科学版

大学数学学习指导系列

概率论与数理统计
学习指导
——典型例题精解

葛余博 赵衡秀 编

- 联系紧密的基础知识
- 灵活多样的解题技巧
- 复习总结的理想读物
- 全面系统的考研辅导

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学学习指导系列

概率论与数理统计学习指导

——典型例题精解

葛余博　赵衡秀　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是为帮助大学本科生学习概率论与数理统计而编写的辅导书.全书分为七章,每章有内容提要,章内各节有内容精讲和典型例题,各章均有练习题和参考答案.主要有概率论的基本概念、随机变量(含向量)及其分布、随机变量的数字特征、极限定理、数理统计的基本概念、参数估计和假设检验.书后附有各种分布表.

本书适合于非数学专业的大学本科生.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导典型例题精解/葛余博,赵衡秀 编.北京:科学出版社,2003.8

(大学数学学习指导系列)

ISBN 7-03-011316-0

Ⅰ.概… Ⅱ.①葛… ②赵… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 022755 号

责任编辑:吕 虹/责任校对:宋玲玲

责任印制:安春生/封面设计:黄华斌 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2003年8月第一次印刷 印张:18 1/4

印数:1—3 000 字数:343 000

定价: 24.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

策划　俞正光　华　苏　吕　虹

微积分学习指导

——典型例题精解

编　华　苏　扈志明　莫　骄

线性代数与空间解析几何学习指导

——典型例题精解

编　俞正光　何坚勇　王飞燕

概率论与数理统计学习指导

——典型例题精解

编　葛余博　赵衡秀

序

数学是大学理工农医经济管理各专业非常重要的基础理论课程，学好数学是每一个大学生的强烈愿望，然而刚人大学的一年级新生面对大学数学中诸多抽象概念和方法，往往无所适从，望题生畏.最主要的表现就是不会做题，拿到一道题不能独立地形成解题的思路.为了帮助初学者很快适应大学数学学习的规律，掌握好大学数学的基本概念和基本方法，我们策划了这套由清华大学数学系的主讲教授编写的适合大学非数学类专业的数学辅导丛书，其中包括了大学数学中的三门核心课程：微积分（有的学校称为高等数学）、线性代数与空间解析几何以及概率论与数理统计.在每本书中，分别对各部分的基本内容进行综合与归纳；精选了数百道例题，分析解题思路、讲解如何运用基本原理和方法来解决问题.每章后面还附有相应的习题供大家练习，巩固学得的知识，以求取得举一反三的效果.

鉴于目前报考硕士研究生是很大一部分学子的愿望，其中包括应届生和已经工作若干年的在职生，他们虽然已经学过这些课程，但由于间隔多年，许多内容也需从头复习.我们在编写过程中，在讲解基本题的基础上，选择了相当数量的综合题，以满足这部分读者的需求.

总之，我们希望这套丛书的出版，对我们的读者掌握大学数学的基本思想和解题方法有所帮助，我们也衷心地欢迎读者对我们的丛书提出宝贵的意见，以便进一步改进我们的工作.

前　　言

依据非数学专业大学本科生概率论和数理统计的教学要求和硕士研究生入学考试大纲要求,基于在清华大学数十年的教学经验和辅导的积累,我们编写了这本学习兼考研辅导参考书.

随着社会科学技术的进步和研究的深入,概率论与数理统计起着越来越重要的作用.但概率论与数理统计的学习,因为其理论和方法的特殊性,长时间以来为学习者所苦恼,更是考研准备中的一大难题.众多的分布和繁杂的公式也常使有志者学得辛苦.

如何学好概率论与数理统计、如何提高学习的效率,本书做了如下一些努力,希望成为您学习和备考的好向导:

1. 注意基本概念和结论准确,特别注意彼此间内在联系和融会贯通,使学习更具启发性和主动性,从而克服在考研中较为流行的忽视基本概念和基本理论、埋头做题盲目做题的弊端.注重概念的深刻理解和相互之间的联系,实际上对概念和结论更容易把握和记忆——要记的其实更少了.这是立于不败之地并且高效率学习的关键之举.

2. 强化基本概型和规律性,为此增加重要分布律产生的背景,从而提高模型化能力和实用中准确判断和使用分布律的能力.

3. 全书分为七章,注意各章间的联系与综合.每章有内容提要,章内各节有内容精讲和典型例题,各章后有练习题和练习答案.

4. 为便于复习,在内容精讲中对重要的概念和方法做了总结.对少数定理和结论还列出了证明,因为证明的方法也是重要的解题方法,值得推荐;在选入例题选讲中的例题涵盖面广、技巧性强,并且对较为复杂或者有意义的例题都有技巧的分析或小结,既注意如何正确且迅速地切入问题,又注意积累经验和提醒容易出现的错误.

5. 为便于复习和记忆,本书将随机变量和随机向量合于一章.

6. 为叙述简洁、方便,本书文中还沿用一些记号,列于专页,也见于封底.

7. 本书概率论基础部分(前四章)由葛余博编写,统计部分(后三章)由赵衡秀编写.

限于编者水平及撰稿时间仓促,对书中的疏漏及错误,敬请读者批评指正.

主要符号表

凡例…

a.e.:几乎处处 a.s.:几乎必然	$\Leftrightarrow$:充要条件	$:=$,$=:$:记为
iid:独立同分布	df:分布函数	pdf:概率密度函数
rv:随机变量	$\overrightarrow{\mathrm{rv}}$:随机向量	$\sim$:服从(…分布)

分布与矩…

$B(n,p)$:二项分布	$\mathrm{Ge}(p)$:几何分布	$F(r,p)$:负二项分布
$P(\lambda)$:泊松分布	$\mathrm{Ex}(\lambda)$:指数分布	$\Gamma(r,\lambda)$:伽玛分布
$U_{(a,b)}$:均匀分布	$N(\mu,\sigma^2)$:正态分布	
$t(n)$:t 分布	$\chi^2(n)$:χ^2 分布	$F(n,m)$:F 分布
μ_k:k 阶矩(总体)	$\mu=(\mu_1)$:数学期望(总体)	σ^2:方差(总体)
M_k:k 阶矩(样本)	$\bar{X}=(M_1)$:均值(样本)	S^2:方差(样本)

目　录

第一章　概率论的基本概念

本章内容

§1.1　事件与概率

概率论的研究对象和内容 / 事件与概率的概念 / 事件与概率的性质

§1.2　有等可能性的两个概型

古典概型 / 几何概型

§1.3　条件概率与事件的独立性

条件概率的定义 / 条件概率的三个定理 / 事件的独立性

本章提要

1. 介绍概率论的两个最基本概念："事件"和"概率"的概念. 所谓事件，粗略地可视为实验的结果，而严谨定义基于集合论，使得事件间的关系和运算可借用集合的关系和运算. 概率的严谨定义则基于测度论，此后给出的概率的性质，说明它的简洁定义足以使其担当"量度"事件发生可能性大小的角色.

2. 介绍两个常见的有等可能性的简单概率模型（概型）：古典概型和几何概型. 前者是离散的，主要研究工具是排列和组合；后者是连续型的，主要工具之一是微积分.

3. 条件概率是概率概念的补充和发展. 基于条件概率而引入的三个重要公式（或定理），是重要的计算事件概率的依据，要熟练掌握.

4. 在数学中，"独立性"是概率论特有且重要的概念. 理解事件独立性的本源是刻画一个事件发生的概率大小不受另外事件的控制，而它常常与随机试验的独立性息息相关，这既有助于对事件独立性的判断，也有助于理解第二章中随机变量的独立性的本质，从而使概念间融会贯通，要记的公式既好记了也大大压缩了记忆量.

5. "事件"和"概率"的定义和性质，一般要求是会应用它们而不必清楚哪一条是定义哪一条是性质. 排列和组合的公式和变化甚多，主要掌握常用的公式和注意概率空间的选取. 几何概型和第二章的均匀分布产生背景，可结合一起复习. 而条件概率及其三定理和独立性，一般说是常考内容，必须深入理解和熟练掌握.

§1.1 事件与概率

[内容精讲]

1.1.1 概率论的研究对象和内容

“天有不测风云，人有旦夕祸福”，精练地概括了在自然界和人类的社会活动中广泛存在着随机现象.

概率论是研究随机现象的数量规律的数学分支.

著名的 Galton 钉板实验，就简单地揭示了在偶然现象中存在数量规律.

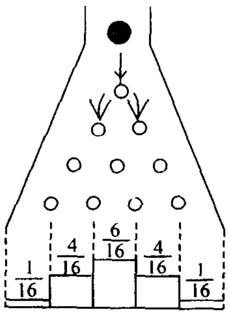

图 1.1.1 Galton 钉板实验

在一块平滑木板上如图 1.1.1 均匀钉上几排钉子，两侧钉有护栏，下方打上隔板，从左向右依次编号.将此板倾斜放置，上方置一均匀小球，可使其滚下.假设小球质量均匀，钉子光滑，且钉子间距离和护栏位置的选择，使得小球从上端或从上一排钉子间落下后必然碰到下一排钉子中的某一个，并且在假设的理想情况下，向右和向左落下的可能性各为一半，即 1/2.这样，从顶上放入的小球最后将落入哪个格子去都是可能的，实验的结果是偶然的、随机的.

但仔细分析不难发现：如果小球第一次碰钉后是向右落下(其可能性为 1/2)、第二次碰钉(第二排右方的钉子)后仍然向右落下，那么两次都向右的可能性便是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.类似地或说对称地，两次碰钉都是向左落下的可能性也是 1/4.而小球两次碰钉后从第二排中间空档落下的可能性则是$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

仿上，第三次碰钉后从 4 个空档落下的可能性，从左到右的分别为 1/8，3/8，3/8，1/8.以四排钉子为例，碰最后一排钉子后从 5 个空档落下，也即落入编号为 1 至 5 的 5 个格子的可能性则依次为 1/16，4/16，6/16，4/16 和 1/16.可见，表面看来是偶然性起作用的地方，确实有内在的数量规律可循.如果钉板的构造、小球质量和钉子的光滑程度不是那么理想呢？此时小球落下的规律，比如落入第 2 格的可能性大小，也仍然是客观存在的.我们可以通过重复实验用统计的办法找到：做 100 次、1000 次实验，你会发现小球落入第 2 格的频率，随着实验次数 n 增加，它愈来愈黏着，或者说当 n 趋于无穷时这个频率有极限，此极限就是落入第 2 格的概率.在极限定理中可以严格证明这个事实：频率的稳定性.

随机现象中事件发生的可能性大小是客观存在的，因此可以对它进行量度.量度的数量指标就是概率.这个理想条件下的钉板试验，小球落入 5 个格子的概率就

依次为 1/16,4/16,6/16,4/16 和 1/16.

概率论的任务就是研究和发现各种随机现象中的客观规律,并掌握它们为经济建设、生产管理和科学研究服务.随着生产和经济的发展,科学研究的深入,使概率论的理论和方法的研究和应用大步向前,反过来又有力地推动生产、经济和金融管理、科学技术以及军事理论和技术的发展.概率论自身也在日益丰富和深入,并且向各个基础学科渗透,出现随机分析、随机微分方程、随机运筹和随机服务系统等等,并且随机模拟和概率统计计算也应运而生.向工程科学渗透,出现随机信号处理、随机振动分析,与其他学科结合生长出生物统计、统计物理等边缘学科.它也是人工智能、信息论、控制论、随机服务系统(排队论)、可靠性理论和风险分析与决策等学科的基础.

概率论包括:概率论基础、数理统计和随机过程.本书基本不涉及随机过程.通过本书学习,能辅助理解随机数学处理和研究随机现象的主要思想和方法,掌握重要的随机规律,增强解题的能力.

"事件"和"概率"是概率论的两个最基本概念.所谓事件,粗略地可视为随机实验的结果,而严谨定义基于集合论给出,使得事件间的关系和运算可借用集合的关系和运算建立起来.概率的严谨定义则基于测度论,此后给出的概率的性质,说明它的简洁定义有丰富内涵,足以使其担当"量度"事件发生可能性大小的角色.由此构造出研究随机现象的严谨的概率空间,使概率论学科的发展有坚实科学的基础.

1.1.2　事件的概念和性质

Galton 钉板实验是一个随机试验.抛一枚硬币看它落地时是否正面朝上,在一批产品中随机抽取 10 个产品时抽到正品的次数,考察某厂流水线上电视机的寿命,都是随机试验.随机试验里最基本的不能再分解的结果叫基本结果,也叫**基本事件**.由若干基本结果组成的,我们称之为**复合事件**.基本事件和复合事件,泛称**事件**.特别地,包含所有基本结果的,称之为**必然事件**,它的反面,也认为是一个事件,就是**不可能事件**.称所有事件的全体为**事件体**.必然事件、不可能事件及事件体分别专记为 Ω、$\varnothing$ 及 $\mathscr{F}$.

例 1.1.1　在有两排钉子的 Galton 钉板实验中基本结果只有三个:小球落入第 1 格、第 2 格及第 3 格.它们也是基本事件.但像"小球落入前两格"、"小球落入第奇数格"就是复合事件.特别地,事件"小球落入第 1 至 3 格"是必然事件;它的反面,"小球不落入第 1 至 3 格"就是不可能事件.

如果用 $\{\omega_i\}$ 表示事件"小球落入第 i 格",$i=1,2,3$.那么上例中必然事件就是 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$,而基本事件为 $\{\omega_1\}$,$\{\omega_2\}$,$\{\omega_3\}$."小球落入前两格"这一事件现在可写为 $\{\omega_1,\omega_2\}$,此时事件体为

$$\mathscr{F}:=\{\Omega,\varnothing,\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_3\},\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_1,\omega_3\},\{\omega_2,\omega_3\}\} \quad (1.1.1)$$

如果我们只是关心小球是否落入第二格，即“小球落入第 2 格”的 $\{\omega_2\}$ 和“小球不落入第 2 格”的 $\Omega-\{\omega_2\}=:\overline{\{\omega_2\}}$. 则此时所有的事件便只有 4 个，事件体为

$$\mathscr{F}_1:=\{\Omega,\varnothing,\{\omega_2\},\overline{\{\omega_2\}}\}$$

我们看到 Ω 是一个非空点集，事件是 Ω 的一个子集，事件体是由 Ω 某些子集组成，是集合的集合. 上例中 Ω 是一个有限的点集，事件体可以全部列出来. 而在考察电视机寿命时，Ω 就是一个无限的点集了，它常是一个实数区间.

事件体的严谨定义一般不作要求，我们将它放在参考内容中(用 * 表示，而以◆表示该项内容的结束)，一般只要了解：

(1)事件体 $\mathscr{F}$ 是研究问题中的所有事件的全体；在 $\mathscr{F}$ 中*对有限多次及可列(无穷)多次(这两种情况常合称为“至多可列次”)的集合的并、交及求余运算都是封闭的*. 反之，由事件组成的一个集合，如果对这样的集合运算都是封闭的，就称为事件体.

(2)事件是样本空间的子集而是事件体的元素(点)，因此对任一事件 A，有 $A\subset\Omega$，而 $A\in\mathscr{F}$.

事件与事件体的定义及性质 *

下面利用抽象的集合论的概念，严格定义一般的事件和事件体 $\mathscr{F}$.

定义 1.1.1 设 $\mathscr{F}$ 是一个抽象的非空点集 Ω 的一些子集组成的集合，满足

F_1) $\Omega\in\mathscr{F}$.

F_2) 如 $A\in\mathscr{F}$，则 $\overline{A}:=\Omega-A\in\mathscr{F}$.

F_3) 如 $A_i\in\mathscr{F}$, $i=1,2,\cdots$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$.

则称 $\mathscr{F}$ 为事件体. 称 $\mathscr{F}$ 中的每一元素(点)为**事件**，Ω 为**必然事件**，事件 $\overline{A}$ 为 A 的**逆事件**. 空集合 $\varnothing$ 也为事件，称为**不可能事件**.

一般用大写英文字母表示事件. 由下面关于事件体性质的定理，说明如上定义的事件体 $\mathscr{F}$，**对至多可列次的集合的并、交及求余运算是封闭的**. 反之，由事件组成的一个集合，如果对这样的集合运算都是封闭的，就称为事件体.

定理 1.1.1 (1) $\varnothing\in\mathscr{F}$；

(2)如 $A_i\in\mathscr{F}$, $i=1,2,\cdots,n$，则 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{F}$；

(3)如至多可列个 $A_i\in\mathscr{F}$, $i=1,2,\cdots,n$，则至多可列次的交集 $\bigcap_i A_i\in\mathscr{F}$；

(4)如 $A,B\in\mathscr{F}$，则 $A-B:=A\cap\overline{B}\in\mathscr{F}$.

这样，基于集合论建立了“事件”这一概念，自然可以借用集合间的关系和运算来刻画现实中事件间的关系和运算. A、B 集合求交的运算常略 $\cap$ 不写，即 $AB:=A\cap B$. 在例 1.1.1 中，如果事件“小球落入前两格”记为 A，“小球落入第偶数格”记为 B. 那么在钉板入口处落下的一个小球，假如落入第 1 格，那就可以说事件 A 出现了. 当然也可说事件 B 未出现，用集合论中的表示法分别记为 $\omega_1\in A$ 和 $\omega_1\notin B$. 当然也有 $\omega_1\in A\overline{B}=A-B$. 而如果落下的小球进入第 2 格，则 $\omega_2\in A\cap B=$

AB,也即此时事件 A 和B 同时发生了.这样我们可以在集合间的关系和运算与事件间的关系和运算之间建立对应,列为表 1.1.1.

表 1.1.1

集合的关系和运算	事件的关系和运算
$\omega \in A$	事件 A 发生
$A \subset B$	事件 A 发生则事件B 必发生
$A \cup B$	事件 A 与事件B 至少有一个发生
$\bigcup_i A_i$	事件 A_i 中至少有一个发生
$A \cap B$ 或AB	事件 A 与事件B 同时发生
$\bigcap_i A_i$	所有事件 A_i 都同时发生
$A \setminus B$ 或$A-B$	事件 A 发生而事件B 不发生

事件的关系和运算可用图 1.1.2 表示,这种图叫 Ven 图.常称 $A \cup B$ 为A 与B 的**和事件**,而称 AB 为**积事件**.如果 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与B **互斥**,或**不相容**,有时也说**不相交**.如果 $A_iA_j=\varnothing$, $\forall\, i \neq j$,则说诸事件 A_i **两两不交**,此时将$\bigcup_i A_i$ 专记为 $\sum_i A_i$.

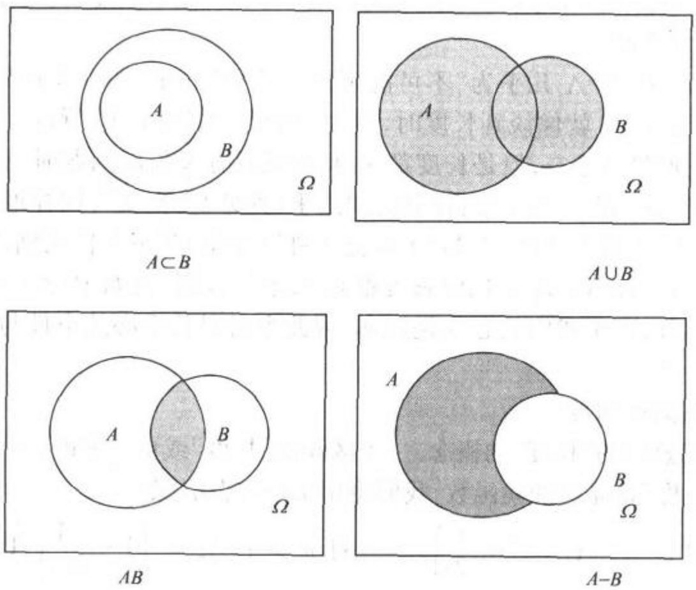

图 1.1.2　事件的关系和运算

至此,我们已经完成利用集合论,给出概率论中事件的严谨定义,并且利用集合论中集合间的关系和运算来刻画概率论中事件间的关系和运算.因此事件间的运算也有结合律、交换律、分配律,以及对偶原理:

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i},\qquad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i},$$

并且在概率论中将求和(事件)与求并等对应术语混用.

1.1.3　概率的概念和性质

我们常说"这事有百分之百把握","那事有七成把握"等等,都是用0到1之间的一个实数来表示事件发生的可能性的大小的.因此事件的概率值可以看成以事件(用集合论的话说,是集合)为自变量的一个函数值,它们在[0,1]之中.严格的定义如下.

定义 1.1.2　设 P 是在事件体 $\mathscr{F}$ 上定义的实值集函数,满足

P_1)非负性 $P(A)\geqslant 0,\forall A\in\mathscr{F}$;

P_2)规范性 $P(\Omega)=1$;

P_3)可列可加性　设 $A_i\in\mathscr{F},i=1,2,\cdots$,且两两不交即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j$.则

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

则称 P 为定义在事件体 $\mathscr{F}$ 上的**概率测度**,简称**概率**.称 $P(A)$是**事件 A 的概率**.

所谓测度,粗略理解为某种意义下度量的"尺子".概率测度,就是量度事件发生可能性大小的"尺子".

如 $P(A)=0$,称 A 几乎为"不可能事件".这里"几乎"的含义用集合论的话说,A 可以不是空集.就像谈到长度时,因为一个点的长度是0,所以$\{0\}$,$\{0,1\}$和$\{0,0.5,1\}$,它们虽然不空,但是长度都是0,在说到有关长度问题时,它们跟空集几乎没有不同.我们把这三个集合都称为"几乎(处处)为空集".同样地,在说到概率时,一个几乎"不可能事件"A 与"不可能事件"(空集)$\varnothing$也不作区别;类似地,谈到长度时,(0,1],[0,1)和[0,1]的长度都是1,不作区别,而如 $P(A)=1$,就称 A 为几乎必然事件,由于我们关心的是概率,因此今后对几乎必然事件与 Ω 也不作区分.

测度与可列可加性*

考察我们熟知的"长度"的概念.一个区间的"长度"或更一般的,一个实数点的集合 A 的"长度"是非负的集函数,我们将用 $L(A)$表示.令

$$\Omega=(0,1],\qquad A_1=\left(0,\frac{1}{2}\right],\qquad 对\ n>1,A_n=\left(1-\frac{1}{2^{n-1}},1-\frac{1}{2^n}\right].$$

易知 $L(A_n)=\dfrac{1}{2^n}$,注意诸 A_n 不交,且 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n=(0,1]$.又

$$\sum_{n=1}^{\infty}L(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1=L(0,1],$$

因此 $L\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}L(A_n)$，这就是可列可加性. 可见作为一个量度的尺度的概念，应该有可列可加性. 实际上 $\Omega=(0,1]$上的长度，是一个规范化($L(\Omega)=1$)的测度，从而(0,1]上的长度测度也可视为 $\Omega=(0,1]$上或者[0,1]上的概率测度.

[0,1]中的所有开区间，以及它们经过至多可列次的并、交及求余运算所能得到的一切点集合，放在一起，组成的一个类(集合的集合)，称为博雷尔集类，记为 $\mathscr{B}$. $\mathscr{B}$ 中的每个"元"，称为博雷尔集. 一个长度为 0 的集合的任何子集，也可认为都有长度 0. 但由于这些子集不一定是博雷尔集，这样我们把在 $\mathscr{F}$ 上定义的长度测度扩展了. 扩展了的长度测度叫做勒贝格测度，这种办法叫测度扩张，也叫测度的完备化. 概率测度也常仿此扩张而为完备化测度.

这样定义的"概率"，确实能够担当起刻画事件发生的可能性大小的数量指标的角色. 比如说，不可能事件的概率应该为 0，在定义中没有写明，能得到保证吗？又比如说，事件 B 如果包容了事件 A，即事件 A 发生必然导致事件 B 发生，那么 $P(A)$应该不大于 $P(B)$，等等. 下面给出的定理，保证这样定义的概率确实能够使这些应该有事实仍然是正确的，作为刻画事件发生的可能性大小的数量指标的概率，所有应有的结论，只要定义 1.1.2 中规定的条件满足，就都得到了保证.

定理 1.1.2(概率的性质)　设 P 是事件体 $\mathscr{F}$ 上的概率，则

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2) 有限可加性　设 $A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n$ 且两两不交，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i);$$

(3) 设 $A\in\mathscr{F}$ 则 $P(\bar{A})=1-P(A)$；

(4) 单调性　如果 $A\subset B$ 则 $P(A)\leqslant P(B)$；

(5) 连续性　设 $A_i(\in\mathscr{F})$单调，即 $A_i\subset A_{i+1}$ 或 $A_i\supset A_{i+1}, i=1,2,\cdots$，此时分别定义 $\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 或 $\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$，则

$$P(\lim_{n\to\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n).$$

可见定义 1.1.2 给出的概率的简洁定义，确实能够保证它作为刻画事件发生可能性大小的数量指标. 至此，对我们所观测的对象 Ω，定义了建基于集合论的事件体 $\mathscr{F}$ 和建基于测度论的概率(测度) P. 我们称三元体$(\Omega,\mathscr{F},P)$为**概率空间**，简记为 ps.

对 n 个不相交事件的和事件，其概率计算有如下一般加法公式.

定理 1.1.3(一般加法公式)　设 $A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n$ 则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=s_1-s_2+s_3+\cdots+(-1)^{n+1}s_n, \tag{1.1.2}$$

其中

$$s_1=\sum_{i=1}^{n}P(A_i),\quad s_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j),\quad s_3=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k),\cdots,$$

$$s_n=P(A_1A_2\cdots A_n).$$

这里 s_j 是这 n 个事件中每 j 个事件同时发生的概率和.

下面对 $n=2$ 证此定理,在 $n=3$ 时则图解这个公式.在一般 n 情形,可利用它们的思路,令 $B_n=A_n-\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i$,将相交的和化为不相交的和,从而利用归纳法和有限可加性可以证得,不再赘述.

$n=2$ 时

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1+A_2\bar{A}_1)=P(A_1)+P(A_2\bar{A}_1), \tag{1.1.3}$$

另一方面,由

$$P(A_2)=P(A_2A_1)+P(A_2\bar{A}_1) \text{ 知 } P(A_2\bar{A}_1)=P(A_2)-P(A_1A_2).$$

代入式(1.1.3),

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2). \tag{1.1.4}$$

此即 $n=2$ 时的式(1.1.2).

$n=3$ 时式(1.1.2)变为

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)=&\,P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\\&-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

从图1.1.3可以直观地得到上式的证明.事实上,如用 p_k 表示图1.1.3中对应的彼此不相交的第 k 个事件的概率,容易看到

$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=\sum_{i=1}^{7}P_i$;而式(1.1.5)右方的计算列表如下:

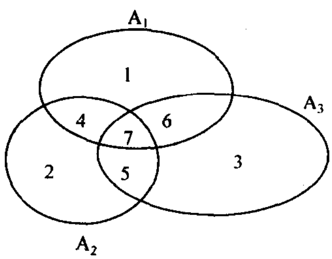

图1.1.3　图解加法公式

		p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
$+S_1$	$+P(A_1)=$	+			+		+	+
	$+P(A_2)=$		+		+	+		+
	$+P(A_3)=$			+		+	+	+
$-S_2$	$-P(A_1A_2)=$				−			−
	$-P(A_1A_3)=$						−	−
	$-P(A_2A_3)=$					−		−
$+S_3$	$+P(A_1A_2A_3)=$							+

表中"+"表示加上在第一行上此列对应的概率值,而"−"表示减去这个概率值.容易确认式(1.1.5)成立.

特别对两个事件的和,常用处理方法有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2)&=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2) &&\text{(一般加法公式)}\\&=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)\\&=P(A_2)+P(A_1\bar{A}_2) &&\text{(有限可加性)}\\&=P(A_1\bar{A}_2)+P(A_1A_2)+P(\bar{A}_1A_2) &&\text{(有限可加性).}\end{aligned} \tag{1.1.6}$$