



大美阅读·自然与人文系列

The Beauty of Mathematics

# 美妙的数学

吴振奎 著



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

· 北京科普创作出版专项资金资助 ·



The Beauty of  
Mathematics

# 美妙的数学

吴振奎 著



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

美妙的数学 / 吴振奎著. — 北京 : 北京大学出版社, 2014.1

(大美阅读·自然与人文系列)

ISBN 978-7-301-23528-7

I. ①美… II. ①吴… III. ①数学—青年读物②数学—少年读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第288096号

书 名: 美妙的数学

著作责任者: 吴振奎 著

丛书策划: 周雁翎

丛书主持: 陈 静

责任编辑: 陈 静

标准书号: ISBN 978-7-301-23528-7/O-0961

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路205号 100871

网 站: <http://www.pup.cn> 新浪官方微博: @北京大学出版社

电子信箱: [zyl@pup.pku.edu.cn](mailto:zyl@pup.pku.edu.cn)

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62767346 出版部 62754962

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

720毫米×1020毫米 16开本 12印张 8插页 200千字

2014年1月第1版 2014年1月第1次印刷

定 价: 35.00元

---

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有, 侵权必究

举报电话: (010) 62752024 电子信箱: [fd@pup.pku.edu.cn](mailto:fd@pup.pku.edu.cn)

# 前 言

美是自然（确切地讲是“自然的人化”），数学作为“书写宇宙的文字”（伽利略语）反映着自然，其中当然存在着美。

“美”是一个哲学概念。对于山水、风景、形体、相貌这类自然形成的事物，可以据社会文明进步程度、人类智力发展水平、大众审美观点的演化层次，再据多数人的审美观点直观评判其美与否；然而对文学、艺术、建筑、园林……这类带有人工雕琢痕迹的物件，人们再去欣赏它时，美与不美便是一种抽象的思维、判断过程了，比如欣赏艺术大师毕加索的晚年（立体派抽象）画作，不仅需要观赏者有较高的艺术修养，还要有抽象思维的能力，因为这类画作是将自然物像分解成几何块面，从而从根本上摆脱传统绘画的视觉规律和空间概念（也有人认为这是画家在四维空间作画，即将四维空间的物像用二维图形表现出来）。

显然能够读懂画作的人不会很多，如此一来，有人会觉得画作很美，但也有人认为画作不美甚至很丑（正如有人说“美其实是一种感觉”）。这正是“美学”这门学科所要研究的。

而数学美学研究的主要内容也包括探求数学中的现实美、抽象美、美的感悟和美的创造。

数学（特别是现代数学）作为自然科学的基础，工程技术的先导，国民经济的工具，其本身就具有许多美的特性，它们中的某些是形象、生动而具体的。比如数学的简洁性、抽象性、和谐性、奇异性等诸方面均展现着数学自身的美——这些一旦让人觉知，一旦被人认识，数学便有了新的希望与未来。数学正是在不断追求完美过程中孕育、创造并发展的。

对我来说，每一件事都变成数学。

——笛卡儿

宇宙就是哲学的全书。书写它的语言就是数学，所用文字就是三角形、圆和其他几何图形。

——伽利略

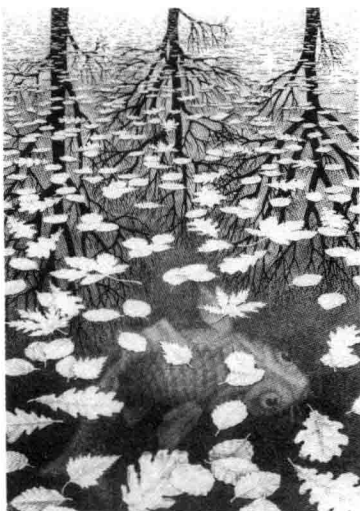
上帝创造世界时用了美的数学。

——狄拉克

印象派的批评是欣赏的批评。

——朱光潜





埃舍尔的《三个世界》是在几维空间作画的？



玛丽·泰瑞勒的画像（毕加索）。



窗边的女子（毕加索）。

▲ 读懂这些画作需要一定的艺术修养和较高的鉴赏能力；读懂某些数学公式，不是同样如此吗？

把数学，特别是现代数学中美的现象展示出来，再从美学角度重新认识，这不仅是对人们观念的一种启迪，同时可帮助人们去思维、去探索、去研究、去发掘、去创造。

数学中的一个结论（定理、公式、图形）、一种证明、一项计算、一份解答，如果看上去很美（简练、和谐、巧妙、生动……），差不多可以说它是正确的。这就是说：从美学角度探索数学中的一些现象，揭示其中的某些规律，往往可以得到一些研究数学的方法。

简言之，数学中的美需要揭示、探讨、挖掘，从而可看做是对美学乃至整个哲学自身的一种丰富，反过来美学方法又可指导数学学习和研究。

数学中的美的现象，很早就为一些大数学家（如毕达哥拉斯、高斯等）所关注，并提出过不少精辟、独到的见解，但遗憾的是他们未能有专门论著面世（我国古代数学家也从“趣味”角度，探讨过这类问题，虽然美包含着趣味，但“趣味”并不等于美）。

古希腊哲学家苏格拉底（Sokrats，公元前469—公元前399）认为：最有益的即是最美的。因而古希腊的美学是知识不可分割

数学家只有在他内心感到真实的美时才是完美的。

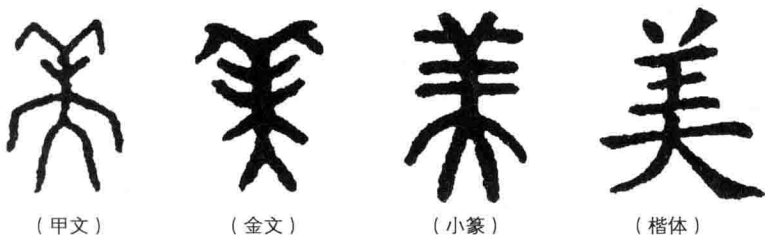
——科西

美的估定从来就没有一个公认的标准。

自然界的美又通过眼、耳等直接感受，而数学之美也像其他艺术、文学作品一样，需要通过心灵、思维琢磨，发幽探微。

没有数学，人们无法看穿哲学的深度；而没有哲学，人们也无法看穿数学的深度；而若没有两者，人们就什么也看不透。

——B. 德家里斯



▲在汉字中，“美”字是由“羊”、“大”合体构成的会意字，既可以理解为“羊大为美”，也可以理解为“人大健壮如羊”。但两种释义都可以归结出“美好”这一基本概念。从文字学角度讲，便叫做“美”字的本义。

的一部分，这恰恰由于当时许多学科的幼芽尚未从人类知识大树上长成独立的枝干。当时的哲人们还认为：（现实）美和宇宙之美是统一的。

毕达哥拉斯学派（请注意这是一个数学团体）认为世界是严整的宇宙，整个天体就是和谐与数。正是这个学派在研究音乐时最早使用了数学（他们试图提出一个声调对比关系的数学公式：八度音与基本音调之比为1：2，五度音等于2：3，四度音等于3：4，等等），这也是人们最早用数学方法研究美的实践与创始。

至于数学，在当今的科学分类研究中，许多学者称哲学和数学是普遍科学，且认为二者可应用于任何学科和领域，其差别在于刻画现实世界时使用的方法和语言不同：哲学使用的是自然语言，数学使用的是人工语言（数学符号）；哲学使用的是辩证逻辑方法，而数学使用的是形式逻辑与数理逻辑方法。这样哲学家有时可以“感觉到”思维的和谐，而数学家则有时可以“感觉到”公式与定理的和谐，即美。

无论从哪个角度来看，数学美都是一个值得探讨的话题。数学家库默尔（E. E. Kummer, 1810—1893）说：一种特别的美统治着数学王国，这种美与艺术美的相似性不如与自然美的相似性那么大，它反映了具有抽象能力的思想，它也会得到人们的欣赏，这一点很像自然中的美。

古希腊的亚里士多德（Aristotle，约公元前384—公元前322）认为：数学能促进人们对美的特性——数值、比例、秩序等的认识。

天下皆知美之为美，斯恶已；皆知善之为善，斯不善已。

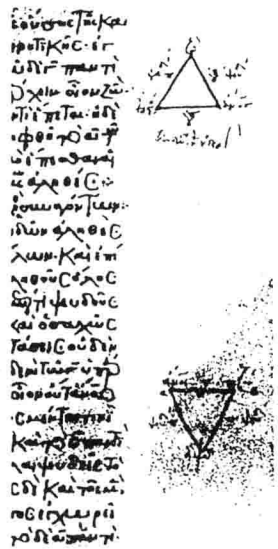
——孔子

社会的进步就是人类对美的追求的结晶。

——马克思

数学，如果正确地看，不但拥有真理，而且也具有至高的美。

——罗素



▲亚里士多德的数学手稿。

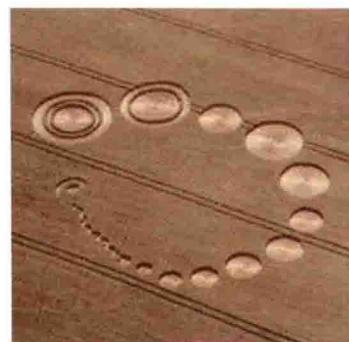
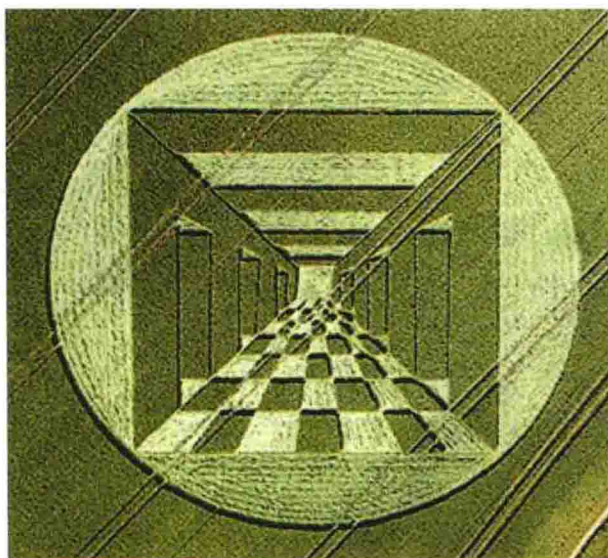
早在二十几年前，笔者便在思考数学之美到底美在哪里，同时留意“数学美”的文字与资料，只是自叹功力不及，始终未敢妄动。试想：这样一个宏大的课题，要用不太多的文字、在不太长的篇幅里将它全部（哪怕是一部分）展现出来，远非易事。

正如古希腊哲人苏格拉底所说：美是许多现象所固有的一个唯一的東西，它有最普遍的具体性，但美是难以捉摸的。

仰借“无知者无畏”的口舌，笔者曾斗胆撰写了《数学中的美》，于1997年由天津教育出版社出版，2002年修订后又由上海教育出版社再版印制，2012年哈尔滨工业大学出版社再次出版发行。

这次应北京大学出版社之邀承担此书的写作，鉴于丛书的要求，一切必须推倒重来。构思良久，始得框架，遂试图以数学实例去揭示数学潜在规律的同时，探索运用美学原理指导数学创造、发现的途径。如前所说，数学美的研究也是对美学自身的一种丰富。虽心里忐忑不安（因为一切要从零开始），但聊以自慰的是：我虽年迈但尚有精力和体力，而我会努力，且我在用心，加之还有北京大学出版社的鼎力支持，以及丛书的诸作者的勉励，更有编辑陈静女士的辅佐（书中不少图片皆系她提供），成稿之余，笔者首先深深感谢他们。如此一来，我的尽力纵然有瑕疵，即便是败笔，一切也许能够赢得读者的理解与宽容，倘若如此，便没有冷落我的劳动，足矣。

我们经常看到很多关于“麦田怪圈”的新闻和图片，有些人认为这是外星人的飞碟在着陆时形成的，更多的人则相信这些都是人类所为，并公布了很多制作方法。无论是谁的杰作，他们一定懂得几何知识。从这些故事中可见，数学的简洁与美妙，不仅可以为世界上各种文明社会所接受，而且可能成为宇宙间其他星球上的居民（如果存在的话）交流思想的工具。

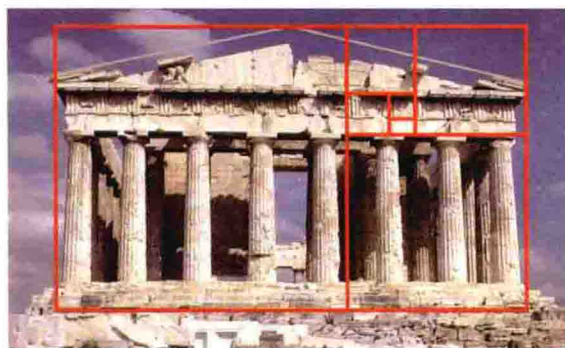
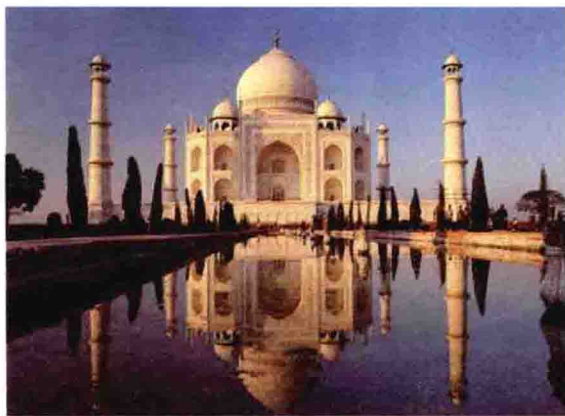


- |   |   |
|---|---|
| ① | ② |
|   | ③ |
|   | ④ |

- ① 2007年英国威尔特郡的三维立体“麦田怪圈”
- ② 2005年，出现在俄罗斯向日葵地里的“怪圈”
- ③ 2008年在韩国出现的“麦田怪圈”
- ④ 2006年在德国 Meensen 附近出现的“麦田怪圈”



0.618 被达·芬奇称为“黄金数”，而“黄金分割”则被天文学家开普勒赞为几何学中的“两大瑰宝之一”。事实上，黄金比值一直统治着古代中东地区和中世纪时期的西方建筑艺术，无论是古埃及的金字塔，还是古雅典的帕特农神庙；无论是印度的泰姬陵，还是巴黎的埃菲尔铁塔，这些世人瞩目的建筑都是运用黄金分割比例原理创作的伟大艺术品。



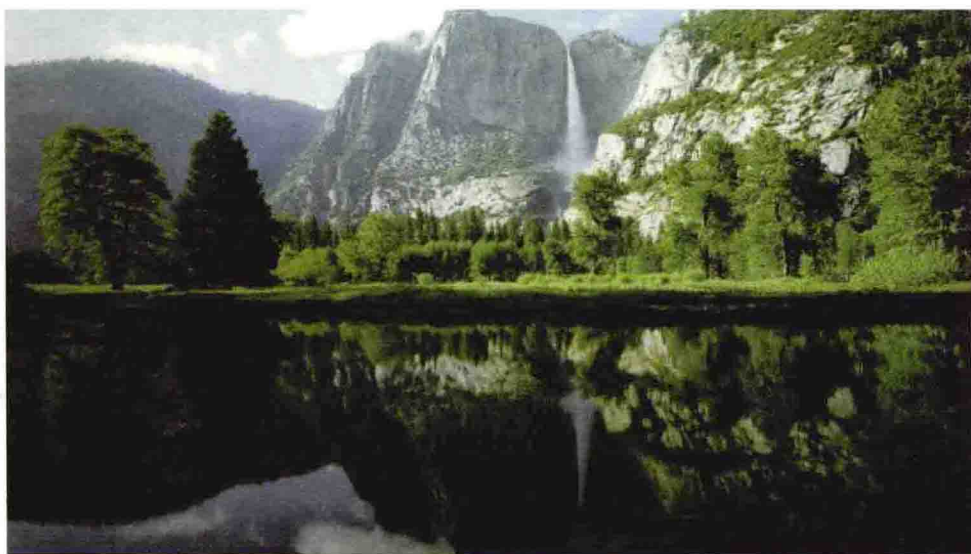
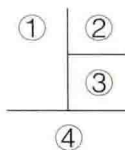
- |   |   |
|---|---|
| ① | ③ |
| ② |   |

- ① 泰姬陵
- ② 帕特农神庙
- ③ 埃菲尔铁塔

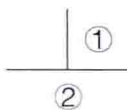
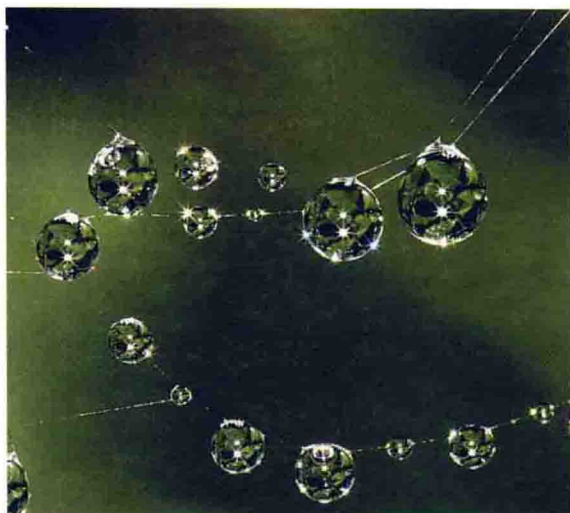
对称的概念最初源于几何，如今它的含义已远远超出几何范畴。德国著名数学家魏尔斯特拉斯说“美和对称紧密相连”。从建筑物外形到日常生活用品，从动植物外貌到生物有机体的构造，从化合物的组成到分子晶体的排布……其中皆有对称。



- ① 美国白宫的建筑外形也是对称的
- ② 美丽的昆虫看上去是对称的
- ③ 几何对称的剪秋萝
- ④ 倒影看上去是一种最生动的对称



诗人但丁曾赞美道：“圆是最美的图形”。从古至今，人们对圆有着特殊亲切的情感，都因为它的简洁与美妙。正如牛顿所说：“数学家不但更容易接受漂亮的结果，不喜欢丑陋的结论，而且他们也非常推崇优美与雅致的证明，不喜欢笨拙与繁复的推理”。



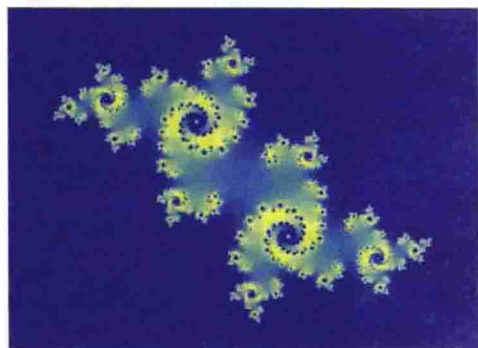
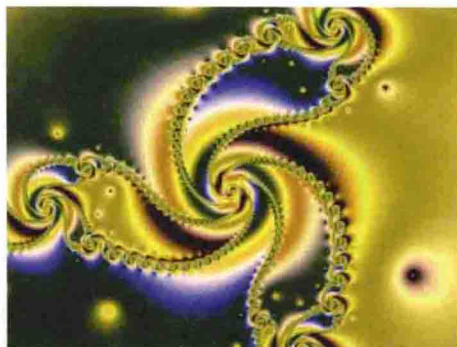
① 蜘蛛网上的水滴

② 沙滩艺术家 Andres Amador 的沙滩画作





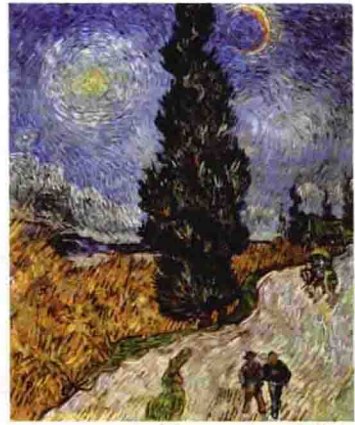
**分**形几何是美籍法国数学家芒德勃罗在 20 世纪 70 年代创立的一门数学新分支，它研究的是广泛存在于自然界和人类社会中一类没有特征尺度却有着相似结构的复杂形状和现象，它与欧氏几何不同。欧氏几何是关于直觉空间形体关系分析的一门学科，它研究的是直线、圆、正方体等规则的几何形体，这些形体都是人为的。但是，“云彩不是球体、山岭不是锥体、海岸线不是圆周”。许多相关的分形会产生漂亮的令人感兴趣的图形。美国著名物理学家惠勒说：“可以相信，明天谁不熟悉分形，谁就不能被认为是科学上的文化人！”





数学的本质是抽象，美国数学家卡迈查尔说：“数学家因为对发现的纯粹爱好和其对脑力劳动产品的美的欣赏，创造了抽象和理想化的真理。”

在印象派大师凡高的后期作品里，可以发现一些漩涡式的团（一直以来人们把这些漩涡看成是凡高的一种艺术表现形式，而据《泰晤士报》的报道，墨西哥物理学家乔斯·阿拉贡经过研究发现，这些漩涡与科学家用来描述湍流现象的数学公式不谋而合。）



- |   |   |
|---|---|
| ① | ② |
|   | ③ |

① 凡高作品《星星下有柏树的路》

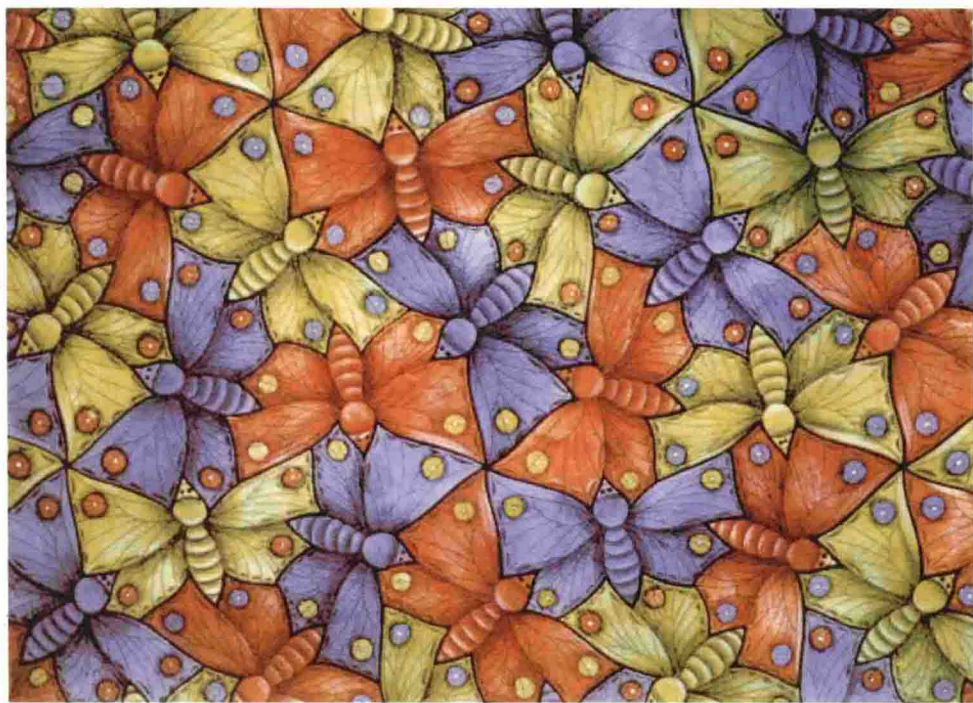
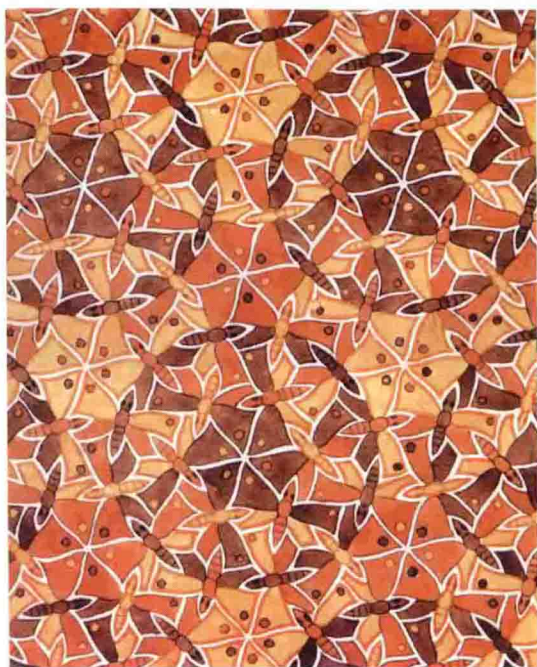
② 凡高作品《星空》

③ 数学大师欧拉

（他将著名的“七桥问题”抽象成图形，很快判断出要一次不重复地走遍哥尼斯堡的七座桥是不可能的。并于 1736 年将关于该问题的研究论文在圣彼得堡科学院宣读，促使了“拓扑学”这一数学分支的诞生。）



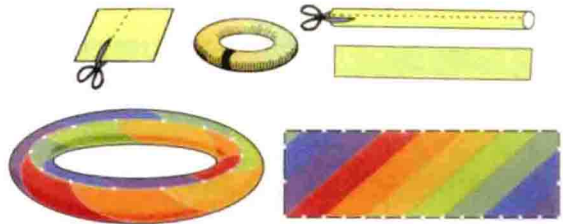
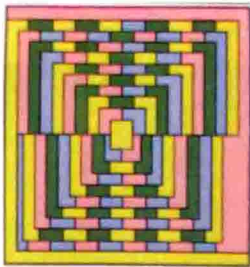
数学中“用有限来填满无限”是一个有趣的话题。20世纪70年代，英国物理学家彭罗斯开始尝试在一张平面上用不同的瓷砖铺设的问题。1974年，当他发表结果时，人们都大吃一惊。这种瓷砖的奇妙之处在于：用它们中的每一类皆可无重叠又无缝隙地铺满平面，同时铺设结构不具“平移对称性”，也就是说，从整体上看图形不重复。







直到莫比乌斯带的出现，人们对于正、反面概念有了新的认识（一张纸，一块布，可以根据它们的形状区分它的正面和反面，可现实生活中是否存在没有正、反面的曲面？）



- |   |   |  |
|---|---|--|
| ① | ② | ① 模仿莫比乌斯带而设计的儿童游戏  |
| ③ | ④ | ② 一只蚂蚁可以爬过莫比乌斯带的整个曲面而不必跨越它的边缘（这是拓扑学中的一个著名问题。这种永远不到头显然体现一种无穷，难怪有人认为，数学符号（无穷大）正是莫比乌斯带在平面上的投影。） |
|   |   | ③ 平面或球面上的地图只须 4 种颜色即可将图上任何两相邻区域分开（1878 年，数学家凯莱正式向伦敦数学会提出这一问题，人称“四色猜想”。图为数学家加德纳创作的四色地图。）      |
|   |   | ④ 早在“四色猜想”证明之前，数学家希伍德已证得环面上地图的“七色问题”   |

# 目 录

## 前 言

1

## 一、数，科学的语言

1

1. 数的历史 / 1

2. 数的趣味 / 14

3. 数的文化 / 22

附录 十个数码组成的问题 / 36

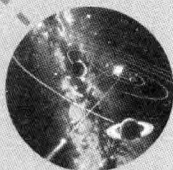
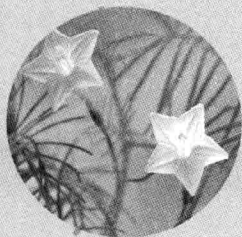
## 二、形，数的伴侣

45

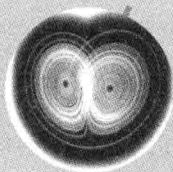
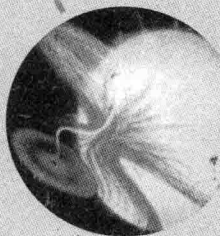
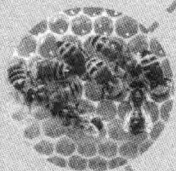
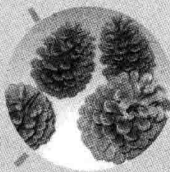
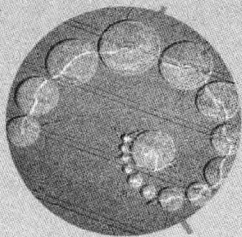
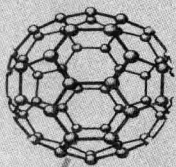
1. 形的魅力 / 45

2. 形的奥妙 / 56

3. 对称是一个广阔的主题 / 62







### 三、数与形，相得益彰

67

1. 用图形诠释数 / 67
2. 河图、洛书及其他 / 74
3. 数与图的剖分 / 79
4. 图形表现的另类多与少 / 87

### 四、曲线，大自然的写真

93

1. 奇妙的曲线 / 93
2. 怪异曲线引出的课题——分形 / 105

### 五、抽象，数学的灵魂

113

1. 简洁是数学抽象的表现形式 / 113
2. 令人惊讶的抽象 / 116
3. 数学的本质是抽象 / 118
4. 变换是数学抽象的一种升华 / 130
5. 抽象使数学家添上了隐形的翅膀 / 135

### 六、无穷，艰难的旅程

143

1. 无穷之旅 / 143
2. 数学中的有限 / 152
3. 用有限来表现无限 / 158
4. 由无穷产生的有限 / 169
5. 无穷的大小与集合论产生 / 173
6. 无穷带来的麻烦与机会 / 176