Guidance Series for Mathematics Majors

数学类专业学习辅导丛书

常微分方程学习指导书

王　克　潘家齐　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

Guidance Series for Mathematics Majors

数学类专业学习辅导丛书

常微分方程学习指导书

王　克　潘家齐　编

高等教育出版社

内容简介

本书是“常微分方程”这门课程的学习指导书。可以与高等教育出版社出版的，作者所编的《常微分方程（第二版）》（东北师范大学微分方程教研室编）教材配套使用。也可以单独使用。内容包括主教材各章内容的分析总结，解题的思路和技巧，以及主教材的习题详解。

本书适合于高等师范院校和其他高等学校师生使用，也适合于函授生和自学者使用。

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程学习指导书／王克，潘家齐编．—北京：高等教育出版社，2007.1
ISBN 978-7-04-020191-8

Ⅰ.常…　Ⅱ.①王…②潘…　Ⅲ.常微分方程－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 138031 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京宝旺印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2007年1月第1版
印　　张	7.75	印　　次	2007年1月第1次印刷
字　　数	190 000	定　　价	12.00元

物料号　20191-00

前　言

本书是“常微分方程”课程的学习指导书，配合作者所编的《常微分方程（第二版）》（东北师范大学微分方程教研室，高等教育出版社）教材，供学习这门课程的高等学校学生和担任这门课程的教师参考使用。也适合于广大立志自学成才的同志们参考使用。

本书内容主要包括主教材各章内容提要，学习目标，导学，疑难点解析，典型例题和主教材的习题同步解答。

本书提供了不少相关史料以帮助读者了解常微分方程这门学科的发展历史，从而更好地理解一些本学科重要的相关问题。

根据作者多年的教学经验，针对在学习中，学生容易产生的疑难问题，分别予以详细讲解。本书的典型例题是精心挑选的，并不限于主教材，着眼于把最重要的类型题和最重要的求解方法，或证明方法向读者讲解清楚。本书还选有选择填空题，供读者检验自己对知识和概念掌握的准确与否。在书后作者提供了两套课程的期末模拟考试题，一方面学生可以使用它们来检验自己对这门课程掌握的总体水平，另一方面，也可供担任这门课程的教师期末考试出题时参考。

对于本书所提供的主教材的习题同步解答，作者是心存疑虑的。作者的担心是，是否会有部分学生，因此而不去独立思考，认真完成教师所留的作业。所以在这里，作者愿意提醒本书的读者，特别是使用主教材的学生们：认真，独立，按时完成作业，是教学的重要环节。如果不经过自己充分的独立的思考，抄现成的答案来应付作业，学习的效果就会大打折扣，最后吃亏的还是自己。这部

分内容应该这样来使用,一是供读者在认真独立完成某道题后,来对照答案;二是当读者百思不得其解时,可以适当参考;三是供任课教师参考。也请教师们就此提醒学生们。毕竟保证这门课程的一个好的教学效果是我们大家,包括学生们的共同希望。另外考虑到这些解答应该对自学者有好处,因为他们没有老师为他们批改作业,辅导答疑。

本书所提供的典型例题和教材习题的同步解答的解法都不是唯一的,作者鼓励读者们用不同的方法去解答这些题。

限于水平,本书难免有大大小小的毛病,错误,恳请读者不吝指正。

感谢中山大学朱思铭教授对本书进行认真详细的审查,感谢高等教育出版社、东北师范大学和哈尔滨工业大学对本书写作的支持。

王克
哈尔滨工业大学(威海),数学系
潘家齐
东北师范大学,数学与统计学院
2006-5-13

目　录

第一章　初等积分法

1.1　内容提要

1.1.1　学习目标

1．了解常微分方程与解的概念，掌握方程类型的判别．

2．熟练掌握初等积分法中的变量可分离方程解法、常数变易法和全微分方程解法（含积分因子的解法），掌握参数法和降阶法．

3．掌握证明一阶线性微分方程解的性质的一般方法．

4．学会把实际问题抽象为常微分方程的基本方法．

1.1.2　导学

微分方程的古典内容主要是求方程的解．用初等函数或初等函数的积分通过有限次运算求常微分方程的解，叫作初等积分法．

初等积分法是在微分方程发展的早期产生的一种求解方法．虽然，这种求解方法有一定局限性，因为早在 1841 年，法国数学家刘维尔（Liouville）已证明绝大多数常微分方程不能用初等积分法求解．但是，初等积分法在微分方程的实际应用和理论研究中有重要的作用，至今不失其重要性，也是初学者的基本训练之一．

在本章学习过程中，读者首先要学会准确判断方程的可积类型，然后要熟练掌握针对不同可积类型的 5 种解法，总结一下初等积分法中各种解法的特点与内在联系，以提高自己的解题能力与

技巧.

1.1.3　内容小结

- 基本概念：

常微分方程，方程的阶，解，通解，特解，初值问题.

- 5 种基本解法与可积类型：

$$\text{分离变量法}\begin{cases}\text{显式变量可分离方程}\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)\\ \text{隐式变量可分离方程 } M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0\\ \text{齐次方程}\dfrac{dy}{dx}=g\left(\dfrac{y}{x}\right)\\ \text{可化为齐次方程的方程}\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+C_1}{a_2x+b_2y+C_2}\right)\end{cases}$$

$$\text{常数变易法}\begin{cases}\text{线性方程 } y'+p(x)y=f(x)\\ \text{伯努利方程 } y'+p(x)y=f(x)y^n(n\neq 0,1)\end{cases}$$

$$\text{全微分方程解法}\begin{cases}M(x,y)dx+N(x,y)dy=0\text{ 为全微分方程}\Leftrightarrow\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}\\ \text{通积分 } U(x,y)=\displaystyle\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy=C\\ \text{积分因子}\\ \qquad\mu(x)=e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}\\ \qquad\mu(y)=e^{-\int\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dy}\end{cases}$$

$$\text{参数法}\begin{cases}\text{类型 I，不含 } y \text{ 或 } x \text{ 的方程}\\ F(x,y')=0,F(y,y')=0\\ \text{类型 II，可解出 } y \text{ 或 } x \text{ 的方程}\\ y=f(x,y'),x=f(y,y')\end{cases}$$

$$\text{降阶法}\begin{cases}1.\ F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\cdots,y^{(n)})=0(k\geq 1)\\ 2.\ F(y,y',y'')=0\\ 3.\ \text{恰当方程}\end{cases}$$

- 一阶微分方程的应用问题.
- 应用变分法求泛函的极值问题.

1.2 疑难点解析

1.2.1 初等积分法简史

1676 年 Leibniz 在致 Newton 的信中，首次提出了“微分方程”这个名称. Leibniz 在 1691 年给出了一阶方程的变量分离法和齐次方程解法，一阶线性方程的解法和 Bernoulli 方程的解法也是由 Leibniz 分别在 1694 年和 1695 年完成的. 1733—1735 年，Euler 提出了全微分方程（恰当方程）和积分因子的解法以及通解、特解等概念. 1694 年，Leibniz 和 John Bernoulli 提出了等角轨线问题，而等角轨线与正交轨线的解法是 1715 年由 Newton 完成的. 这样，求解一阶方程的主要初等积分法到 1740 年都已清楚了.

1.2.2 不能用初等积分法求解的方程是否存在?

1686 年 Leibniz 向数学界提出求解一阶微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$$

的问题. 从形式上看，这个方程比较简单，但是大约经过 150 年的探索，直到 1838 年刘维尔才在理论上证明了上述方程不可能用初等（函数）积分法求解.

刘维尔的结果是:

命题 设里卡蒂方程

$$y'+by^2=ax^m, \tag{1.1}$$

其中 m,a,b 都是常数，且设 $b\neq 0$. 又设 $x\neq 0,y\neq 0$，那么在某一个用初等函数表达的变换下，微分方程(1.1)能够化到变量分离的形式当且仅当（即充分和必要条件）

$$m=0,\ -2,\frac{-4k}{2k+1},\frac{-4k}{2k-1}\qquad (k=1,2,\cdots).$$

证　对于这个命题中必要性的证明，由于用到的数学工具已超出本书的范围，所以这里就不证了．现在只证充分性：不妨令 $b=1$（为什么?）即得

$$y'+y^2=ax^m. \tag{1.2}$$

若 $m=0$，则有 $y'=a-y^2$，它是一个变量分离的方程；

若 $m=-2$，作变换

$$z=xy,$$

其中 z 是新的未知函数．由方程(1.2)推得

$$z'=\frac{1}{x}(a+z-z^2).$$

这也是一个变量分离的方程；

若 $m=\dfrac{-4k}{2k+1}$，作变换

$$x=\xi^{\frac{1}{m+1}},\quad y=\frac{a}{m+1}\eta^{-1}, \tag{1.3}$$

其中 ξ 和 η 分别是新的自变量和未知函数．由方程(1.2)推得

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}+\eta^2=\frac{a}{(m+1)^2}\xi^n, \tag{1.4}$$

其中 $n=\dfrac{-4k}{(2k-1)}$．再作变换

$$\xi=\frac{1}{t},\eta=t-zt^2, \tag{1.5}$$

其中 t 和 z 又是新的变量，则(1.4)变成

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+z^2=\frac{a}{(m+1)^2}t^l, \tag{1.6}$$

其中 $l=\dfrac{-4(k-1)}{2(k-1)+1}$．由此不难看出，方程(1.6)与方程(1.2)是属同一种类型的．比较

$$m=\frac{-4k}{2k+1} \quad 和 \quad l=\frac{-4(k-1)}{2(k-1)+1}$$

的差别,就可知道,只要上述过程重复 k 次后,就能把方程(1.2)化到 $m=0$(即得变量分离)的情形.

若 $m=\frac{-4k}{2k+1}$,此时只要注意到它属于方程(1.4)的情形.因此可以化到方程(1.2),从而化到 $m=0$(即得变量分离)的情形.

总结以上各种情形,就完成了命题中关于充分性的证明.

在方程(1.1)中取 $m=1$,即证明了 Leibniz 提出的方程

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$$

不可能通过初等变换求解.

1.2.3 关于通解的定义

在微分方程发展的早期,通解是作为一个方程全部解的共同表达式加以理解的.后来,在具体应用上遇到许多困难,首先,判断一个解的表达式是否已包含了方程的全部解是困难的,其次,这样的表达式是否一定存在也是一个问题.

1.1 节所给出的通解的定义,其主要功用在于,如果通解表达式存在,由于通解中的任意常数是独立的,这样对于一定范围内给出的初值条件,可以确定出初值问题解.

1.2.4 通解一定包含了全部解吗?

不是.例如 1.2 节中的方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

有通解 $y=\sin(\arcsin x+C)$,另外该方程还有常数解 $y=\pm 1$,不包含在通解中.

1.2.5 任何一个方程都有通解或通积分吗?

不是. 例如,方程 $y'^2+y^2=0$,只有解 $y=0$,而没有含任意独立常数的通解或通积分.

1.2.6 积分因子是否唯一

不是. 例如,考虑方程 $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$,显然它不是全微分方程. 但是,因为

$$\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2},\quad \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2},\quad \mathrm{d}\left(\ln\frac{x}{y}\right)=\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{xy},$$

$$\mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)=\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2},\quad \mathrm{d}\left(\ln\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\right)=\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2-y^2},$$

所以,$-\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2},\frac{1}{xy},\frac{1}{x^2+y^2},\frac{1}{x^2-y^2}$都是此方程的积分因子. 一般地,设 $\mu=\mu(x,y)$ 是方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{1.7}$$

的一个积分因子,于是存在二元函数 $u=u(x,y)$,有 $\mathrm{d}u=\mu M\mathrm{d}x+\mu N\mathrm{d}y$. 现对于 u 的任一连续函数 $f(u)$,由于

$$\begin{aligned}\mu f(u)(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)&=f(u)(\mu M\mathrm{d}x+\mu N\mathrm{d}y)\\&=f(u)\mathrm{d}u=\mathrm{d}F(u),\end{aligned}$$

其中 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的一个原函数,可见 $\mu f(u)$ 也是方程(1.7)的积分因子,因而方程(1.7)有无穷多个积分因子.

1.3 典型例题

1.3.1 计算题常用的技巧

一、交换 x 与 y 的地位

例 1 求方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}$$

的通解.

[**分析**] 这个方程表面上不像一阶线性方程,但是改写为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x-y^2}{y}$$

或

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2}{y}x-y,$$

就是一阶线性方程了.不过这里把 x 看作未知函数,y 看作自变量,即交换 x 与 y 的地位.

解 方程改写成

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2}{y}x-y, \tag{1.8}$$

对应齐次方程通解为 $x=Cy^2$. 现求形如 $x=C(y)y^2$ 的非齐次方程通解. 代入方程(1.8),得

$$C'(y)y^2+2yC(y)=\frac{2}{y}C(y)y^2-y,$$

化简得

$$C'(y)=-\frac{1}{y},$$

积分得

$$C(y)=-\ln|y|+C_1,$$

所以原方程的通积分是

$$x=y^2(C_1-\ln|y|).$$

二、引进适当变换

(1) 形如$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$的方程,若令 $z=ax+by+c$,则可将原方程化为变量可分离方程$\frac{dz}{dx}=a+bf(z)$.

例 2 求方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x+y+1$$

的通解.

解 令 $z=x+y+1$,则$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,原方程化为$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1+z$. 通解为 $z=-1+Ce^{x}$,原方程通解为

$$y=-2-x+Ce^{x}.$$

(2) 形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x}+f(xy)$的方程,令 $z=xy$ 可化为变量可分离方程$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=xf(z)$.

例 3 求方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x}-(4x^{2}y^{2}+1)$$

的通解.

解 令 $z=xy$,原方程化为变量可分离方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x(4z^{2}+1).$$

解之,再代回可得原方程通解

$$y=-\frac{1}{2x}\tan(x^{2}+C).$$

(3) 形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)+q(x)\mathrm{e}^{ay}$,常数 $a\neq 0$ 的方程,令 $z=\mathrm{e}^{ay}$可化为关于 z 的伯努利方程$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=ap(x)z+aq(x)z^{2}$.

例 4 求方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{x}+x\mathrm{e}^{y}.$$

解 令 $z=\mathrm{e}^{y}$,则$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{z}{x}+xz^2,$$

解之,再代回,得原方程通解为

$$y=-\ln(Cx-x^2).$$

(4) 形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xf\left(ax+b\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}$($a,b$ 是常数)的方程,令$z=\frac{y}{x}$,可化为$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f(ax+bz)$.

例 5 求方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+x\left(x+\frac{y}{x}\right)^2$$

的通解.

解 令 $z=\frac{y}{x}$原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(x+z)^2,$$

再令 $x+z=u$,化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1+u^2,$$

解之,再代回得原方程通解为

$$y=x\tan(x+C)-x^2.$$

三、将方程从微商形式改为微分形式,或从微分形式改为微商形式,有时可以把方程变为可解类型.

例 6 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y+2}{x+y^2+4}.$$

解 把方程改为微分形式

$$(x-y+2)\mathrm{d}x-(x+y^2+4)\mathrm{d}y=0.$$

因为$\frac{\partial M}{\partial y}=-1=\frac{\partial N}{\partial x}$,所以是全微分方程,取$(x_0,y_0)=(0,0)$得通积分为

$$\frac{x^2}{2}-xy+2x-\frac{y^3}{3}-4y=C.$$

例 7 求解方程

$$(\ln x+xy^2)\mathrm{d}x+2x^2y\mathrm{d}y=0.$$

解 显然$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$,原方程不是全微分方程.把原方程改写成微商形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\ln x+xy^2}{2x^2y} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{x}y^2-\frac{1}{x^2}\ln x,$$

令 $u=y^2$,将其化为一个线性方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{x}u-\frac{1}{x^2}\ln x,$$

解之,再代回得原方程通解为

$$y^2=\frac{C}{x}-\frac{1}{2x}\ln^2 x.$$

四、其他技巧

例 8 求解方程

$$y'(x-\ln y')=1.$$

[分析] 这是一个形如 $F(x,y')=0$ 的隐式方程,可用参数法求解.如何设定参数,没有统一方法,主要考虑参数化后的方程计算简便为准.当然,由于参数设定不同,所得到的解的表达式不同,但是在某个变换下,解的表达式是一致的.

解 [方法 1] 令 $y'=p$,则有

$$\begin{cases}x=\frac{1}{p}+\ln p,\\ y'=p.\end{cases}$$

由$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'$,有

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=p\left(-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}\right)\mathrm{d}p,$$