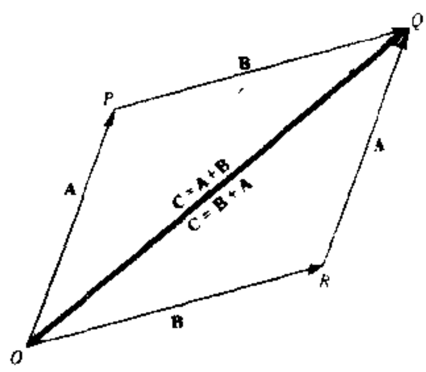
再由正弦定律 $\dfrac{A}{\sin\angle OQP} = \dfrac{C}{\sin\angle OPQ}$，得出

$$\sin\angle OQP = \frac{A\sin\angle OPQ}{C} = \frac{3(0.707)}{7.43} = 0.2855 \quad 且 \quad \angle OQP = 16^\circ 35'.$$

因此向量**OQ**的大小為7.43哩，方向為東偏北(45°＋16°35′)＝61°35′。



圖(a)



圖(b)

1.4　求下列位移的和：

A，10呎東北；**B**，20呎東偏北 30°；**C**，35呎正南，見前面圖(a)。

圖　將**B**的始點放在**A**的終點上。

將**C**的始點放在**B**的終點上。

總位移**D**即爲由**A**的始點指向**C**的終點，亦即**D**= **A**+ **B**+ **C**。

用圖示法測量得**D**的大小爲 4.1 單位= 20.5 呎，方向爲東偏南 60°。

三個以上向量相加的分析法，參閱 1.26 題。

1.5　證明向量的加法可交換，即 **A** + **B** = **B** + **A**。見前面圖(b)。

圖

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PQ} = \mathbf{OQ} \quad 或 \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C},$$

且

$$\mathbf{OR} + \mathbf{RQ} = \mathbf{OQ} \quad 或 \quad \mathbf{B} + \mathbf{A} = \mathbf{C}.$$

因此　**A** + **B** = **B** + **A**。

1.6　證明向量的加法可結合，即 **A** + (**B** + **C**) = (**A** + **B**) + **C**。

圖

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PQ} = \mathbf{OQ} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}),$$

且

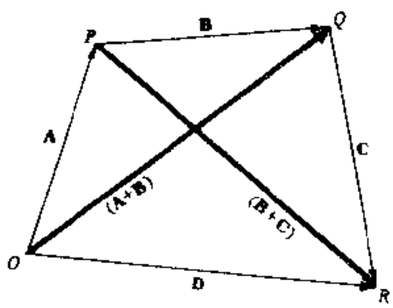
$$\mathbf{PQ} + \mathbf{QR} = \mathbf{PR} = (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PR} = \mathbf{OR} = \mathbf{D},\ \text{i.e. } \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{D}.$$

$$\mathbf{OQ} + \mathbf{QR} = \mathbf{OR} = \mathbf{D},\ \text{i.e. } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{D}.$$

則　**A** + (**B** + **C**) = (**A** + **B**) + **C**。

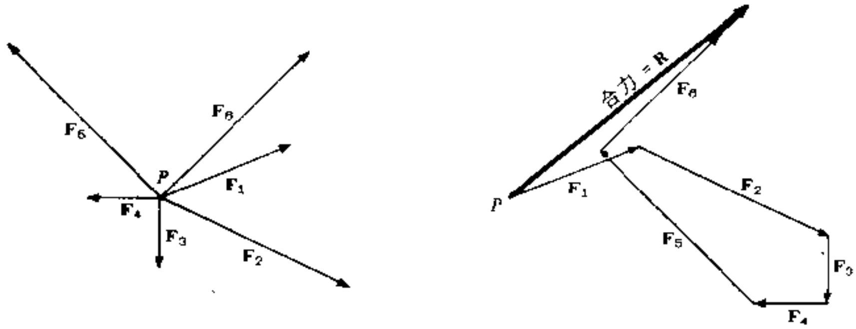
將 1.5 題與 1.6 題的結果推廣，可知任意多個向量相加，順序是不重要的。



1.7　6 個作用在 P 上的力 $\mathbf{F}_1$，$\mathbf{F}_2$，…，$\mathbf{F}_6$ 如圖所示，則要使 P 保持不動所需之力爲何？

圖　由於向量加法與其順序無關，我們可以由任一向量開始，如 $\mathbf{F}_1$。將 $\mathbf{F}_1$ 加上 $\mathbf{F}_2$，再加上 $\mathbf{F}_3$，…。由 $\mathbf{F}_1$ 的始點畫向 $\mathbf{F}_6$ 終點的向量即爲合力 **R**，即 $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6$。

要使 P 保持不動的力就是 $-\mathbf{R}$，它是一個大小與 **R** 相等但方向相反的向量，有時候我們稱此力爲平衡力(equilibrant)。



1.8 給定向量A，B，C（圖1(a)），試建立 (a) $\mathbf{A}-\mathbf{B}+2\mathbf{C}$ (b) $3\mathbf{C}-\frac{1}{2}(2\mathbf{A}-\mathbf{B})$。

解 (a)

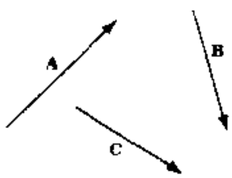


圖 1 (a)

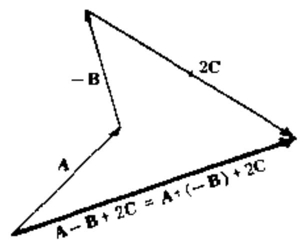


圖 2 (a)

(b)

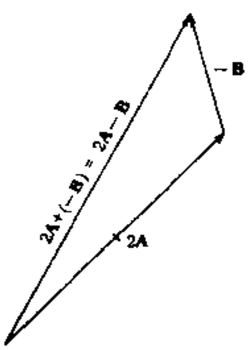


圖 1 (b)

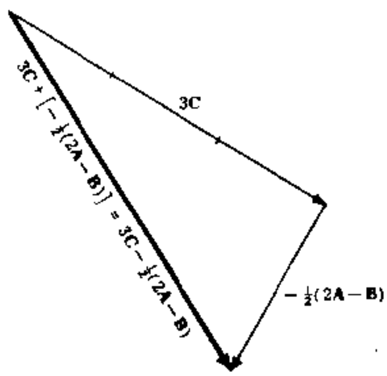


圖 2 (b)

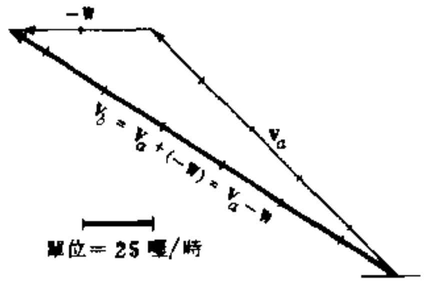
1.9 一飛機由於受相對於地面向西 50 哩/時的風影響，以相對於地面向西北方向 125 哩/時的速度飛行。如果沒有風的話，飛機的飛行方向及速度爲何？

解 令

$\mathbf{W}$＝風速

$\mathbf{V}_a$＝受風時的飛機速度

$\mathbf{V}_b$＝不受風時的飛機速度



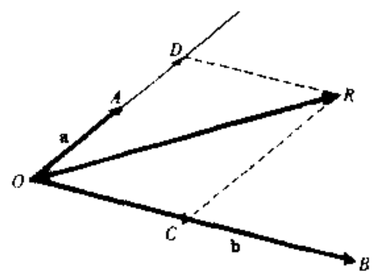
則

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_b + \mathbf{W} \quad 或 \quad \mathbf{V}_b = \mathbf{V}_a - \mathbf{W} = \mathbf{V}_a + (-\mathbf{W})$$

$\mathbf{V}_b$ 的大小爲 6.5 單位＝163 哩/時，方向爲西偏北 33°。

1.10　若 **a**、**b** 爲不共線的二向量，求在由 **a**、**b** 所決定的平面上任一向量 **r** 的表示式。

圖　不共線的兩向量也就是兩個不平行的向量，因此當將此二向量的始點重合後可決定一平面。令 **r** 是在由 **a** 及 **b** 所決定之平面上任一始點與 **a**、**b** 之始點重合的向量。由 **r** 的終點 R 分別畫一條與 **a** 及 **b** 平行的線，可形成一個平行四邊形 $ODRC$。由右邊的圖形可知



$$\mathbf{OD} = x(\mathbf{OA}) = x\mathbf{a}, \quad 其中 x 爲一純量$$
$$\mathbf{OC} = y(\mathbf{OB}) = y\mathbf{b}, \quad 其中 y 爲一純量$$

由向量加法的平行四邊形定律可得

$$\mathbf{OR} = \mathbf{OD} + \mathbf{OC} \quad 或 \quad \mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$$

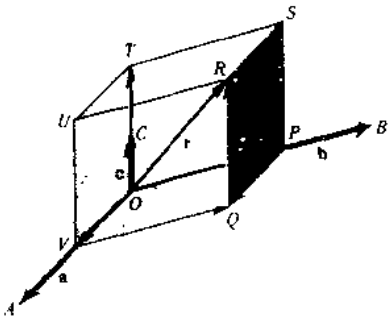
這就是我們所要求的表示式。向量 $x\mathbf{a}$ 及 $y\mathbf{b}$ 分別稱爲 **r** 在方向 **a** 和 **b** 的分向量（component vector）。純量 x 和 y 視這些向量的方位而定可正可負。由我們處理的過程可知，在給定 **a**、**b** 及 **r** 後，x 和 y 是唯一的。向量 **a** 和 **b** 稱爲此平面的**基底向量**（base vector）。

1.11　給定三個不共面的向量 **a**、**b**、**c**，求三維空間中任一向量 **r** 的表示式。

圖　不共面的三個向量也就是說它們不會平行於同一平面，因此，當將它們的始點重合後，它們不會落在同一平面上。

令 **r** 是在由 **a**、**b**、**c** 所決定的空間中始點與它們重合的任一向量。通過

r 的終點 R，我們分別作與 **a** 及 **b**、**b** 及 **c**、**a** 及 **c** 所張之平面相平行的平面，形成一個平行六面體 $PQRSTUV$。由下圖知



$\mathbf{OV} = x(\mathbf{OA}) = x\mathbf{a}$ 其中 x 是一純量
$\mathbf{OP} = y(\mathbf{OB}) = y\mathbf{b}$ 其中 y 是一純量
$\mathbf{OT} = z(\mathbf{OC}) = z\mathbf{c}$ 其中 z 是一純量

但是 $\mathbf{OR} = \mathbf{OV} + \mathbf{VQ} + \mathbf{QR} = \mathbf{OV} + \mathbf{OP} + \mathbf{OT}$ 因此 $\mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$.

由上面的過程可知，當 **a**、**b**、**c** 及 **r** 給定時，x，y，z 是唯一的。

向量 $x\mathbf{a}$，$y\mathbf{b}$ 及 $z\mathbf{c}$ 分別稱為 **r** 在 **a**、**b**、**c** 方向的分向量，而向量 **a**，**b**，**c** 稱為三維空間中的基底向量。

特別地，當 **a**、**b**、**c** 分別為相互垂直的單位向量 **i**、**j**、**k** 時，我們可以看出任一向量 **r** 均可用 **i**，**j**，**k** 表成唯一的表示式 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$。

同時，如果 $\mathbf{c} = \mathbf{0}$，則 **r** 一定會位於由 **a**、**b** 所決定的平面上，可得到 1.10 題的結果。

1.12 證明若 **a**、**b** 不共線，則 $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 可推論出 $x = y = 0$。

解 假設 $x \neq 0$，則 $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 可推得 $x\mathbf{a} = -y\mathbf{b}$ 或 $\mathbf{a} = -(y/x)\mathbf{b}$，因此，**a** 和 **b** 必定是共線的兩向量，這與假設不合。因此，$x = 0$；則 $y\mathbf{b} = \mathbf{0}$，得 $y = 0$。

1.13 **a** 和 **b** 為不共線的兩向量，若 $x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} = x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}$，則 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$。

解 $x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} = x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}$ 可以寫成

$$x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} - (x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}) = \mathbf{0} \quad 或 \quad (x_1 - x_2)\mathbf{a} + (y_1 - y_2)\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

因此，由 1.12 題可得 $x_1 - x_2 = 0,\ y_1 - y_2 = 0$ 或 $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$.

1.14 證明若 **a**、**b** 及 **c** 不共面，則由 $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0}$ 可推論出 $x = y = z = 0$。

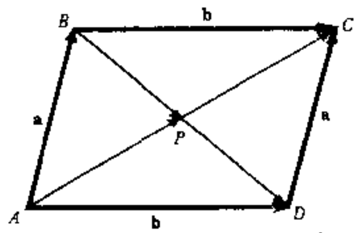
解 假設 $x \neq 0$，則由 $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0}$ 可推得 $x\mathbf{a} = -y\mathbf{b} - z\mathbf{c}$ 或 $\mathbf{a} = -(y/x)\mathbf{b} - (z/x)\mathbf{c}$。但是 $-(y/x)\mathbf{b} - (z/x)\mathbf{c}$ 是一個位於由 **b**、**c** 所張之平面上的向量（1.10 題），也就是 **a** 位於 **b**、**c** 所張的平面上，這與此三向量不共面的假設不合。因此，$x = 0$。同理，在假設 $y \neq 0$ 及 $z \neq 0$ 時也會得到同樣的矛盾，因此 $x = 0$，$y = 0$，$z = 0$。

1.15 假設 **a**、**b**、**c** 三向量不共面，若 $x_1\mathbf{a}+y_1\mathbf{b}+z_1\mathbf{c}=x_2\mathbf{a}+y_2\mathbf{b}+z_2\mathbf{c}$，則 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$，$z_1=z_2$。

圈　此方程式可改寫成 $(x_1-x_2)\mathbf{a}+(y_1-y_2)\mathbf{b}+(z_1-z_2)\mathbf{c}=\mathbf{0}$，則由1.14題可得 $x_1-x_2=0$，$y_1-y_2=0$，$z_1-z_2=0$ 或 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$，$z_1=z_2$。

1.16 證明平行四邊形的兩對角線互相平分。

圈　令 $ABCD$ 爲一平行四邊形，其兩對角線交於 P。



由於 $\mathbf{BD}+\mathbf{a}=\mathbf{b}$，因此 $\mathbf{BD}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$。所以 $\mathbf{BP}=x(\mathbf{b}-\mathbf{a})$。

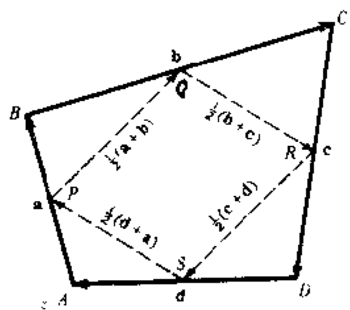
由於 $\mathbf{AC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$，因此 $\mathbf{AP}=y(\mathbf{a}+\mathbf{b})$。

但是 $\mathbf{AB}=\mathbf{AP}+\mathbf{PB}=\mathbf{AP}-\mathbf{BP}$，即 $\mathbf{a}=y(\mathbf{a}+\mathbf{b})-x(\mathbf{b}-\mathbf{a})=(x+y)\mathbf{a}+(y-x)\mathbf{b}$。

由於 **a** 和 **b** 不共線，所以由 1.13 題可知，$x+y=1$ 且 $y-x=0$，亦即 $x=y=\frac{1}{2}$，因此 P 是兩對角線的中點。

1.17 證明將任意四邊形的四邊中點依序相連會形成一個平行四邊形。

圈　令 $ABCD$ 爲所給的任意四邊形，P，Q，R，S 分別爲各邊中點，如下圖所示。



則　$\mathbf{PQ}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$，$\mathbf{QR}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$，$\mathbf{RS}=\frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d})$，$\mathbf{SP}=\frac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a})$.

但是 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$，因此

$$\mathbf{PQ}=\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=-\tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d})=\mathbf{SR}\quad\text{且}\quad\mathbf{QR}=\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=-\tfrac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a})=\mathbf{PS}$$

因此兩對邊相等且平行，$PQRS$ 爲一平行四邊形。

1.18 令 P_1、P_2 及 P_3 爲三個相對於原點 O 的固定點，且 $\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$，$\mathbf{r}_3$ 分別爲由 O 至各點的位置向量。證明若相對於原點 O，向量方程式 $a_1\mathbf{r}_1+a_2\mathbf{r}_2+a_3\mathbf{r}_3=0$ 成立，則此方程式相對於任一其它原點 O' 也成立的充要條件爲 $a_1+a_2+a_3=0$。