笃志图书

面向21世纪课程教材专用辅导

Reference Book for Mathematical Analysis

数学分析

同步辅导

下册 第三版

主编

同济大学应用数学系 彭 舟

华东师范大学数学系 姬燕妮

- 考试大纲要求
- 教材内容归纳
- 重点难点剖析
- 典型例题解析
- 课本习题全解

航空工业出版社

面向21世纪课程教材专用辅导

Reference Book for Mathematical Analysis

数学分析

同步辅导

下册 第三版

主编 同济大学应用数学系 彭 舟
华东师范大学数学系 姬燕妮

- 考试大纲要求
- 教材内容归纳
- 重点难点剖析
- 典型例题解析
- 课本习题全解

航空工业出版社

内 容 提 要

本书是与由华东师范大学数学系编写、高等教育出版社出版的《数学分析(上、下册)》(第三版)同步配套学习辅导用书。该教材在全国师范类院校及其他类型学校数学专业使用尤为广泛，本书包括考试大纲要求、教材内容归纳、重点难点剖析、典型例题解析和课本习题全解等八大块内容，可供大学生学习《数学分析》时作为参考用书，也可供考研复习第一阶段使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析同步辅导/彭舟主编. 一北京：航空工业出版社，2005.7

ISBN 7-80183-623-5

Ⅰ.数… Ⅱ.彭… Ⅲ.数学分析一教学参考资料 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 074732 号

数学分析同步辅导(上、下册)

Shuxue Fenxi Tongbufudao

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

发行电话：010-64978486 010-64919539

北京市燕山印刷厂 全国各地新华书店经售

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

开本：787×960 1/16 印张：39 字数：850 千字

印数：1—5000 上、下册定价：38.00 元

图书如有残缺情况，请联系 010—82742036 或 13501285859

前　言

本书是与华东师范大学数学系主编的《数学分析》(第三版)配套的指定参考用书，适合初次学习《数学分析》课程的大学生及准备报考硕士研究生的人员复习《数学分析》时使用。

数学分析是数学专业最重要的基础课之一，学好数学分析对学生完成从初等数学到高等数学的思想方法的飞跃有着重要的意义，同时这也是学习数学类、物理类等其他后续课程的基础。华东师范大学主编的《数学分析》(上、下册)一书严格遵循现行数学分析教学大纲要求，内容体系完整，难度适中，深受广大教师和同学欢迎。经过我们调查得知，由于数学分析课程本身的难度和课堂学时所限，同学们在学习之余急切地需要一本与教材相配套的课程辅导书。为了帮助广大同学学好数学分析，华东师范大学数学系和同济大学应用数学系根据多年的数学分析教学经验，广泛听取了不同高校老师和学生的意见，联合编写了这本《数学分析同步辅导》(上、下册)。

本书内容体系严格按照华东师大《数学分析》(第三版)教材编排。在具体内容上具有以下特点：

1. 在每章开始给出了大纲对本章各知识点的不同程度的要求，使学生在学习中做到有的放矢。

2. 知识内容表格网络化，更有利于同学提纲挈领，深刻地理解各部分内容之间的关系，从整体的角度掌握课本内容。

3. 在每节总结了课本主要内容之后，给出了在本节学习过程中应该注意的重点和难点，有助于学生加深对课程内容的理解。

4. 选取的例题既包括与基本概念有关的各种题型，又有综合多个知识点具有一定难度的综合例题，从基础到提高，适合各种水平的学生需要。

5. 给出了每节课后习题的全解，供学生作为解题参考。

《数学分析同步辅导(华东师大第三版)》(上下册)具有科学完整的体系，如果合理地使用本书，必将事半功倍。本书的出版，如果能对广大学生在数学分析的学习及复习中有所帮助，那将是对我们工作的最大肯定。

在本书的编写及出版过程中，北京笃志图书工作室给予了很大的帮助和支持，在此编者表示衷心的感谢。

由于时间仓促和水平所限，恳切希望广大读者和专家对本书的缺点错误给予批评指正。

编　者

二〇〇五年八月

目　　录

第十二章　数项级数

本章大纲要求

1. 掌握数项级数（无穷级数）的概念，理解通项、部分和、级数收敛与发散等数项级数相关概念

2. 理解级数与数列之间的区别与联系，掌握级数收敛的柯西准则及收敛级数的基本性质

3. 掌握判断正项级数收敛的比较原则、达朗贝尔判别法和柯西判别法，了解积分判别法和拉贝判别法

4. 掌握交错级数的定义及判断交错级数收敛性的莱布尼茨判别法

5. 理解级数绝对收敛和条件收敛的概念，掌握绝对收敛的性质（重排和乘积）

6. 领会级数收敛、绝对收敛和条件收敛之间的区别与联系

7. 熟练掌握判断一般项级数收敛性的阿贝耳判别法和狄利克雷判别法，会用它们判断级数是否收敛

本章知识结构图

- 数项级数
  - 定义
    - 数项级数
    - 通项
    - 部分和
    - 收敛与发散
  - 性质
    - 柯西准则
    - $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 收敛,则 $\sum(cu_n+dv_n)=c\sum u_n+d\sum v_n$ 也收敛(c,d 为任意常数)
    - 去掉、增加或改变有限项不改变级数的敛散性
    - 收敛级数任意加括号仍收敛,且和不变.反之不然.
    - 若 $\sum u_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$
  - 收敛判别法
    - 正项级数
      - 级数收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和 $\{S_n\}$ 有界
      - 比较原则
      - 比式判别法(达朗贝尔) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$
      - 根式判别法(柯西) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$
      - 积分判别法
      - *拉贝判别法
    - 交错级数(莱布尼茨判别法)
    - 绝对收敛
      - 重排
      - 乘积
    - 一般项级数
      - 柯西准则判别
      - 利用正项级数 $\Rightarrow$ 绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛
      - 阿贝耳判别法
      - 狄利克雷判别法

第一节　级数的收敛性

一、基本内容

表 1－1　数项级数的概念

名　称	定　义
数项级数	给定一个数列$\{u_n\}$，它的各项依次用"+"号连接起来的表达式 $$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$ 称为数项级数或无穷级数，其中 u_n 称为数项级数的通项，数项级数常写成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 或 $\sum u_n$. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n$ 称为级数的部分和.
收　敛	如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$有极限 S，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，则称 S 为数项级数的和，且数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.
发　散	如果$\{S_n\}$没有极限，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

表 1－2　数项级数收敛的柯西准则

级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是：任给正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $m>N$ 时，对任意的正整数 p，都有 $$\mid u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\mid<\varepsilon$$

表 1－3　数项级数的基本性质

基　本　性　质	说　明
(1) 若级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都收敛，则对任意常数 c,d，级数 $\sum(cu_n+dv_n)$ 也收敛，且 $$\sum(cu_n+dv_n)=c\sum u_n+d\sum v_n$$	级数 $\sum u_n$ 与 $\sum ku_n$ 敛散性相同
(2) 去掉、增加或改变级数的有限个项并不改变级数的敛散性.	
(3) 若级数 $\sum u_n$ 收敛，则任意加括号后组成的新级数仍然收敛.	反之不一定成立，如 $\sum(-1)^{n-1}$ 发散，而 $(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$ 收敛.

(4) 级数收敛的必要条件：$\sum u_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	若 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$，则 $\sum u_n$ 发散．只有 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \not\Rightarrow \sum u_n$ 发散．

二、重点难点

1. 用定义证明或判断级数的敛散性，先计算级数的前 n 项和，再判断 n 项和当 $n\to\infty$ 时，极限是否存在，若存在，则级数收敛，若不存在，则级数发散.

2. 通项 $a_n\to 0$ 是级数收敛的必要条件，判别一个级数收敛与否往往第一步考虑通项极限是否为零，若 $a_n \not\to 0$，则级数发散，若 $a_n\to 0$，需继续用其他方法判断级数是否收敛.

三、典型例题分析

例 1. 判断下列级数的收敛与发散：

(1) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$；

(2) $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}+\cdots$；

(3) $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}+\cdots$.

解 (1)
$$S_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，故原级数收敛.

(2) 一般项 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 可写成两分式的和，即 $\frac{A}{n(n+1)}+\frac{B}{(n+1)(n+2)}$，故 $1=A(n+2)+Bn$，得 $A=\frac{1}{2}$，$B=-\frac{1}{2}$. 于是

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

所以
$$S_n=\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{4}$,所以原级数收敛.

(3)$a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$,因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2n]{2n}}=1,\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt[2n-1]{2n-1}}=-1$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在,所以原级数发散.

例 2. 证明级数 $q\cos\alpha+q^2\cos2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots\quad(|q|<1)$ 收敛.

证明　记 $S_n=q\cos\alpha+q^2\cos2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha=\sum\limits_{k=1}^{n}q^k\cos k\alpha$,两边同乘以 $2q\cos\alpha$,得

$$2q\cos\alpha\cdot S_n=2\sum_{k=1}^{n}q^{k+1}\cos\alpha\cos k\alpha=\sum_{k=1}^{n}q^{k+1}[\cos(k+1)\alpha+\cos(k-1)\alpha]$$

即

$$2q\cos\alpha\cdot S_n=(q^{n+1}\cos(n+1)\alpha+S_n-q\cos\alpha)+(q^2+q^2S_n-q^{n+2}\cos n\alpha),$$

解方程得

$$S_n=\frac{q^{n+2}\cos n\alpha-q^{n+1}\cos(n+1)\alpha+q\cos\alpha-q^2}{1+q^2-2q\cos\alpha}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{q\cos\alpha-q^2}{1+q^2-2q\cos\alpha}<+\infty$,因此原级数收敛.

例 3. 证明:若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

证明　$$\frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n(n+1)}=(u_1+2u_2+\cdots+nu_n)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n}-\frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n+1}$$
$$=u_n+\frac{u_1+2u_2+\cdots+(n-1)u_{n-1}}{n}-\frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n+1}$$

于是　$$\sum_{n=1}^{m}\frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n(n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{m}u_n+\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{u_1+2u_2+\cdots+(n-1)u_{n-1}}{n}-\frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n+1}\right]$$
$$=\sum_{n=1}^{m}u_n-\frac{u_1+2u_2+\cdots+mu_m}{m+1}(u_0=0)$$

当 $m\to\infty$ 时,由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}ku_k=0$ 知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

四、课本习题全解

1. **解** (1) 由于

$$S_n=\frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right),$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{5}$.

(2) 原式 $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$,其中$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$是公比为$\frac{1}{2}$的级数,故收敛于$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$收敛于$\frac{1}{2}$,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$收敛于$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

(3) 因为

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right],$$

从而

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\to\frac{1}{4}\quad(n\to\infty)$$

故该级数收敛,其和为$\frac{1}{4}$.

(4) 因为

$$\begin{aligned}a_n&=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\&=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\end{aligned}$$

所以

$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1-\sqrt{2}$$

(5) 因为

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}\right)$$

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$S_n=2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\right]=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3$.

2. **证明** 反证. 假设$\sum cu_n$收敛,则由$c\neq 0$知

$$\sum u_n=\sum\frac{1}{c}\cdot cu_n=\frac{1}{c}\sum cu_n$$

因此，$\sum u_n$ 也收敛，与题设矛盾.

3. **解** 当 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散时，$\sum (u_n + v_n)$ 不一定发散. 如：$\sum \frac{1}{n}$ 与 $\sum \left(-\frac{1}{n}\right)$ 都发散，而 $\sum (\frac{1}{n} - \frac{1}{n}) = 0+0+0+\cdots$ 收敛.

但当 u_n 与 $v_n (n = 1,2,\cdots)$ 都是非负数时，则 $\sum (u_n + v_n)$ 一定发散.

因为 $\sum u_n$ 发散，存在 $\varepsilon_0 > 0$，对任何自然数 N，总存在自然数 $m_0 (> N)$ 和 p_0，有

$$|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geqslant \varepsilon_0$$

从而

$$|(u_{m_0+1} + v_{m_0+1}) + (u_{m_0+2} + v_{m_0+2}) + \cdots + (u_{m_0+p_0} + v_{m_0+p_0})|$$
$$\geqslant |u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geqslant \varepsilon_0$$

4. **证明** 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，而

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{k+1},$$

所以，

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} (a_1 - a_{k+1}) = a_1 - \lim_{k\to\infty} a_{k+1} = a_1 - a.$$

5. **证明** (1) 因为 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1$，所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_1) = \infty$$

故级数 $\sum (b_{n+1} - b_n)$ 发散.

(2) 当 $b_n \neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0$，从而

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = \frac{1}{b_1},$$

因此 $\sum \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = \frac{1}{b_1}$.

6. **解** (1) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+n-1} - \frac{1}{a+n}\right),$$

且数列 $\left\{\frac{1}{a+n-1}\right\}$ 收敛于零，故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{1}{a+1-1} - 0 = \frac{1}{a}.$$

(2) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{(-1)^n}{n} - \left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)\right],$$

且数列 $\left\{-\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 收敛于零，故

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = -\frac{-1}{1} - 0 = 1.$$

(3) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right],$$

而数列 $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ 收敛于 0，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\frac{1}{1^2+1}-0=\frac{1}{2}.$$

7. **解** (1) 任给自然数 p 及 m，有

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{\sin 2^{m+k}}{2^{m+k}}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2^{m+k}}=\frac{1}{2^m}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^p\right)}{1-\frac{1}{2}}<\frac{1}{2^m}$$

且 $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{2^m}=0$，于是任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $m>N$ 时，任给自然数 p，都有

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{\sin 2^{m+k}}{2^{m+k}}\right|<\frac{1}{2^m}<\varepsilon$$

所以该级数收敛.

(2) 令 $\varepsilon_0=\frac{1}{3}$，对任意 N，取 $m_0=N+1$，$p_0=1$，则 $m_0>N$ 且

$$|u_{m_0+1}|=\left|\frac{(-1)^{m_0}(m_0+1)^2}{2(m_0+1)^2+1}\right|>\frac{(m_0+1)^2}{3(m_0+1)^2}=\frac{1}{3}=\varepsilon_0$$

所以该级数发散.

(3) 任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $m>N$ 时，任给正整数 p 都有

$$\left|\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\cdots+(-1)^{p+1}\frac{1}{m+p}\right|=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\cdots+(-1)^{p+1}\frac{1}{m+p}$$

$$=\frac{1}{m+1}-\left[\frac{1}{m+2}-\frac{1}{m+3}+\cdots+(-1)^p\frac{1}{m+p}\right]<\frac{1}{m+1}<\frac{1}{m}<\varepsilon$$

所以该级数收敛.

(4) 令 $\varepsilon_0=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，对任一 N，取 $m_0=2N$，$p_0=m_0$，则 $m_0>N$，且

$$\left|\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{(m_0+k)+(m_0+k)^2}}\right|\geqslant\frac{p_0}{\sqrt{(m_0+p_0)+(m_0+p_0)^2}}>\frac{p_0}{\sqrt{2(m_0+p_0)^2}}$$

$$=\frac{m_0}{2\sqrt{2}m_0}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

所以该级数发散.

8. **证明** 必要性 当 $\sum u_n$ 收敛时，任给 $\varepsilon>0$，存在自然数 N_1，使当 $n>m>N_1$ 时，

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_n|<\varepsilon$$

取 $N>N_1+1$，则对任何 $n>N$，有

$$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon,$$

充分性 任给 $\varepsilon>0$，存在某自然数 N，对一切 $n>N$，总有

$$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon,$$

则对一切 $n > m > N$,都有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_n| = |(u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n)-(u_N+u_{N+1}+\cdots+u_m)|$$
$$\leqslant |(u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n)+(u_N+u_{N+1}+\cdots+u_m)| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$$

从而 $\sum u_n$ 收敛.

9. **解** 如级数 $\sum \frac{1}{n}$,对每一个自然数 p,有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+p} = 0$$

而级数 $\sum \frac{1}{n}$ 发散.

10. **证明** 因为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{n_k+1}+u_{n_k+2}+\cdots+u_{n_{k+1}}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛($n_1 = 0$),所以对 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists l$ 使当 $k > l$ 时,对一切 p 有

$$|b_{k+1}+b_{k+2}+\cdots+b_{k+p}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

设 $m > n_l$,p 为任一自然数,则存在 $j > i \geqslant l$ 使得 $n_i < m \leqslant n_{i+1}$,$n_j < m+p \leqslant n_{j+1}$,从而

$$\begin{aligned}|u_m+u_{m+1}+\cdots+u_{m+p}| &= |(u_m+u_{m+1}+\cdots+u_{n_{i+1}})+(u_{n_{i+1}+1}+u_{n_{i+1}+2}+\cdots+u_{n_{i+2}})+\cdots+(u_{n_{j-1}+1}\\&\quad+u_{n_{j-1}+2}+\cdots+u_{n_j})+(u_{n_j+1}+u_{n_j+2}+\cdots+u_{m+p})|\\&\leqslant |b_i+b_{i+1}+\cdots+b_j|+|u_{n_i+1}+u_{n_i+2}+\cdots+u_{m-1}|+\\&\quad|u_{m+p+1}+u_{m+p+2}+\cdots+u_{n_{j+1}}|\\&\leqslant |b_i+b_{i+1}+\cdots+b_j|+|b_i|+|b_j| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

第二节 正项级数

一、基本内容

表 2－1 正项级数及其收敛性的判别法

定义	若数项级数的各项都是正数，则称这种级数为正项级数．
收敛判别法	收敛准则：正项级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是：部分和数列 $\{S_n\}$ 有界，即存在正数 M，对一切正整数 n，均有 $S_n < M$.
	比较原则：设 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 是两个正项级数，如果存在某正数 N，对一切 $n > N$ 都有 $$u_n \leqslant v_n$$ (1) $\sum v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum u_n$ 收敛； (2) $\sum u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum v_n$ 发散． 则其极限形式为：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = l$，则当 $0 < l < +\infty$ 时 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 同时收敛或同时发散；当 $l = 0$ 且 $\sum v_n$ 收敛时，$\sum u_n$ 也收敛；当 $l = +\infty$ 且 $\sum v_n$ 发散时，$\sum u_n$ 也发散.
	比式判别法：设 $\sum u_n$ 为正项级数，且存在某正整数 N_0 及常数 $q(0 < q < 1)$. (i) 若对一切 $n > N_0$，不等式 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$ 成立，则级数 $\sum u_n$ 收敛． (ii) 若对一切 $n > N_0$，不等式 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ 成立，则级数 $\sum u_n$ 发散． 极限形式为：若 $\sum u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$，则 (i) 当 $q < 1$ 时，级数 $\sum u_n$ 收敛； (ii) 当 $q > 1$ 或 $q = +\infty$ 时，级数 $\sum u_n$ 发散．
	根式判别法：设 $\sum u_n$ 为正项级数，且存在某正数 N_0 及正常数 l， (i) 若对一切 $n > N_0$，不等式 $\sqrt[n]{u_n} \leqslant l < 1$ 成立，则级数 $\sum u_n$ 收敛； (ii) 若对一切 $n > N_0$，不等式 $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$ 成立，则级数 $\sum u_n$ 发散． 极限形式为：设 $\sum u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = l$，则 (i) 当 $l < 1$ 时，级数 $\sum u_n$ 收敛； (ii) 当 $l > 1$ 时，级数 $\sum u_n$ 发散．

二、重点难点

1. 判断正项级数的敛散性一般有如下步骤：首先判断一般项的极限($\lim u_n$)是否为零，若不为零，则级数发散，否则利用比式或根式判别法，若不能判别，再利用柯西准则或比较原则判断．若还不能判断，再考虑利用级数的定义判断级数的敛散性．

2. 正项级数的敛散性还可以利用反常积分为比较对象来判断，但要注意，只有 f 为$[1, +\infty)$ 上非负减函数时，正项级数 $\sum f(n)$ 与反常积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 具有相同的敛散性，对一般的 f，这个结论并不成立．

三、典型例题分析

例 1. 判断下列级数的敛散性

(1)$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$；　(2)$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$；　(3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$.

解　(1)$n!=1\times2\times\cdots\times n>2\times2\times\cdots\times2=2^{n-1}$，即$\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$　$(n>2)$

因为$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$收敛，所以

$$1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

收敛.

(2) 由 $x=\mathrm{e}^{\ln x}$，得$(\ln n)^{\ln n}=n^{\ln(\ln n)}$.

当 n 充分大后，有 $\ln(\ln n)>2$，故$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}<\frac{1}{n^2}$，

因为$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$收敛.

(3)$a_n=\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}$，设 $b_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}=1$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$收敛.

例 2. 讨论下列级数的敛散性

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$　　(2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$　　(3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+\frac{1}{n})^n}$