结构分析中的有限单元法及其应用

主编　颜云辉　谢里阳　韩清凯

NEUPRESS
东北大学出版社

结构分析中的有限单元法及其应用

主编 颜云辉 谢里阳 韩清凯

东 北 大 学 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

结构分析中的有限单元法及其应用/颜云辉，谢里阳，韩清凯主编．—沈阳：东北大学出版社，2000.12（2001.8 重印）

ISBN 7-81054-570-1

Ⅰ.结… Ⅱ.①颜… ②谢… ③韩… Ⅲ.结构分析-有限单元法-应用 Ⅳ.O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 73571 号

内容简介

本书结合作者十多年来的教学经验和科研心得，阐述了有限元法的主要原理及其应用。全书共 12 章，首先概述了有限单元法的基本思想，然后从弹性力学基本理论出发，以线弹性结构为重点，阐述了有限元法的基本原理，对于轴对称问题，杆件系统、空间结构和板壳问题、几何非线性和材料非线性的有限元法，以及结构动力有限元法等都进行了介绍。本书概念明确，条理清晰，重点突出，内容翔实。

本书可作为机械工程、土木建筑、材料加工、车辆工程、矿山冶金、航空航天等专业及相关专业高年级学生或研究生的教材，也可作为企业和科研机构读者及工程技术人员的参考书。

©东北大学出版社出版

（沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　　邮政编码 110006）

电话：(024)23890881　　传真：(024)23892538

网址：http://www.neupress.com　E-mail：neuph@neupress.com

北宁市印刷厂印刷　　东北大学出版社发行

开本：787mm×1092mm　1/16　　字数：262 千字　　印张：10.5

印数：2,361—3,360 册

2000 年 12 月第 1 版　　2001 年 8 月第 2 次印刷

责任编辑：任彦斌　　责任校对：米　戎

封面设计：唐敏智　　责任出版：秦　力

定价：19.80 元

前　言

有限单元法自20世纪50年代诞生以来，其理论体系不断完善，新的应用软件程序不断涌现，现已成为工程分析的必备工具。我国广大科技工作者经过数十年的不懈努力，在理论研究和工程应用两方面都取得了丰硕的成果和宝贵的实践经验，解决了许多重大工程的问题，为国民经济建设做出了贡献。

目前，在高等学校中，有限单元法已经成为机械工程、土木建筑、材料冶金、航空航天等工科专业的必修课程。广大工程技术人员已将它作为开发、设计和生产服务的重要工具。作者在长期的教学、科研工作中深切感到，只有在扎实的理论知识基础上，才能真正掌握有限单元法的具体应用，才能用对用好。因此，编写本书的目的是在满足教学急需的同时，为读者提供一本具有工程应用特色的参考书。

本书首先概述了有限单元法的基本思想，然后从弹性力学基本理论出发，以线弹性结构为重点，讲述有限元法的基本原理，对工程中常见的轴对称问题、杆件系统、空间结构、板壳问题、几何非线性和材料非线性的有限元法、结构动力有限元法等都给予较为详细的介绍。

本书在编写过程中，得到了东北大学出版社的热情支持。本书第1～8章的大部分内容由颜云辉执笔，第9，10章由韩清凯编写，第11，12章由谢里阳编写。辽宁工程技术大学王永岩、浙江工业大学张淑佳、沈阳化工学院金志浩和唐山大学杨文平编写了部分章节内容和部分实例，并对书稿提出了宝贵意见。

由于水平所限，书中错误和不当之处在所难免，敬请读者和同行批评指正。

作　者

2000年11月

目　　录

第1章 绪 论

1.1 引 言

大量的工程问题都涉及到应力、应变及位移的分析计算，弹性力学(又称弹性理论)就是研究物体在外部因素(如外力、温度变化等)作用下产生的应力、应变及其位移规律的一门科学，它是固体力学的一个分支。弹性力学的基本任务就是针对各种具体情况，确定弹性体内应力与应变的分布规律。也就是说，当已知弹性体的形状、物理性质、受力情况和边界条件时，确定其任一点的应力、应变状态和位移。弹性力学所研究的对象是理想弹性体，其应力与应变之间的关系为线性关系，即符合虎克定律。所谓理想弹性体，是指符合下述四个假定的物体。

(1) 连续性假定。也就是假定整个物体的体积都被组成该物体的介质所填满，不存在任何空隙。尽管一切物体都是由微小粒子组成的，并不能符合这一假定，但是只要粒子的尺寸以及相邻粒子之间的距离都比物体的尺寸小得很多，则对于物体的连续性假定，就不会引起显著的误差。有了这一假定，物体内的一些物理量(如应力、应变、位移等等)才可能是连续的，因而才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。

(2) 完全弹性假定。这是假定物体服从虎克定律，即应变与引起该应变的应力成正比；反映这一比例关系的常数，就是所谓的弹性常数。弹性常数不随应力或应变的大小和符号而变。由材料力学已知：脆性材料的物体，在应力未超过比例极限以前，可以认为是近似的完全弹性体；而韧性材料的物体，在应力未达到屈服极限以前，也可以认为是近似的完全弹性体。这个假定，使得物体在任意瞬时的应变将完全取决于该瞬时物体所受到的外力或温度变化等因素，而与加载的历史和加载顺序无关。

(3) 均匀性假定。也就是假定整个物体是由同一材料组成的。这样，整个物体的所有各部分才具有相同的弹性，因而物体的弹性常数才不会随位置坐标而变，可以取出该物体的任意一小部分来加以分析，然后把分析所得的结果应用于整个物体。如果物体是由多种材料组成的，但是只要每一种材料的颗粒远远小于物体而且在物体内是均匀分布的，那么整个物体也就可以假定为均匀的。

(4) 各向同性假定。这是假定物体的弹性在所有各方向上都是相同的。也就是说，物体的弹性常数不随方向而变化。对于非晶体材料，是完全符合这一假定的。而由木材、竹材等作成的构件，就不能当作各向同性体来研究。至于钢材构件，虽然其内部含有各向异性的晶体，但由于晶体非常微小，并且是随机排列的，所以从统计意义上讲，钢材构件的弹性基本上是各向同性的。

上述假定，是为了研究问题方便，根据研究对象的性质、结合求解问题的范围，而作出的基本假定。这样可以略去一些暂时可不考虑的因素，使问题的求解成为可能。

在弹性力学中，所研究的问题主要是理想弹性体的线性问题。为了保证研究的问题限定在线性范围，还需要作出小位移和小变形的假定。这就是说，要假定物体受力以后，物体所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸，并且其应变和转角都小于1。所以，在建立变形体的

平衡方程时,可以用物体变形以前的尺寸来代替变形后的尺寸,而不致引起显著的误差,并且,在考察物体的变形及位移时,对于转角和应变的二次幂或其乘积都可以略去不计。对于工程实际中的问题,如果不能满足这一假定的要求,一般需要采用其他理论来进行分析求解(如大变形理论等)。

弹性力学的性质和任务与材料力学是一致的,都是研究分析构件在弹性范围内工作时的应力、变形等问题,但两者在研究内容及方法上有很大的差别。在材料力学里,基本上只研究所谓的杆状构件,即长度远大于宽度和厚度的构件。这类构件在拉压、剪切、弯曲、扭转等作用下的应力和位移,是材料力学的主要研究内容。而弹性力学除研究杆状构件之外,还研究板、壳、块体等问题。

虽然在材料力学和弹性力学中都研究杆状构件,但是研究的方法却不完全相同。在材料力学里除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析外,为了简化数学推导,还引用了一些关于构件的形变状态或应力分布的假定(如平面截面的假定、拉应力在净截面上均匀分布的假定等等)。而在弹性力学里研究杆状构件,一般都不必引用那些假定,所以其解答要比材料力学里得出的解答精确得多。当然,弹性力学在研究板壳等一些复杂问题时,也引用了一些有关形变状态或应力分布的假定来简化其数学推导。

弹性力学的基本方程是以偏微分方程组来表示的。在分析应力时,一般总是从构件的连续性出发,依据无限小单元的物理－数学模型建立微分方程式,然后求解微分方程式获得问题的解。从理论上讲,弹性力学能解决一切弹性体的应力和应变问题。但在工程实际中,一般构件的形状、受力状态、边界条件都比较复杂,所以除少数的典型问题外,对大多数工程实际问题往往无法用弹性力学的基本方程直接进行解析求解,只能通过数值计算方法来求得其近似解。

有限单元法是随着电子计算机的普及应用迅速发展起来的一种非常有效的数值方法。本书的重点就是介绍如何运用有限单元法来求解弹性力学问题。

1.2　有限单元法概述

1.2.1　有限单元法的基本思想及其发展历史

早在20世纪40年代初,欧拉等人就提出了有限单元法的基本思想,但一直没有引起人们的足够重视。直到50年代中期,才开始有人利用这种思想对航空工程中的飞机结构进行矩阵分析。其分析思路是,将整个结构看作是由有限个力学小单元相互连接而形成的集合体,每个单元的力学特性组合在一起便可提供整体结构的力学特性。这种处理问题的思路,在1960年被广泛用于求解弹性力学的平面应力问题,并开始使用“有限单元法”这一术语。之后,随着电子计算机的飞速发展,有限单元法如虎添翼,经过30多年的发展,目前国内外已有许多大型通用的有限元分析程序可供使用。因而,工程技术人员进行结构分析时的主要任务就是设法将复杂的工程实际问题加以简化、建立合理的计算力学模型,然后再按所选用的程序的要求,准备好全部所需的数据和信息,运用计算机进行求解,最后再检查计算结果的合理性。事实上,现在许多大型有限元分析软件都已配备了功能很强的前后置处理程序,并已出现了将人工智能技术引入有限元分析软件,形成了比较完善的专家系统,逐步实现了有限元分析的智能化。

几十年来,有限单元法已在各个工程领域得到了广泛的应用,相应的大型软件已成为现代工程设计中一个重要的、不可缺少的计算工具。特别是近年来,由于计算机辅助设计在工程设

计中日益广泛的应用，有限元程序包亦已成为CAD常用计算方法库中不可缺少的重要内容之一，并且与优化设计技术结合，形成了大规模的集成系统。工程设计人员使用这些系统，就可以高效而正确合理地确定最佳设计方案。

实际上，可以认为有限单元法的概念是源于结构理论。对于一个杆系结构，通常是由许多结构单元(杆件)所组成。结构中的这些单元仅在有限个节点上彼此相连。对每个单元而言，诸如力与位移之间的关系这样的结构特性都是用节点上所确认的自由度来惟一地予以规定；而整体杆系结构的特性则可通过组集这些单元特性来加以描述。

图1-1所示的是一个由二根杆件组成的铰接桁架，杆件的截面积为 A，弹性模量为 E，长度分别为 l_1 和 l_2。该桁架在各铰接点处受有外力 $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3$。因杆件在节点处是铰接，不承受弯矩，只能承受轴向力，所以，每个节点的力和位移各有两个分量，即每个节点均具有两个自由度，而每个单元则有四个自由度。为此，必须用四个方程来描述每个单元的力与位移之间的关系。对于单元①，有

$$\left.\begin{aligned} U_1^1 &= k_{11}u_1^1 + k_{12}v_1^1 + k_{13}u_2^1 + k_{14}v_2^1 \\ V_1^1 &= k_{21}u_1^1 + k_{22}v_1^1 + k_{23}u_2^1 + k_{24}v_2^1 \\ U_2^1 &= k_{31}u_1^1 + k_{32}v_1^1 + k_{33}u_2^1 + k_{34}v_2^1 \\ V_2^1 &= k_{41}u_1^1 + k_{42}v_1^1 + k_{43}u_2^1 + k_{44}v_2^1 \end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

式中，$U_1^1, V_1^1, U_2^1, V_2^1$ 分别为节点1和节点2施于单元①的节点力沿坐标方向的分量；$u_1^1, v_1^1, u_2^1, v_2^1$ 分别为节点1和节点2的位移沿相应坐标方向的分量。此处，上标是单元编号，下标为节点编号。

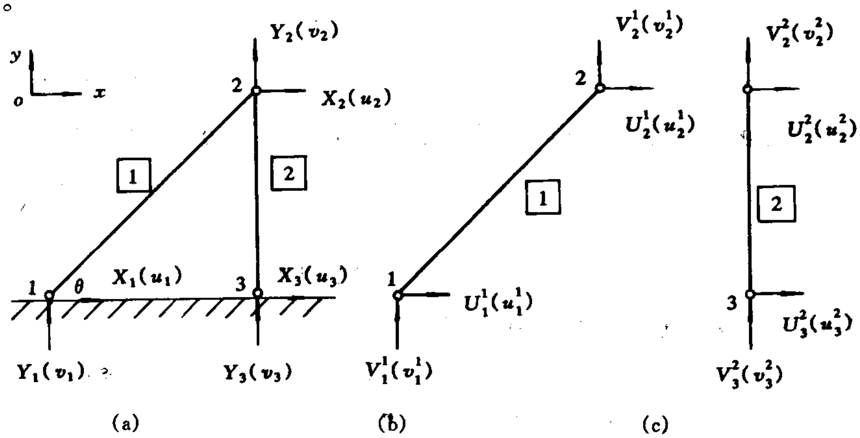

图1-1 铰接桁架

可将式(1-1)写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} U_1^1 \\ V_1^1 \\ U_2^1 \\ V_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ v_1^1 \\ u_2^1 \\ v_2^1 \end{Bmatrix} \tag{1-2}$$

或简记为

$$\boldsymbol{R}^1 = \boldsymbol{k}^1 \boldsymbol{\delta}^1 \tag{1-3}$$

式中，$\boldsymbol{\delta}^1 = \{u_1^1 \quad v_1^1 \quad u_1^2 \quad v_1^2\}^{\mathrm{T}}$ 被称为单元①的节点位移向量；$\boldsymbol{R}^1 =$

$\{U_1^1 \quad V_1^1 \quad U_2^1 \quad V_2^1\}^{\mathrm{T}}$ 称为单元①的节点力向量；$\boldsymbol{k}^1$ 为单元①的刚度矩阵，其中 $k_{11}, k_{12}, \cdots, k_{44}$为刚度系数。

若令

$$u_1^1 = 1$$

及

$$v_1^1 = u_2^1 = v_2^1 = 0$$

则得

$$U_1^1 = k_{11}, V_1^1 = k_{21}, U_2^1 = k_{31}, V_2^1 = k_{41}$$

这表明，当节点 1 沿 x 方向产生一单位位移（$u_1{}^1 = 1$），而其余节点、其余自由度方向上的位移为零时，刚度系数就等于施加于该单元各自由度方向上的力。

如图 1-2 所示，在此状态下，单元的长度将缩短 $\Delta l_1 = \cos\theta$ 。根据材料力学知识，在节点 1 处需要向单元①施加的轴向压力为

$$\left(\frac{EA}{l_1}\right)\Delta l_1 = \frac{EA\cos\theta}{l_1}$$

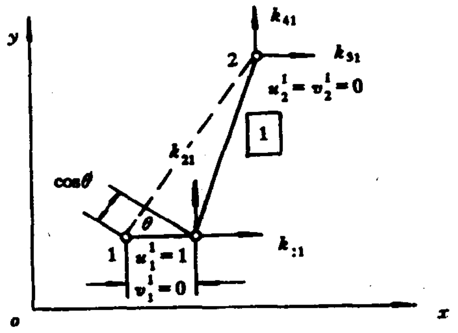

图 1-2　杆单元

由此可以求得作用于单元①在节点 1 处两个自由度方向上的力，即该轴向压力在 x 和 y 方向上的分量

$$k_{11} = \frac{EA}{l_1}\cos^2\theta$$

$$k_{21} = \frac{EA}{l_1}\cos\theta\sin\theta$$

而作用于节点 2 的两个自由度方向上的力，则与之大小相等、方向相反。即

$$k_{31} = -\frac{EA}{l_1}\cos^2\theta$$

$$k_{41} = -\frac{EA}{l_1}\cos\theta\sin\theta$$

再继续作类似的分析，便可得到其余的刚度系数，有

$$\boldsymbol{k}^1 = \frac{EA}{l_1}\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{1-4}$$

同理，可以求出单元②的刚度矩阵

$$\boldsymbol{k}^2 = \frac{EA}{l_2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-5}$$

为了获得整体结构的力与位移之间的关系，需要引入整体结构的节点位移分量 $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$ 和单元节点位移分量 $u_1^i, v_1^i, u_2^i, v_2^i$ 及 u_3^i, v_3^i（上标 i 为单元编号）之间的协调关系，即

$$u_2 = u_1^1 \qquad v_2 = v_1^1$$
$$u_2 = u_2^1 = u_2^2 \qquad v_2 = v_2^1 = v_2^2$$
$$u_3 = u_3^2 \qquad v_3 = v_3^2$$

另外,根据力的平衡条件,作用在节点上的外力应该等于与该节点相连的各单元所受到的节点力之和。因此可得到结构的力与位移的关系

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= U_1^1 = \frac{EA}{l_1}(\cos^2\theta u_1 + \cos\theta\sin\theta v_1 - \cos^2\theta u_2 - \cos\theta\sin\theta v_2)\\
Y_1 &= V_1^1 = \frac{EA}{l_1}(\cos\theta\sin\theta u_1 + \sin^2\theta v_1 - \cos\theta\sin\theta u_2 - \sin^2\theta v_2)\\
X_2 &= U_2^1 + U_2^2 = \frac{EA}{l_1}(-\cos^2\theta u_1 - \cos\theta\sin\theta v_1 + \cos^2\theta u_2 + \cos\theta\sin\theta v_2)\\
Y_2 &= V_2^1 + V_2^2 = \frac{EA}{l_1}(-\cos\theta\sin\theta u_1 - \sin^2\theta v_1 + \cos\theta\sin\theta u_2 + \sin^2\theta v_2) +\\
&\quad \frac{EA}{l_2}(v_2 - v_3)\\
X_3 &= U_3^2 = 0\\
Y_3 &= V_3^2 = \frac{EA}{l_2}(-v_2 + v_3)
\end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

写成矩阵形式,有

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix}
\cos^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & -\cos^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & 0 & 0\\
\cos\theta\sin\theta/l_1 & \sin^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & -\sin^2\theta/l_1 & 0 & 0\\
-\cos^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & \cos^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & 0 & 0\\
-\cos\theta\sin\theta/l_1 & -\sin^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & \sin^2\theta/l_1 + 1/l_2 & 0 & -1/l_2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1/l_2 & 0 & 1/l_2
\end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{1-7}$$

或简记为

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{K\delta} \tag{1-8}$$

这就是有限单元法所要建立的基本方程组。上式中 $\boldsymbol{R}$ 是由作用在节点上的外载荷所组成的向量,称为载荷向量(或载荷列阵); $\boldsymbol{\delta}$ 是由基本未知量——节点位移所组成的向量;矩阵 $\boldsymbol{K}$ 称为结构的整体刚度矩阵。

$$\boldsymbol{K} = EA \begin{bmatrix}
\cos^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & -\cos^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & 0 & 0\\
\cos\theta\sin\theta/l_1 & \sin^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & -\sin^2\theta/l_1 & 0 & 0\\
-\cos^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & \cos^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & 0 & 0\\
-\cos\theta\sin\theta/l_1 & -\sin^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & \sin^2\theta/l_1 + 1/l_2 & 0 & -1/l_2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1/l_2 & 0 & 1/l_2
\end{bmatrix} \tag{1-9}$$

不难看出,结构的整体刚度矩阵是由各单元的刚度矩阵叠加组成的。在上式的 $\boldsymbol{K}$ 矩阵中,左上方的虚线部分恰好是单元①的刚度矩阵,而右下方的虚线部分正是单元②的刚度矩阵;两虚线框的重叠部分中的元素,则是两个单元刚度矩阵在同一位置处的元素之和。

建立整体结构的刚度矩阵是运用有限单元法求解问题的核心内容，一旦获得了整体刚度矩阵，就等于列出了有限单元法的基本方程。而建立整体刚度矩阵的问题，又可归结为求单元的刚度矩阵问题。

对于一个连续体的求解问题，有限单元法的实质就是将具有无限多个自由度的连续体，理想化为只有有限个自由度的单元集合体，单元之间仅在节点处相连接，从而使问题简化为适合于数值求解的结构型问题。这样，只要确定了单元的力学特性，就可以按结构分析的方法来进行求解。

1.2.2　有限单元法的分析过程

通过以上的简单论述，可以把有限单元法的分析过程归纳为以下几个方面。

1. 结构的离散化

结构的离散化是进行有限单元法分析的第一步。数学上，把无限自由度处理成有限自由度的过程叫做"离散化"。有限单元法中的结构离散化过程，简单地说，就是将分析的对象划分为有限个单元体，并在单元上选定一定数量的点作为节点，各单元体之间仅在指定的节点处相连。有限单元法的整个分析过程就是针对这种单元集合体来进行的。单元的划分，通常需要考虑分析对象的结构形状和受载情况。对于前面所研究讨论的桁架，其单元的划分比较简单，因为分析对象本身就是由一系列杆件相互连接而成，所以可直接取每根杆件作为一个单元。但是，对于其他非杆件的机械结构物，如齿轮、轧机机架等，为了能有效地逼近实际的分析对象，就必须认真考虑划分方案、选择何种类型单元以及划分的单元数目等等。对于一些比较复杂的结构，有时还要采用几种不同类型的单元来进行离散化。许多大型有限元分析软件都备有多达几十种单元类型的单元库，供分析计算人员选用。常用的主要有杆单元、平面单元、块单元、等参元、壳单元等，以后将陆续介绍、讨论有关这方面的具体实施方法。

2. 位移模式的选择

有限单元法是应用局部的近似解来求得整个问题的解的一种方法。根据分块近似的思想，可以选择一个简单的函数来近似地构造每一单元内的近似解。本书中讲授的有限单元法是以节点位移为基本未知量，所以为了能用节点位移表示单元体的位移、应变和应力，在分析求解时，必须对单元中位移的分布作出一定的假设，即选择一个简单的函数来近似地表示单元位移分量随坐标变化的分布规律，这种函数称为位移模式。

位移模式的选择是有限单元法分析中的关键。由于多项式的数学运算比较简单、易于处理，所以通常是选用多项式作为位移模式。多项式的项数和阶数的选择，一般要考虑单元的自由度和解答的收敛性要求等。以后要对此作详细的讨论。

3. 单元的力学特性分析

分析单元的力学特性主要包括以下三部分内容：

(1)通过几何方程建立单元应变与节点位移的关系式；

(2)利用物理方程导出单元应力与节点位移的关系式；

(3)由虚功原理推出作用于单元上的节点力与节点位移之间的关系式，及单元的刚度方程。

4. 等效节点力的计算

分析对象经过离散化以后，单元之间仅通过节点进行力的传递，但实际上力是从单元的公共边界上传递的。为此，必须把作用在单元边界上的表面力，以及作用在单元上的体积力、集

中力等，根据静力等效的原则全都移置到节点上，移置后的力称为等效节点力。

5．建立整体结构的平衡方程

建立整体结构的平衡方程也叫做结构的整体分析，实际上就是把所有单元的刚度矩阵集合形成一个整体刚度矩阵，同时将作用于各单元的等效节点力向量组集成整体结构的节点载荷向量。从单元到整体的组集过程主要是依据两点：一是所有相邻的单元在公共节点处的位移相等；二是所有各节点必须满足平衡条件。通常，组集整体刚度矩阵的方法是所谓的直接刚度法，即按节点编号对号入座，直接利用单元刚度矩阵中的刚度系数子阵进行叠加。

6．求解未知的节点位移及单元应力

在上述组集整体刚度矩阵时，没有考虑整体结构的平衡条件，所以组集得到的整体刚度矩阵是一个奇异矩阵，尚不能对平衡方程直接进行求解。只有在引入边界约束条件、对所建立的平衡方程加以适当的修改之后，方可根据方程组的具体特点选择恰当的计算方法来求得节点位移，继而求出单元应变和应力。应注意的是，引入边界条件修改平衡方程实质上就是消除整体结构的刚体位移。

第 2 章　弹性力学基础

2.1　弹性力学中的几个基本概念

2.1.1　外力与内力

1. 外　力

作用于物体的外力，通常可分为两类，即表面力(也叫面力)和体积力(也叫体力)。

面力一般是指分布在物体表面上的外力，如压力容器所受到的内压、水坝所受的静水压力、物体和物体之间的接触压力等等。通常情况下，面力是位置坐标的函数，即物体表面各点所受的面力是不同的。

在物体表面 P 点处取一微小面积 ΔS，假设其上作用有面力 $\Delta \boldsymbol{F}$，则 P 点所受的面力可定义为

$$Q_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta S} \tag{2-1}$$

通常用各坐标方向上的分量 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 来表示面力，即

$$Q_S = \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{Bmatrix} = \{\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}\}^{\mathrm{T}} \tag{2-2}$$

体力一般是指分布在物体体积内的外力，通常与物体的质量成正比、且是各质点位置的函数，如重力、惯性力等。作用在物体内 P 点上的体力，可按面力定义方式进行定义，即在 P 点处取一微小体积 ΔV，假定其上作用有体力 $\Delta \boldsymbol{R}$，则 P 点所受的体力可定义为

$$Q_V = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{R}}{\Delta V} \tag{2-3}$$

一般也是用各坐标方向上的分量 X, Y, Z 来表示体力，即

$$Q_V = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \{X, Y, Z\}^{\mathrm{T}} \tag{2-4}$$

2. 内　力

弹性体受到外力作用后，其内部将有内力存在。若假想用一经过物体内 P 点的截面 mn 将物体分为两部分 A 和 B，并移去其中的一部分 B。我们知道，当一个物体在外力作用下处于平衡状态时，物体各部分都应保持平衡。显然，在截面 mn 上必定有某种力存在，这种力就称为内力，实际上也就是物体内部的相互作用力。如图 2-1 所示，在截面 mn 上应该有移去的虚线部分 B 对 A 部分作用的内力。

2.1.2　应力的概念

在截面 mn 上 P 点处取一微小面积 ΔA，假设作用于 ΔA 上的内力为 $\Delta \boldsymbol{G}$，则

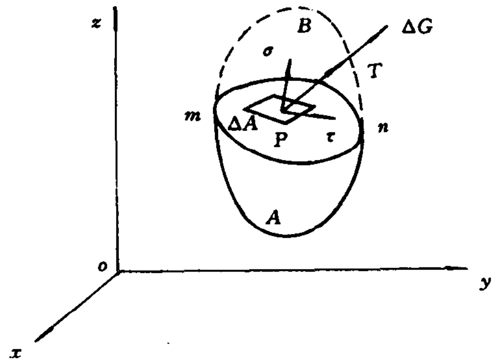

图 2-1　物体内任意点处的应力

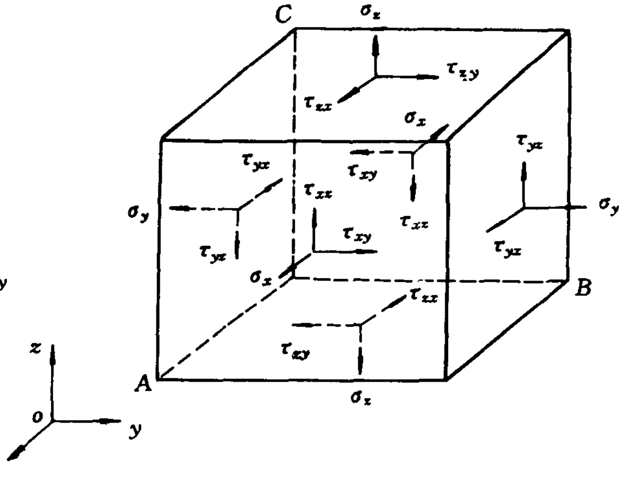

图 2-2　直角坐标系下的应力分量

$$T = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta A}$$

就是 P 点处的应力。对于应力 T，除了一些公式的推导外，一般很少用它沿坐标方向的分量来表示，这是因为，沿坐标方向的应力分量与物体的形变及材料的强度都没有直接的关系。通常是将应力沿截面 ΔA 的法向和切向进行分解，相应的分量就是常用的正应力 σ 和剪应力 τ 。

值得指出的是，在物体内的同一点处，不同方向截面上的应力是不同的。很显然，物体内任一点处所有各截面上应力的大小和方向，就表达了这一点的应力状态。

在弹性力学中，弹性体被假定为是连续的，整个弹性体可以看作是由无数个微小正方体元素组成。为描述弹性体内任一点 P 的应力状态，可通过该点从弹性体内切取一微小正方体，正方体的棱线与坐标轴平行，如图 2-2 所示。

正方体各面上的应力可按坐标轴方向分解为一个正应力和两个剪应力，即每个面上的应力都可用三个应力分量来表示。由于物体内各点的内力都是平衡的，所以作用在正方体相对两面上的应力分量均大小相等、方向相反。这样，可用九个应力分量来表示作用在正方体各面上的应力，即

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

其中，σ 为正应力，下标表示作用面和作用方向；τ 是剪应力，第一下标表示作用面，第二下标表示剪应力的方向。

应力分量的符号规定：若应力作用面的外法线方向与坐标轴的正方向一致，则该面上的应力分量就以沿坐标轴的正方向为正，沿坐标轴的负方向为负。相反，如果应力作用面的外法线是指向坐标轴的负方向，那么该面上的应力分量就以沿坐标轴的负方向为正，沿坐标轴的正方向为负。请注意，这里的符号规定与材料力学中的规定有所不同。

根据图 2-2 中微小正方体的平衡条件(力矩平衡方程)，可以证明，作用在正方体各面上的剪应力存在着互等关系：作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的剪应力是互等的，不仅大小相等，而且正负号也相同，即

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{2-5}$$

这就是所谓的剪应力互等定理。

由此可见,剪应力的两个下标是可以任意对换的。这样,只要用 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 这六个应力分量就可以完全描述作用在微小正方体各面上的应力。当正方体足够小时,作用在正方体各面上的应力分量就可视为 P 点的应力分量。

下面将证明,只要已知 P 点的这六个应力分量,就可以求得过 P 点任何截面上的正应力和剪应力,也就是说,上述六个应力分量可以完全确定该点的应力状态。所以,通常用这六个应力分量来表示一点的应力状态。

2.1.3 一点应力的状态

一般说来,弹性体内各点的应力状态都是不同的,要想弄清楚物体内任一点处的应力状态,必须知道经过该点的任意截面上的应力。把经过物体内任一点各个截面上的应力状况叫做这一点的应力状态。

现在假定已知弹性体内任一点 P 的六个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$,那么按下述方法可以求得经过 P 点的任一斜面上的应力。

如图 2-3 所示,在 P 点附近取一平面 ABC 与给定斜面平行,且该平面与经过 P 点而垂直于坐标轴的三个平面形成一个微小四面体 $PABC$ 。当平面 ABC 无限接近于 P 点时,平面 ABC 上的应力就无限接近于斜面上的应力。

设平面 ABC 的外法线为 N ,而 N 的方向余弦为

$$\cos(N,x) = l, \quad \cos(N,y) = m, \quad \cos(N,z) = n$$

若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\triangle A$,则 $\triangle PCA, \triangle PBC, \triangle PAB$ 的面积分别为 $l\Delta A, m\Delta A, n\Delta A$ 。

令 X_N, Y_N, Z_N 分别为$\triangle ABC$ 上的全应力在坐标轴上的投影。由平衡条件 $\Sigma F_x = 0$,得

$$X_N\Delta A - \sigma_x l\Delta A - \tau_{yx}m\Delta A - \tau_{zx}n\Delta A = 0$$

同理,由平衡条件 $\Sigma F_y = 0$ 和 $\Sigma F_z = 0$,还可得到另外两个相似的方程,整理得

$$\left.\begin{aligned} X_N &= l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \\ Y_N &= l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} \\ Z_N &= l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{aligned}\right\} \tag{2-6}$$

这里没有考虑体积力,因为当平面 ABC 趋近于 P 点时,四面体的体积与各面的表面积相比是高一阶的微量,可以不计。

容易求出平面 ABC 上的全应力 S_N 为

$$\begin{aligned} S_N &= \sqrt{X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2} \\ &= \sqrt{(l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx})^2 + (l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz})^2 + (l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n\sigma_z)^2} \end{aligned} \tag{2-7}$$

而平面 ABC 上的正应力 δ_N 则可通过投影求得

$$\begin{aligned} \sigma_N &= lX_N + mY_N + nZ_N \\ &= l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2lm\tau_{xy} + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{zx} \end{aligned} \tag{2-8}$$

因

$$S_N^2 = \sigma_N^2 + \tau_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2 \tag{2-9}$$

故有