高等学校教材
GAODENG XUEXIAO JIAOCAI

运筹学基础与应用

主编 廖 敏

南京大学出版社

高等学校教材

GAODENG XUEXIAO JIAOCAI

运筹学基础与应用

主 编 廖 敏

南京大学出版社

内容提要

本书共八章，内容包括运筹学的几个主要分支：线性规划、整数规划、非线性规划、动态规划、图与网络分析和对策论等. 书中主要介绍运筹学的基本概念、理论和方法以及在经济和管理工作中的应用. 全书在编写过程中着眼于实践，着重介绍实用和有趣的模型和方法，配以计算实例，主要讲清原理和步骤，而对数学基础要求较高的证明予以忽略；论述上深入浅出，文字上通俗易懂. 除此之外，还介绍了 LINDO 软件包与利用 Excel 求解线性规划问题的方法，利用这些工具可以很容易地实现各种算法，从而避免了枯燥的程序设计工作. 每章后面附有习题，并在书的最后给出习题答案.

图书在版编目(CIP)数据

运筹学基础与应用 / 廖敏主编. —南京：南京大学出版社，2009. 6

高等学校教材

ISBN 978-7-305-06148-6

Ⅰ. 运…　Ⅱ. 廖…　Ⅲ. 运筹学—高等学校—教材

Ⅳ. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 082809 号

出 版 者　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　邮　编　210093
网　　址　http://www.NjupCo.com
出 版 人　左　健

丛 书 名　高等学校教材
书　　名　运筹学基础与应用
主　　编　廖　敏
责任编辑　吴　华　　编辑热线　025-83592146

照　　排　南京玄武湖印刷照排中心
印　　刷　南京溧水秦源印务有限公司
开　　本　787×1 092　1/16　印张 17.25　字数 439 千
版　　次　2009 年 6 月第 1 版　2009 年 6 月第 1 次印刷
印　　数　1～2 000
ISBN　978-7-305-06148-6
定　　价　29.50 元

发行热线　025-83594756
电子邮件　sales@NjupCo.com
　　　　　press@NjupCo.com

前　言

运筹学是应用数学的一门新兴学科，在工程技术、经济管理等领域有着重要的应用，也是大学理工科和经济管理专业的重要课程.

本书是根据编者多年的运筹学教学实践经验，为适应现代高等学校教学需要而编写的. 它包括运筹学的几个主要分支：线性规划、整数规划、动态规划、非线性规划、图与网络分析以及对策论等. 书中主要介绍运筹学的基本概念、理论和方法以及在经济和管理工作中的应用. 全书在编写过程中着眼于快速入门，力图将晦涩的证明通过应用实例和有趣的模型展示出来，便于读者掌握；对数学基础要求较高的证明予以忽略，避免了基础理论学习过程中常见的枯燥乏味；论述上深入浅出，文字上通俗易懂；每章后面附有一定量的思考题与难度适宜的习题，其目的是加深读者对所学概念的理解以及对所学知识的巩固. 书的最后给出了每一章的习题答案.

除此之外，为结合现代计算机技术的发展，本书对 LINDO 软件包作了简单介绍，附录 1 中附有 LINDO 软件命令的详细注释，附录 2 介绍了利用 Excel 求解线性规划问题的方法，利用这些工具可以很容易地实现各种算法，从而避免了枯燥的程序设计工作. 这是本教材有别于其他教材的地方. 本书可用作高校理工经济管理类的运筹学教材，也可作为应用数学工作者的参考用书.

本书由廖敏担任主编，参加本书编写工作的有贵州大学理学院袁明志、彭定涛、廖敏，贵州大学研究生院贯文生. 袁明志编写第 4 章、第 7 章和附录 2，并参与第 8 章编写，第 3 章由彭定涛编写，第 5 章由贯文生编写，其他章节由廖敏编写，全书统一定稿工作也由廖敏承担.

本书由贵州大学理学院杨辉教授主审，参加审稿的还有曹素元教授、向淑文教授和周国利教授. 审稿的同志都认真审阅了原稿，并提出不少宝贵的改进意见，在此我们表示诚挚的谢意.

限于编者水平有限，书中一定存在不妥之处，希望广大读者指正.

编　者

二〇〇九年二月

目　　录

绪　论

运筹学是近几十年发展起来的一门新兴学科，是管理、经济和现代管理方法的重要组成部分．它主要运用数学方法为决策者作各种决策提供科学依据，因此，运筹学是实现管理现代化的有力工具．它广泛应用在生产管理、工程技术、军事作战、科学试验、财政经济以及社会科学等各个方面，是工业经济、经济管理、工商管理等专业的一门重要基础课．

0.1　运筹学的起源与发展

运筹学(Operational Research or Operations Research)是一门在第二次世界大战期间发展起来的新兴学科，当时英国为了应用雷达探测德国飞机对本土的空袭，集中了一些自然科学家，如物理学家、数学家、天文学家等，与军人组成作战研究小组，称之为“运用研究”(Operational Research)小组，专门研究防空作战问题．由于研究成果显著，所以将其推广到作战的其他领域(如运输船队的护航、反潜作战中深水炸弹的爆炸深度等问题)，均取得了良好效果，形成了早期的运筹学思想．不久以后，美国亦在军队内成立类似的研究小组，称为 Operations Research(简称 OR)．

二次大战结束后，OR 小组的一部分人仍留在军事部门继续从事战略、战术及武器运用等研究，而另一部分人则转到经济部门、机关学校及科研单位，将运筹学思想和方法逐步向非军事领域扩展，使得这门学科得到充实和发展．1945 年到 50 年代初，被称为运筹学的创建时期；50 年代初期到 50 年代末期，被称为运筹学的成长时期，此阶段的特点是电子计算机迅速发展，使运筹学中一些方法，如单纯形法、动态规划方法等在计算中得到应用，解决了管理系统中的优化问题，促进了运筹学的推广和应用；60 年代以后，被认为是运筹学开始普及和迅速发展时期，此阶段的特点是运筹学根据各行各业的不同特点，进一步细分为许多分支．

1948 年英国首先成立运筹学学会，接着 1952 年美国也成立了运筹学学会，以后许多国家，例如，法国(1956 年)、日本和印度(1957 年)，相继也成立了类似的组织．到 1986 年止，国际上已有 38 个国家和地区成立了运筹学学会或类似的组织．我国在 20 世纪 50 年代中期由许国志、钱学森等教授引进了这门学科，在各大学推广，并取得了一定成果．1959 年由英、美、法三国发起成立了国际运筹学联合会(International Federation of Operations Research Societies)，简称 IFORS，以后各国运筹学会纷纷加入．我国 1980 年成立全国性运筹学学会，于 1982 年加入国际运筹学联合会．

实际上，运筹学中的问题大都是在社会实践中产生的，朴素的运筹思想在我国古代文献中就有记载，我国战国时期齐王赛马与北宋时代丁渭主持修复皇宫等事就是其中的典型例子．齐王赛马的故事是说一次齐威王与田忌赛马，规定双方各出上、中、下三个等级的马各一匹．如果按同等级的马比赛，齐王可获全胜，但田忌采取的策略是以下马对齐王的上马，以上马对齐王的中马，以中马对齐王的下马，结果田忌反以二比一获胜．而丁渭主持修复工作是让人在大街取土烧砖，挖成大沟后灌水成渠，利用水渠运来各种建筑材料，工程完毕后再以废砖乱瓦等填沟修复大街，做到减少和方便运输，加快了工程进程．事实上，运筹学就是运用数学方法研究各种系统的优化途径和优化方案．

0.2 运筹学研究的基本特征与工作步骤

1. 运筹学研究的基本特征

(1) 系统的整体观念　运筹学的研究是建立在科学的基础之上的,它不仅仅涉及数学,还要涉及经济、管理、系统工程、工程物理等其他学科,并用系统的观点来进行分析,它着眼于整个系统,而不是一个局部,是尽量把有关的各种主要因素和条件全部考虑到,然后再去考察问题,强调总体效果,而不是局部最优.如一个企业的经营管理,它包括生产、技术、供应、销售、财务等,各子系统的好坏,直接影响企业管理的好坏.

(2) 多学科的综合　用运筹学方法解决实际问题时,除了熟悉与研究对象相关的知识外,还要运用恰当的数学方法和计算机技术,通过多学科的协调配合,建立起适宜的模型,使得问题得以很好地解决.这种多学科的综合,在研究初期,在分析和确定问题方面,在选择或探索解决问题的途径时,都显得特别重要.

(3) 模型方法的应用　运筹学是以实际问题为分析对象,通过问题的性质、要求与限制,利用数学方法抽象出其模型,以便达到优化系统的目的.但更重要的是所得结果要能被实践检验,并被用来指导系统的运行.

2. 运筹学的工作步骤

(1) 理清问题、明确目标　首先应将所要解决的问题弄清楚,包括问题所在、目标要求、条件限制、前提假设以及各种决策方案等,然后把问题表述出来.

(2) 收集数据和建立模型　模型是对客观事物、现象、过程的简化描述,是对实际问题的抽象概括和严格的逻辑表达.模型分为形象模型、数学模型和模拟模型,模型的正确建立是运筹学研究中关键的一步,它是将实际问题、经验、科学方法三者有机结合的创造性的工作.这里的建模是选择建立数学模型,即把要解决的问题用数学语言描述出来.但有时问题中的各种关系难以用数学语言描绘,或问题中包含的随机因素较多,此时可以建立模拟模型,即用逻辑框图的形式把问题表示出来.

(3) 求解模型　用各种手段(主要是数学方法或编写计算机程序或软件)对模型求解,解一般分为最优解、次优解、满意解.根据解的精度的要求及算法上实现的可能性,又可将解区分为精确解和近似解等.

(4) 解的检验和灵敏度分析　首先应检查求解步骤和程序有无错误,然后检查解是否符合现实问题.如出现问题,应分析问题所在,必要时要对模型或解法进行修改.

(5) 解的有效控制　根据灵敏度分析的方法,确定出最优解保持稳定时的参数变化范围.如果参数变化超出这个范围,及时对模型和导出的解进行修正.

(6) 方案的实施和不断优化　方案实施是最关键的一步,但也是最困难的一步.只有方案实施后,研究成果才能有效.这往往就要考虑到实施中可能遇到的阻力,并为此制订相应的克服困难的措施.

上述过程往往需要反复进行.若要深刻领会各类模型的建立过程,必须对实际问题进行分析,并且阅读大量应用运筹学的成功案例,这样才能掌握应用运筹学研究问题的科学方法.

0.3　运筹学的主要分支

运筹学根据所解决问题性质的不同，将实际问题抽象出不同类型的数学模型，这些不同类型的数学模型构成运筹学的以下各个分支：

1. 线性规划(linear programming)

线性规划主要研究两类问题：一类是给定资源，研究如何运用这些资源更好地完成任务；另一类问题是如何统筹安排，尽量用最少的资源去完成给定的任务. 事实上，这是一个问题的两个方面.

2. 非线性规划(nonlinear programming)

在一个规划问题的目标函数和约束条件中，至少有一个方程是决策变量的非线性函数，这类规划问题称为非线性规划，是运筹学的重要分支之一，由于它不断提出各种算法，因此其应用范围越来越广泛.

3. 动态规划(dynamic programming)

动态规划是解决多阶段决策过程最优化的一种数学方法. 它是根据多阶段决策问题的特点，把多阶段决策问题变换为一系列相互关联的单阶段问题，然后逐个加以求解.

4. 图论与网络分析(graph theory and network analysis)

图的理论和方法，就是从形形色色的具体的图及有关的实际问题中，抽象出它们的共同特性，从中找出其规律和性质，以便用于解决实际问题. 图是网络分析的基础.

5. 存贮论(inventory theory)

人们在生产活动或日常生活中往往需要把所需的物资、食物或日用品暂时储存起来，以备日后使用或消费. 存贮论就是一种研究最优存贮策略的理论和方法.

6. 排队论(queuing theory)

排队论又称为随机服务系统或等待线理论，是研究各种排队现象的理论. 生产和生活中存在大量有形和无形的拥挤和排队现象，排队论就是要揭示各种拥挤现象的排队系统的概率规律性，并借助统计推断的方法来解决有关排队系统的最优化问题.

7. 对策论(game theory)

对策论也称博弈论或竞赛论，是研究具有对抗或竞争性质现象的数学理论和方法. 它既是现代数学的一个新分支，也是运筹学的一个重要分支.

8. 决策论(decision theory)

决策论是在应用数学和统计原理相结合的基础上发展起来的. 最早产生的决策内容是经济批量模式、盈亏临界点分析、边际分析和产品质量的统计决策方法等，以后由于运筹学的发展和计算机的深入应用，使得人们从经验决策逐步过渡到科学决策，产生了自成体系的决策理论.

0.4　运筹学与管理科学

运筹学，也称为最优化理论，一般认为它的诞生有三个来源：军事、管理和经济，但其中管

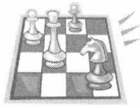
理是孕育运筹学的主要土壤,因此有的领域将运筹学称为管理科学.它广泛应用于工业、农业、交通运输、商业、国防、建筑、通信、政府机关等各个部门、各个领域,主要解决最优生产计划、最优分配、最佳设计、最优调度、最佳管理等最优决策问题.掌握优化思想并善于对遇到的问题进行优化处理,是企业领导或各级各类管理人员必须具备的基本素质.学习运筹学就是要学会如何根据实际问题的特点,抽象出不同类型的数学模型,然后选择好的方法进行计算.

运筹学这门学科,无论从管理科学的发展来讲,还是从管理科学的研究来讲,都是必不可少的,如运筹学的一些分支:规划论、排队论、存贮论等,与管理科学都有密切的关系.管理科学的研究,是运筹学研究提出问题和对问题进行定量分析的依据和基础.而运筹学是在对问题分析的基础上找出各种因素之间的数量关系,然后对问题建立模型并求解,进而使人们更为了解管理问题的规律性.

运筹学作为培养高级管理人员的学科,是十分重要的.首先它可以培养管理人员的逻辑思维能力,运筹学方法中的六个步骤可以锻炼人观察问题和归纳问题的能力,辨别问题中的可控因素和非可控因素,弄清问题的主要结构和相互关系.其次运筹学在求解过程中还可培养管理人员对问题的直觉洞察,即当面对一个问题时能很快对问题作出一个大概的判断,对问题可能的结局有个大致预见.这两方面的训练可以提高管理人员的素质.

总之,运筹学作为经济、管理同数学密切结合的一门学科,虽然它的诞生只有六十多年,属于一门年轻的学科,且现有的分支、理论和方法远远不能满足描述复杂的管理规律的需要.但可以预测,管理科学的发展将为运筹学的进一步发展开辟更加广阔的领域,而运筹学的发展必将能解决管理科学中越来越多的问题.

第 1 章



线性规划及单纯形法

线性规划(linear programming),简称 LP,是运筹学的一个重要分支.自从 1947 年,美国学者丹捷格(G. B. Dantzig)提出了线性规划的单纯形法和许多相关理论后,线性规划就成了经济学家分析问题的重要工具.前苏联学者康托洛维奇在这方面贡献尤为突出,他与科普曼联合发表的《最佳资源利用的经济计算》获得了 1975 年诺贝尔经济学奖.随着电子计算机的迅速发展,线性规划已广泛应用于工业、农业、商业、交通运输、经济管理和国防科技等各个领域,成为现代化管理的有力工具之一.

本章首先通过几个实例引入线性规划问题,建立其数学模型.在此基础上给出解的基本概念及求解线性规划的方法——图解法,并给出线性规划解的几何解释.而后讨论线性规划的单纯形法、大 M 法及二阶段法.最后对运输问题及用 LINDO 软件求解线性规划作简单介绍.

1.1 线性规划问题及其数学模型

1.1.1 问题的提出

在生产管理和经营活动中,经常会遇到这样两类问题:一类是如何合理利用有限资源,以获得最大的效益;另一类是为了达到一定的目标,应如何组织生产或合理安排工艺流程以使消耗资源为最少.这都是规划问题,下面举几个例子.

【例 1-1】 营养配餐问题.

设有 A、B 两种食品,含有每天所需的成分 C 和 D,某幼儿园幼儿每天至少需要营养成分 C 和 D,分别为 2 和 3 个单位.食品 A 和 B 的成分和单价见表 1-1 所示,试设计该幼儿园花钱最少的食谱.

表 1-1

营养成分 \ 食品	A	B
C	1	2
D	3	1
单价(元/单位)	1	1.5

解 设该幼儿园每天购买的食品 A,B 分别为 x_1,x_2 单位,费用为 z,由幼儿每天所需营养的最低限度可得

$$x_1 + 2x_2 \geqslant 2;$$

$$3x_1 + x_2 \geqslant 3.$$

在满足所需营养的条件下,问题是还需使费用 $z = x_1 + 1.5x_2$ 取得最小值,则综合起来可得

$$\min z = x_1 + 1.5x_2.$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geqslant 2; \\ 3x_1 + x_2 \geqslant 3; \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases} \qquad (1-1)$$

上述数学表达式就是该营养问题的数学模型,属于优化问题.其中 $\min z$ 是决策者追求的目标,称为目标函数.用于描述限制条件的数学表达式称为约束条件,符号 s. t.(是 subject to 的缩写)意为约束于,它表示决策者行为所受的限制.

下面介绍建立实际问题数学模型的基本步骤:

第一步 确定决策变量.决策变量是模型中最重要的因数,是模型所要决定的未知量,如果选取得当,不仅会使线性规划的数学模型建得容易,而且方便求解.

第二步 确定目标函数.目标函数是线性规划的重要组成部分,是决策者追求的目标,它把实际问题所要达到的目标用决策变量的线性函数表示,并确定是最大值还是最小值,从而决定线性规划的优化方向.

第三步 确定约束条件.找出所有限制条件,并用决策变量的线性等式或不等式来表示,从而得到约束条件,即约束条件是含有决策变量的等式或不等式.

第四步 根据实际问题确定变量是否有非负的约束.

【例 1-2】 资源利用问题.

某工厂计划期内要安排生产甲、乙两种产品.已知生产产品所获的利润与所需的劳动力、设备台时及原材料的消耗见表 1-2 所示.问应如何安排生产,方可使该厂获利最大?

表 1-2

	甲	乙	可用资源
劳动力/工时	0	5	15
设备/台	6	2	24
原材料/kg	1	1	5
利润/元	2	1	

解 建立数学模型:设该厂在计划期内生产甲、乙两种产品的数量分别为 x_1 和 x_2,则该问题的目标函数

$$\max z = 2x_1 + x_2.$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}5x_2 \leqslant 15; \\ 6x_1 + 2x_2 \leqslant 24; \\ x_1 + x_2 \leqslant 5; \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0.\end{cases} \tag{1-2}$$

【例 1－3】 合理下料问题.

某铁器加工厂要制作 100 套钢架，每套要用长 2.9 m，2.1 m，1.5 m 的圆钢各一根，已知原料长 7.4 m，问应如何下料，可使所用的材料最省？

解 建立数学模型：根据经验分析，可将各种下料方案列出来，见表 1－3 所示.

表 1－3

长度/m \ 方案	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
2.9	1	2	0	1	0
2.1	0	0	2	2	1
1.5	3	1	2	0	3
余料/m	0	0.1	0.2	0.3	0.8

假设按方案Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，下料的原料根数分别为 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5，而合理下料是使剩余料的总长度最小，则该下料问题的数学模型为：

$$\min z = 0x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5.$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1 + 2x_2 + x_4 = 100; \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 100; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 100; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \text{ 且为整数}.\end{cases} \tag{1-3}$$

在后面 § 1.5.2 的二阶段法中将给出该问题的最优下料方案.

上述三个例子都属于约束最优化问题，抽去它们的实际意义，可以得出它们的共同特点是：求一组非负变量，满足一定的约束条件（该条件是线性等式或线性不等式），使一个线性函数取得极值（极大值或极小值），这样的问题称为线性规划问题.

1.1.2 线性规划问题数学模型表示方法

线性规划问题数学模型的表示法通常有四种：

1. 一般形式

$$\max(\text{或} \min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_2; \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_m; \\ \qquad x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0.\end{cases} \tag{1-4}$$

其中 $c_j(j=1,2,\cdots,n)$是目标函数中决策变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$的系数，称为价值系数；而 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$表示第 i 种资源的拥有量，$x_j(j=1,2,\cdots,n)$取值受 m 项资源的限制；$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$表示变量 x_j 取值为一个单位时所消耗或含有的第 i 种资源的数量，通常称为技术系数或工艺系数. 实际问题中的线性：一是指严格的比例性(如消耗量与数量、利润与产量等)；二是指可叠加性(如总利润是各项产品的利润之和). 虽然很多实际问题难以服从上述条件，但为了处理方便，一般可近似看作服从线性条件.

2. 和式形式

$$\max(\text{或}\ \min)z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j.$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant(\text{或}\geqslant,=)b_i & (i=1,2,\cdots,m);\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n).\end{cases}\tag{1-5}$$

3. 向量形式

若 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$,

$$\max(\text{或}\ \min)z=\boldsymbol{CX}.$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_jx_j\leqslant(\text{或}\geqslant,=)\boldsymbol{b};\\ \boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}.\end{cases}\tag{1-6}$$

4. 矩阵形式

$$\max(\text{或}\ \min)z=\boldsymbol{CX}.$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{AX}\leqslant(\text{或}\geqslant,=)\boldsymbol{b};\\ \boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}.\end{cases}\tag{1-7}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$.

说明：变量 x_j 的取值一般为非负，即 $x_j\geqslant 0$；从数学意义上也可认为 $x_j\geqslant 0$ 或无约束.

1.1.3 线性规划问题的标准形式

线性规划模型有多种形式，为了便于讨论和制定统一算法，可规定线性规划标准形式.

1. 线性规划问题的标准形式

要求目标函数最大化，约束条件为等式约束，其右端项大于等于零，且决策变量均大于等于零的线性规划问题称为线性规划问题的标准形，即

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j.$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & (i=1,2,\cdots,m);\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n).\end{cases}\tag{1-8}$$

2. 非标准形线性规划过渡到标准形线性规划的处理方法

(1) 如果目标函数为求极小值

$$\min z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,$$

只需令 $z'=-z$,则极小值问题就化成极大值 $\max z'=-\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j$.

(2) 若 $b_i\leqslant 0$,只需将等式两端或不等式两端同乘以-1 即可.

(3) 若约束条件为不等式,分两种情形:

➢ 约束条件为"$\leqslant$"时,则可将一非负变量加到约束条件的左端,使其成为等式约束,称加入的这一非负变量为松弛变量(实际是未被充分利用的资源数).

➢ 当约束条件为"$\geqslant$"时,此时约束条件左端应减去一非负变量,使其成为等式约束,称减去的非负变量为剩余变量(实际是超出的资源数).

由于松弛变量与剩余变量在实际问题中分别表示未被充分利用的资源数和超出的资源数,均未转化为价值和利润,所以引进模型后,它们在目标函数中的系数均为零.

(4) 若决策变量无非负约束,令 $x_j=x_j'-x_j''$,其中 $x_j'\geqslant 0,x_j''\geqslant 0$.

(5) 若决策变量 $x_k\leqslant 0$,则令 $x_k'=-x_k,x_k'\geqslant 0$ 即可.

【例 1-4】 将下列线性规划模型化为标准形.

$$\min z=-x_1+2x_2-3x_3.$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3\leqslant 8;\\ x_1-x_2+x_3\geqslant 2;\\ -3x_1+x_2+2x_3=-5;\\ x_1,x_2\geqslant 0,x_3\text{ 无约束}.\end{cases}\tag{1-9}$$

解 上述问题中令 $z'=-z,x_3=x_3'-x_3''$,其中 $x_3'\geqslant 0,x_3''\geqslant 0$,则按上述规则,不难得出该问题的标准形为:

$$\max z'=x_1-2x_2+3x_3'-3x_3''+0x_4+0x_5.$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3'-x_3''+x_4=8;\\ x_1-x_2+x_3'-x_3''-x_5=2;\\ 3x_1-x_2-2x_3'+2x_3''=5;\\ x_1,x_2,x_3',x_3'',x_4,x_5\geqslant 0.\end{cases}\tag{1-10}$$

1.2 图　解　法

对于只有两个决策变量的线性规划问题，我们可以用作图的方法来求解.图解法不仅直观，而且可以从中得到有关线性规划问题的许多重要结论，有助于我们理解线性规划问题求解方法的基本原理.

1.2.1 线性规划问题解的定义

1. 可行解

定义 1－1 满足线性规划所有约束条件的点(解) $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 称为线性规划问题的可行解.可行解的全体称为可行域.

2. 最优解

定义 1－2 在可行域中使线性规划的目标函数达到最优值的可行解称为线性规划问题的最优解.

上述两个概念，对于线性规划的一般形式及标准形式都适用.

1.2.2 图解法的基本步骤

图解法主要用于两个变量的规划问题.

第一步 建立平面直角坐标系.以 x_1 为横坐标轴，以 x_2 为纵坐标轴.

第二步 作出各种约束条件，求出可行域(用阴影表示).

第三步 作出目标函数等值线(虚线表示)，并确定 z 值增大方向(最大值问题)或 z 值的减少方向(最小值问题).

第四步 沿 z 值增大(或减少)方向平行移动，一直移动到目标函数的直线与可行域的边界相交为止，交点就代表最优解的点.

【例 1－5】 用图解法求解下述线性规划问题

$$\max z = 10x_1 + 5x_2.$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+4x_2\leqslant 9;\\5x_1+2x_2\leqslant 8;\\x_1,x_2\geqslant 0.\end{cases}$$

解 如图 1－1 所示：

① 先作出所有约束条件，标出可行域(阴影部分).

② 作出目标函数等值线(虚线表示).

③ 将目标函数等值线沿 z 值增大方向平行移动，则 B 点即为最优解.

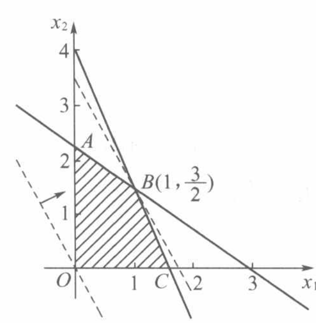


图 1－1

最优解 $x_1^*=1,x_2^*=\dfrac{3}{2}$，最优值 $z^*=\dfrac{35}{2}$.

【例 1－6】 用图解法求解例 1－1 营养配餐问题，即

$$\min z = x_1 + 1.5x_2.$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geqslant 2; \\ 3x_1 + x_2 \geqslant 3; \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

解　如图 1－2 所示：

① 先作出所有约束条件，标出可行域(阴影部分).

② 作出目标函数等值线(虚线表示).

③ 将目标函数等值线沿 z 值减少方向平行移动，则 C 点即为最优解，即最优解为：$x_1^* = \dfrac{4}{5}, x_2^* = \dfrac{3}{5}$，最优值 $z^* = 1.7$.

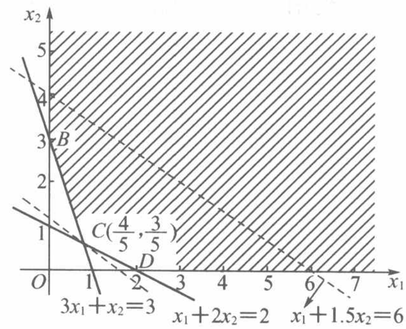


图 1－2

【例 1－7】　求解下述线性规划问题

$$\max z = 2x_1 + x_2.$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leqslant 15; \\ 6x_1 + 2x_2 \leqslant 24; \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

解　由图解法(如图 1－3)不难得出其最优解为：$x_1^* = \dfrac{15}{4}, x_2^* = \dfrac{3}{4}$；最优值为：$z^* = \dfrac{33}{4}$.

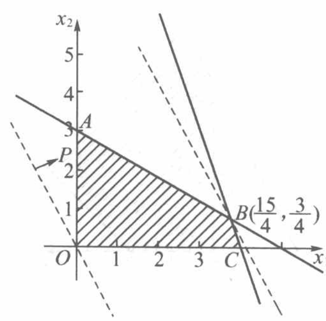


图 1－3

1.2.3　线性规划问题求解的几种情况

由图解法的结果可以得出，线性规划问题的解应有以下几种情形：

1. 唯一最优解

以上三个例子说明线性规划问题有唯一最优解.

2. 无穷多最优解

如

$$\max z = 2x_1 + 4x_2.$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8; \\ x_1 \leqslant 3; \\ x_2 \leqslant 4; \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$