〔美〕RICHARD R·GOLDBERG 著

实分析方法

侯德润 译

上 册

人民教育出版社

实分析方法

上　册

[美] Richard R. Goldberg 著
侯德润 译

人民教育出版社

原书供读完初等微积分课程的学生作为一学年的高等分析教程用的. 作者以严格的方式介绍了分析学中的基本概念如函数、极限、连续性、导数和积分、序列和级数等等，还以较多的篇幅讨论了度量空间和勒贝格积分等论题，以期为读者学习现代分析和拓扑学提供一个良好的基础. 此书立论严谨，说理详尽，各节均配有足够数量的习题.

中译本分上、下两册出版. 上册内容包括：集与函数、实数序列、实数级数、极限与度量空间、度量空间上的连续函数、连通性、完全性和紧性，还有一个附录，阐述了实数的代数公理和顺序公理. 下册内容包括：微积分、初等函数、泰勒级数、函数序列和级数、三条著名定理、勒贝格积分和傅里叶级数.

本书可供大学数学系师生、研究生及有关科技工作者参考.

实分析方法

上 册

〔美〕Richard R.Goldberg 著

侯德润 译

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

哈尔滨印刷二厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 8.75 字数 210,000

1980 年 11 月第 1 版 1981 年 8 月第 1 次印刷

印数 00,001—12,000

书号 13012·0543 定价 0.77元

序

本书是给已读完普通初等微积分课程的学生作为一年修完的教程用的。它以严格的方式介绍了数学分析中基本概念和基本工具的基础材料——函数，极限，连续性，导数和积分，序列和级数．书中详尽地处理了初等教程中常常含糊的大多数难点，此外，还讨论了许多比较高深的论题，目的是要为现代分析和拓扑学提供一个良好的基础（作为一种尝试）．特别是，讨论了度量空间和勒贝格积分，这些论题往往是高等教程中的内容．本书还包括很多较小的，但是重要的论题，它们在同级教程中并不常见，其中包括：贝尔类和间断函数，级数的可和性，用多项式逼近连续函数的维尔斯特拉斯定理，以及从不动点理论的观点来证明微分方程标准的存在定理．

本书与传统的“高等微积分”课程的教本具有相同深度，但不考虑“多变数”的问题．按照我们的看法，关于微分和矢量运算的材料，最好是从近代微分几何的观点来了解，并把它们归入另一门课程．

第二版附记

按照各大专院校许多同事提出的中肯意见，对第一版作了许多修改和增删.

这一新版的主要特点，是增加了一些叫做“注释和补充习题”的小节，其中包括各种各样的内容. 有几个著名的定理与正文中的内容有关，例如集论中的许雷德-伯恩斯坦定理，拓扑学中的蒂茨开拓定理，以及斯通关于维尔斯特拉斯逼近定理的推广. 我们只给出了这些定理的证明概要，详细证明留给学生作为习题. 在这些新的小节中，也有各种特点的习题(其中许多是很有挑战性的)，偶尔还有关于历史的附注. 教师如需要这些新材料中习题的解法，可以从作者处得到.

我还增加了一个附录，内容是用公理化的方法处理实数系. 这是一种折衷方案，既非像第一版中那样对之全然不谈，也避免了对基本原理作冗长的阐述，我认为冗长的阐述是会妨碍读者深入掌握本书核心内容的. 所有关于实数的假定以及能够从中导出的必要结果，都很仔细地提出了.

在好多章里有些图象说明(这也是和第一版不同的)和新的习题，以及新的证明。

Richard R. Goldberg

目　录

第四章 极限和度量空间

第五章 度量空间上的连续函数

第六章 连通性, 完全性和紧性

假定和记号

A. 本书一开始并不对实数展开广泛的论述. 然而, 读者若想按照严格的逻辑顺序进行讨论, 首先就要细读 § 1.1 到 § 1.3 中关于集和函数的基本定义和定理, 然后再转到附录中关于实数的代数公理和顺序公理, 以及从这些公理导出的关于算术和不等式的定理. 读完附录后, 读者应读 § 1.7, 该节中提出了上确界公理. 这时读者将看到, 我们已仔细论述了所有关于实数的基本假定. 选择这一路线的读者现在就可以跳读C段.

B. 然而, 有些人认为, 关于实数开头不要讲得太正式比较好, 这样读者可以较快地掌握本书的实质. 从这个观点来看, 最好是暂不读附录而直接着手通读本书正文部分. 对于想采用这一路线的读者, 我们简要提一下有关实数的某些事实.

整数是一个"完整的数". 像 6, 0, -3 都是整数. 有理数是一个可表为整数之商的实数. 像 3/2 和 $-9/276$ 都是有理数. 因此, 任何整数 k 都是有理数, 因为我们可以记 $k=k/1$. 无理数也是实数, 但非有理数. 例如, 方程 $x^2=2$ 的解一定是无理数.

读者应熟练掌握不等式. 他必须知道: 若 x, y 均为实数, 并且 $x<y$, 则 $-x>-y$. 此外, 若 $0<x<y$, 则 $0<1/y<1/x$.

对于 $x>0$, 我们定义 $|x|$ 等于 x. 对于 $x<0$, 我们定义 $|x|$ 等于 $-x$. 最后我们定义 $|0|=0$. 于是对任意的实数 x, $|x|$ 是 x 的"数值". 我们称 $|x|$ 为 x 的绝对值. 按 x 和 y 的符号来考虑各种可能情形, 读者当不难证明下列极为重要的结果:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y| \tag{1}$$

和

$$|xy|=|x|\cdot|y|.$$

若 a 和 b 为实数，则 $|a-b|$ 的几何解释是由 a 到 b(或者由 b 到 a)的距离. 这个解释对于理解许多证明步骤中的基本思想来说特别重要. 若 a,b,c 均为实数,则不等式

$$|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b| \tag{2}$$

的几何意义是由 a 到 b 的距离不超过由 a 到 c 的距离加上由 c 到 b 的距离. 这看来该是十分合理的. 试证明(2)式. [令 $x=a-c, y=c-b$ 并利用(1)式.]

C. 我们假定 $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$ 这样的指数律对于 $a>0$ 和 x 与 y 的有理值来说都是正确的. 在第八章,我们对任意实数 x 定义 a^x, 然后对任意指数证明熟知的指数律. 记号 $a^{1/2}$ 和 $\sqrt{a}$ 都是指 a 的正平方根. (对任何正数的正平方根的存在性问题, 见 § 6.2 中习题 8.)

D. 这里引入一些记号. 若 a 和 b 为实数，并有 $a<b$，则用 (a,b) 表示所有满足 $a<x<b$ 的实数 x 的集. $(a,\ \infty)$ 是指所有满足 $x>a$ 的实数 x 的集. $(-\infty,a)$ 是指所有满足 $x<a$ 的实数 x 的集. 集 (a,b) 叫做有界开区间,而 $(-\infty,a)$ 和 (a,∞) 叫做无界开区间. 有时我们用 $(-\infty,\infty)$ 表示所有实数的集. 注意,这里并不是在定义符号 ∞.

若 $a\leqslant b$, 则 $[a,\ b]$ 表示满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集. 这个集叫做有界闭区间. 因此一个闭区间可以只包含一点(如果 $a=b$). 我们有时需要用到“半开”的区间. 例如, $[0,1)$ 表示满足 $0\leqslant x<1$ 的实数 x 的区间.

我们不用记号 (a,b) 表示平面上的点. 我们将看到,若一点的“x 坐标”是 a,“y 坐标”是 b,我们将用 $\langle a,b\rangle$ 表示这一点.

若对“变数”或“几个变数”的一些值来说,某个陈述为真,则将这些值写在括弧内,放在此式的右边,往往是方便的. 例如,

$$f(x)<7 \qquad\qquad (0\leqslant x\leqslant 3)$$

意思是对所有在$[0,3]$区间上的 x,数 $f(x)$ 小于 7.

E. 本书内容在逻辑上是独立于初等几何、三角和微积分诸教程的. 这就是说,在任何定义中或在定理的陈述或证明中,我们不用这些初等教程中的结果,除非本书已经预先证实了这一结果. 不过,我们还是随意地应用初等微积分中的结果和概念来举例说明我们的定义和定理. 例如,直到第八章我们都没有定义正弦函数,但是在前几章的例题和习题中,我们确是用到了关于正弦函数的一些熟知的结果.

书中有些图象说明,但不太多. 我们认为读者须尽早学会自己画图. 画得不对的地方,教师可能会帮助纠正.

第一章　集与函数

§1.1　集与元素

所谓集，是指不管什么样的对象的集体．集中的对象叫做它的元素或点．注意，这里我们并没有真正定义集和元素这两个名词(因为我们没有定义“集体”或“对象”)；确切地说，我们把它们作为一些直观的概念，据以建立所有其它的概念．有时，我们不用“集”这个词，而用下面诸词之一来代替：类，族，集合．所有这些词(在本书中)均具有相同的意义．我们在§3.12中指出了在更精深地研究集时所涉及到的一些东西．

把集的元素放在花括号内以表示这个集的方法往往是有用的．例如，$\{a, b, c\}$表示由三个元素 a, b 和 c 所组成的集．适当利用一些圆点，用这种方法甚至能表示具有无穷多个元素的集(其意义参看§1.5D)．例如，所有正整数的集可以表为$\{1, 2, 3, \cdots\}$．集的另外一种记号是在描述集的表示式之外加一花括号．因此，笛卡尔平面的第一象限可以表为$\{\langle x, y\rangle \mid x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$，这是所有 x 非负和 y 非负的点$\langle x, y\rangle$的集．同样，$[0, 1]=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$．

定义　若 b 是集 A 的一个元素，则记为 $b\in A$．若 b 不是 A 的元素，则记为 $b\notin A$．

由此可见 $a\in\{a, b, c\}$，但 $d\notin\{a, b, c\}$．作为另一例子，假定我们定义一个棒球队是它的选手的集，并定义美国棒球联盟是其十二个会员队的集．于是，用我们刚才引入的记号，

美国棒球联盟＝{A 队，虎队，…，游骑队}．

A队＝{杰克逊，班多，…，坎潘纳雷斯}．

A队∈ 美国棒球联盟

杰克逊 $\in$A 队

注意，美国棒球联盟的元素本身也是集，这说明一个集可以是另一个集的元素．还要注意，虽然杰克逊在美国棒球联盟内打棒球，但他不是我们所定义的美国棒球联盟的一个元素．因此

杰克逊 $\notin$ 美国棒球联盟．

习题 1.1

1. 用几何方法描述下列实数集：

   $A=\{x|x<7\}$.

   $B=\{x||x|\geqslant 2\}$.

   $C=\{x||x|=1\}$.

2. 用几何方法描述下列平面点集：

   $A=\{\langle x, y\rangle|x^2+y^2=1\}$.

   $B=\{\langle x, y\rangle|x\leqslant y\}$.

   $C=\{\langle x, y\rangle|x+y=2\}$.

3. 设 P 为素数集．下列结论何者为真？

   (a) $7\in P$.

   (b) $9\in P$.

   (c) $11\notin P$.

   (d) $7547193\cdot 65317\in P$.

4. 设 $A=\{1, 2, \{3\}, \{4, 5\}\}$．下列结论真还是不真？

   (a) $1\in A$.

   (b) $3\in A$.

   A 有几个元素？

§1.2 集的运算

在初中算术里，加、减、乘、除的“初等运算”常被用来从旧数作出新数，这就是说，把两个数组合起来可产生第三个数．在集论中也有初等运算——并，交，取余集，它们多少类似于算术中加、乘和减的运算．

1.2A. **定义** 若 A 和 B 为集，则 $A\cup B$（读作"A 并 B"或"A 和 B 的并"）是一个集，它是由所有或者属于 A，或者属于 B（或同时属于二者）的元素构成的. 用符号表示，即

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

例如，若

$$A=\{1,2,3\},B=\{3,4,5\}. \tag{1}$$

则 $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$.

1.2B. **定义** 若 A 和 B 为集，则 $A\cap B$（读作"A交B"或"A 和 B 的交"）是一个集，它是由所有既属于 A 又属于 B 的元素构成的. 用符号表示，即

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

例如，若 A, B是 § 1.2A 中(1)式所示之集，则 $A\cap B=\{3\}$. （注意 $\{3\}$和 3 之间的区别. 因为$A\cap B$是只有一个元素 3 的集，为了前后一致，我们必须写作 $A\cap B=\{3\}$. 这个区别关系不大，我们往往忽略它.）参看图 1.

当 A 和 B 是无公共元素的两个集时，$A\cap B$ 中一个元素也没有. 但我们仍然希望把 $A\cap B$叫做一个集. 所以我们提出如下定义.

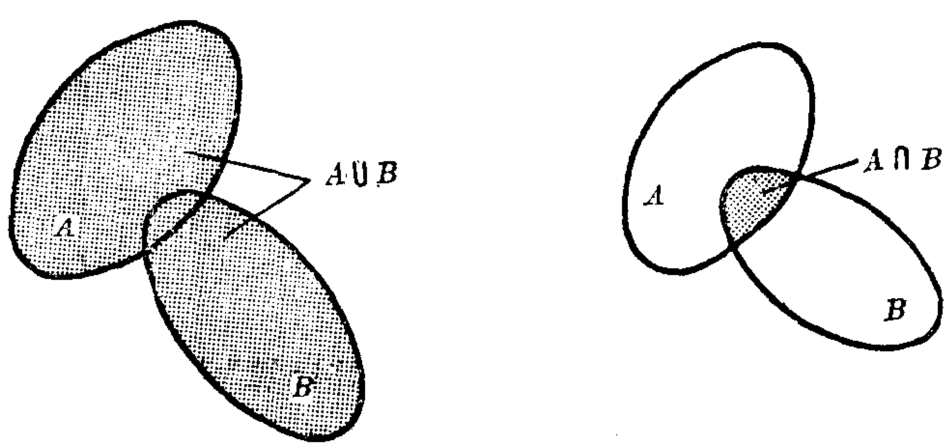

图 1

1.2C. **定义** 我们定义空集（记为∅）为没有元素的集.

例如$\{1,2\}\cap\{3,4\}=\varnothing$. 此外，对于任一集 A, 我们有 $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$(试验证之!).

1.2D. **定义** 若A和B为集，则$B-A$(读作"B减A")是一个集，它是由所有属于B而不属于A的元素构成的. 用符号表示，即

$$B-A=\{x \mid x\in B, x\notin A\}.$$

例如，若 A, B 是 § 1.2A 中(1)式所示之集，则 $B-A=\{4,5\}$. 参看图 2.

对于集，也有对应于算术中符号≤和≥的关系. 我们现在来定义它们.

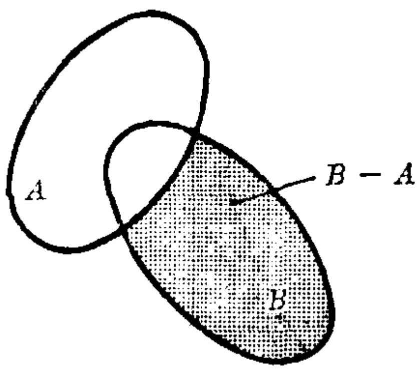

图 2

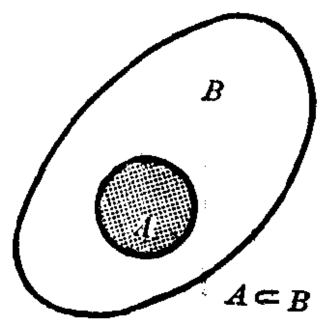

图 3

1.2E. **定义** 若集 A 的每一元素也是集B的元素，则记为$A\subset B$(读作"A含于 B") 或 $B\supset A$(读作"B包含A"). 若$A\subset B$, 我们就说A是B的一个子集. 所谓B的真子集就是这样的子集$A\subset B$, 但$A\neq B$. (参看图 3.)

例如，若

$$A=\{1,6,7\},\quad B=\{1,3,6,7,8\},$$
$$C=\{2,3,4,5,\cdots,100\}, \tag{1}$$

则 $A\subset B$, 但 $B\not\subset C$(即使C有 99 个元素，而B只有 5 个元素). 还有，对任意的集D, $\varnothing\subset D$, $D\subset D$.

1.2F. **定义** 若两个集正好包含相同的元素，则称这两个集相等.

因此，当且仅当 $A\subset B$ 且 $B\subset A$ 时才有 $A=B$(试验证之！).

注意，对于 1.2E 的(1)式中的 B 和 C，关系 $B\subset C$，$C\subset B$，$C=B$ 当中一个也不成立.

1.2G. 经常有这样的情况：在某一讨论过程中，所有的集 A，B，C，…是一个"大"集 S 的子集. 这时 $S-A$ 叫做 A(关于 S)的**余集**，括号内的附注有时可以略去. 例如，有理数集是无理数集(关于实数集)的余集. 若对于什么是 S 不致引起混淆，我们就记成 $S-A=A'$. 因此，A''(意即 $(A')'$)等于 A. 此外，$S=A\cup A'$. 参看图 4.

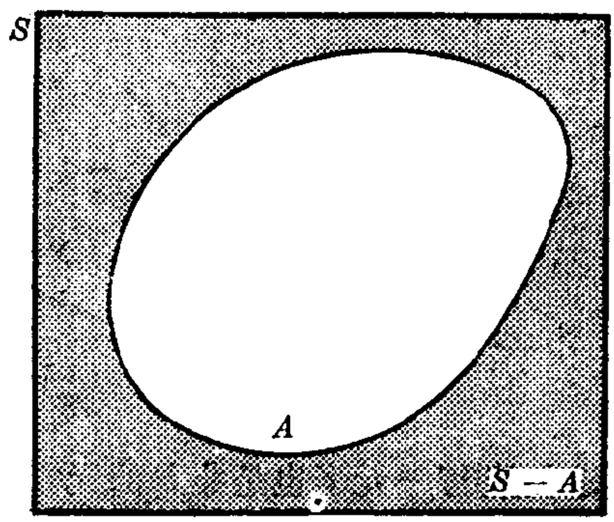

图 4

现在来证明我们的第一条定理.

1.2H. **定理** 若 A,B 是 S 的子集，则

$$(A\cup B)'=A'\cap B' \tag{1}$$

$$(A\cap B)'=A'\cup B' \tag{2}$$

这两个等式有时叫做德·摩尔根定律.

证：若 $x\in(A\cup B)'$，则 $x\notin A\cup B$. 因此，x 既不是 A 也不是 B 的元素，所以 $x\in A'$，$x\in B'$. 因此 $x\in A'\cap B'$. 这样就有 $(A\cup B)'\subset A'\cap B'$. 反之，若 $y\in A'\cap B'$，则 $y\in A'$，并且 $y\in B'$，所以 $y\notin A$，$y\notin B$. 因此 $y\notin A\cup B$，所以 $y\in(A\cup B)'$. 这样就有 $A'\cap B'\subset(A\cup B)'$. 这

就证明了(1).

等式(2)可按同样方法证明，或者也可以从(1)式如下推得：在(1)式中分别用 A', B' 代替 A, B, 因此 A', B' 就变为 $A''=A$ 和 $B''=B$. 这样就得到 $(A'\cup B')'=A\cap B$. 然后两端再取余集即得.

习题 1.2

1. 设 A 为 "trivial" 一字中诸字母的集, $A=\{a, i, l, r, t, v\}$. 设 B 为 "difficult"一字中诸字母的集. 试求 $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, $B-A$. 若 S 是所有 26 个字母的集，并有 $A'=S-A$, $B'=S-B$, 试求 A', B', $A'\cap B'$. 然后验证 $A'\cap B'=(A\cup B)'$.
2. 对于 § 1.1 习题 1 中的集 A, B, C, 试用几何方法描述 $A\cap B$, $B\cap C$, $A\cap C$.
3. 按上题要求，考虑 § 1.1 习题 2 中的集 A, B, C.
4. 对任意的集 A, B, C, 试证
$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$
这是集的并的结合律，并说明可写成 $A\cup B\cup C$, 毋须使用括号.
5. 对任意的集 A, B, C, 试证
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$
这是集的交的结合律.
6. 证明分配律
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
参看图 5.

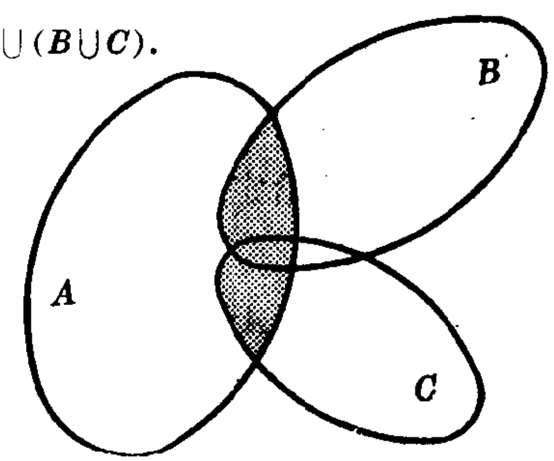

图 5

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

7. 证明
$$(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A).$$
8. 判断下列命题真还是不真(即对于所有的集 A, B, C, 证明其为真，或举一反例说明其不真)：
   (a) $(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$.
   (b) $(A\cup B)-A=B$.
   (c) $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)=A\cap B\cap C$.
   (d) $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$.