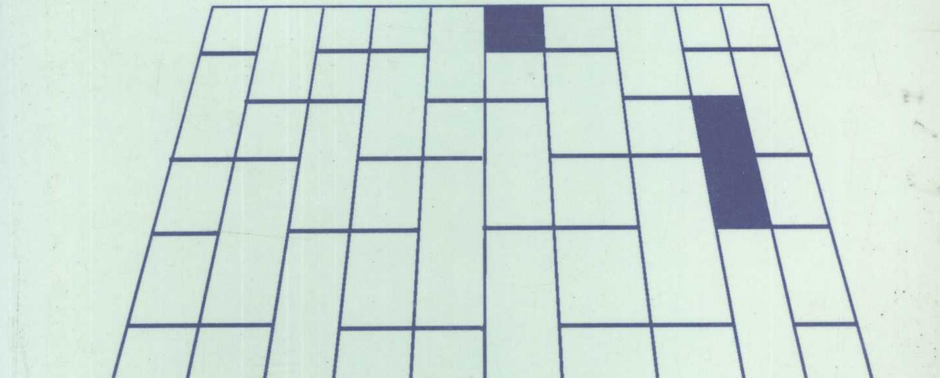
随机过程及其应用

陆大絟



清华大学出版社

随机过程及其应用

陆大绘 编著

清华大学出版社

内 容 简 介

本书系作者在清华大学无线电电子学系多年任教的基础上编写的教材。

全书共分七章。书中着重讨论了随机过程的基本研究方法，论述了应用广泛的几种基本随机过程，并对其在控制和电子技术中的应用作了相应的介绍。各章后面均配有习题。

本书可供理工科大学有关专业的教师、研究生和高年级学生作教材或教学参考书，也可供有关工程技术人员自学。

随 机 过 程 及 其 应 用

陆大绘　编著

☆

清华大学出版社出版

（北京　清华园）

北京国马印刷厂印装

新华书店总店北京科技发行所发行

☆

开本：787×1092 1/32　印张：22 1/16　字数：429 千字

1986 年 8 月第 1 版　2002 年 3 月第 8 次印刷

印数：25501～28500

ISBN 7-302-00140-5/TP・49

定价：20.00 元

前　　言

近年来，作者为清华大学无线电电子学系以及有关专业的研究生、无线电电子学系的本科高年级学生开设了“随机过程”课程，同时编写了这方面的参考教材。本书就是在此基础上编写而成的。

随机过程已广泛应用于许多领域中，如物理、生物、社会科学(管理、经济)以及工程科学技术中，并且在这些领域中显示出十分重要的作用。本书将着重讨论随机过程的基本研究方法，并介绍应用中常遇到的几种基本随机过程，对某些应用，尤其是在控制和电子技术中的应用作了相应的介绍。

考虑到学生在学习本课程之前已学过概率论的基本内容，但又可能还不够深入和熟练，因此，本书在某些章节中，为了引出过程的概念对概率论的基本内容作一些讨论，如对多元随机变量、n维正态分布的讨论；又如在研究马尔可夫过程中不断地回顾概率论的基本内容，并在附录中加入了一段“特征函数”。

在学习本课程之前，学生一般已经掌握了对确定性函数（信号）的研究分析方法。本书采用平行于分析研究确定性函数（信号）时使用的方法，确立一套相应的对随机过程的研究分析方法，如随机分析、谱分析，又如把大家所熟知的傅氏变换用于研究宽平稳过程等等。

全书共分七章。第一章提出随机过程的两类基本分析方

法。第二章、第三章是采用第一类分析方法研究马尔可夫过程和马尔可夫链，对马尔可夫过程着重研究的是参数连续状态离散的马尔可夫过程，对泊松过程作了较详细的讨论，并引出了排队问题。第四章采用第二类分析方法研究二阶矩过程、平稳过程，并着重讨论了随机分析。第五章研究谱分析和线性系统，先用相关函数方法研究初始状态为零的条件下线性系统的响应，然后进一步讨论非零初始情况下线性系统的响应。第六章讨论正态过程。第七章为估值理论，它是随机过程应用的一个方面，也是为学习下一门课程“信号的统计检测和估值”作准备。

本书篇幅稍大，可根据对象的不同选用其中的一部分，如对本科学生带*的章节可以不学。不同专业的学生也可作不同的选择，也可增添一些内容。

学习本课程前需要有一定的数学基础，包括微积分、微分方程、线性代数、复变函数和概率论的基础知识，最好对信号和系统有一定的了解。

为了配合理论的学习，在各章后面配有一定数量的习题。随机过程的分析方法有其自身的特点，读者需要多做一些习题，才能对理论有较深入的理解。

限于水平，书中难免有许多不妥和错误之处，恳请读者批评指正。

作　者

1984年2月

目　　录

第一章　概　　论

§1　随机过程

在自然界中事物的变化过程可以分为两大类。第一类具有确定形式的变化过程，或者说具有必然的变化规律，用数学语言来说，就是事物的变化过程可以用一个时间t的确定函数来描述。这类过程称为确定性过程。例如电容器通过电阻放电时，电容两端的电位差随时间的变化就是一个确定性函数。而另一类过程没有确定的变化形式，也就是说，每次对它的测量结果没有一个确定的变化规律，用数学语言来说，这类事物的变化过程不能用一个时间t的确定性函数来描述。如果对该事物的变化全过程进行一次观察，可得到一个时间t的函数，但是若对该事物的变化过程重复地独立地进行多次观察，则每次所得到的结果是不相同的。从另一角度来看，如果固定某一观测时刻t，事物在时刻t出现的状态是随机的。这类过程称为随机过程。

自然界有许多属于随机性质的过程，例如：

（1）在电话问题中，我们用$\xi(t)$表示在时刻t前电话局接到的呼唤次数。如果固定t，则$\xi(t)$显然是一个随机变量。但是t是可变参数，是一个连续变量，所以$\xi(t)$又是一个过程。因此，这个问题所涉及的不仅是一个随机变量的问题，它既是随机的，又是一个过程。

（2）在波耳氢原子模型中，电子可以在允许的轨道之

一上运动。我们用“$\xi(t)=i$”表示“在t时刻电子是在第i条轨道上运动”的事件。电子可以从一条轨道跃迁到另一条轨道上（即从第i轨道跃迁到第j轨道），而跃迁到哪一条轨道上是随机的，跃迁的时刻t_1，t_2，…也是随机的。因此经过t时间后，电子所处的轨道$\xi(t)$是随机的。

（3）液面上质点的运动。观察液面上一个作布朗运动的质点A。若用$\{\xi(t), \eta(t)\}$表示在时刻t该质点在液面上的坐标位置，显然，当固定t时，$\{\xi(t), \eta(t)\}$是一对二维随机变量。但是t是一个连续变量，因此$\{\xi(t), \eta(t)\}$又是一个过程。

以上三个例子都说明需要在事物的变化过程中研究它的状态。

我们用“随机过程”一词来表示依赖于一个变动参量的一族随机变量。

虽然随机过程不能用一个确定性的函数来描述，但是随机过程也是有规律的。我们的任务就是研究如何描述一个随机过程，即研究随机过程的性质和规律。

先从三个例子开始，说明如何描述一个随机过程。

（1）伯努利过程

以掷硬币为例。设想每隔单位时间掷一次硬币，观察它出现的结果。如果出现正面，记其结果为1；如出现反面，记其结果为0。一直抛掷下去，便可得到一无穷序列$\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$，则

$$\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}=\{x_n;\ n=1, 2, \cdots;\ x_n=1 \text{ 或 } 0\}$$

因为每次抛掷的结果x_n是一个随机变量（1或0），所以无穷次抛掷的结果是一随机变量的无穷序列。称随机变量的序列为随机序列，也可称为随机过程。每次抛掷的结果与先后

各次抛掷的结果是相互统计独立的，并且x_n出现0或1的概率与抛掷的时间n无关。设

$P\{x_n=1\}$＝第n次抛掷出现正面的概率$=p$

$P\{x_n=0\}$＝第n次抛掷出现反面的概率$=q=1-p$

其中$P\{x_n=1\}=p$与n无关，且x_i、x_k（$i\neq k$时）是相互统计独立的随机变量。称具有这种特性的随机过程为伯努利型随机过程。

有许多实际问题是可以用伯努利概率模型来描述的。如在数字通信中所传送的信号是脉冲信号，在某一时刻t可能出现脉冲、也可能不出现脉冲，出现脉冲称为1，不出现脉冲称为0，则在t时刻信号的值x_t是一个随机变量，即x_t有二个状态，0或1。如果在t_1，t_2，t_3，…时观察信号，则所得结果是$\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}=\{x_n;\ n=1, 2, 3, \cdots;\ x_n=1$或$0\}$。如果在$t_k$时刻出现1或0的概率和观察的时刻$t_k$无关，在$t_i$出现$x_i$与其他任何时刻$t_k$出现$x_k$是相互统计独立的，并设$P\{x_k=1\}=p$，$P\{x_k=0\}=q=1-p$，则p与k无关，且$x_i$、$x_k$（$i\neq k$时）是相互统计独立的随机变量，这样形成的随机序列属于伯努利概型。

在伯努利概型的随机过程中，如果固定观测时刻t_1，则它的试验结果是属于二个样本点（0，1）所组成的样本空间S_{x1}；如果在二个不同时刻t_1、t_2观测试验结果，则x_1、x_2可能出现的值为（0，0），（0，1），（1，0），（1，1），其样本空间为$S_{x_1}\times S_{x_2}$，样本点为$2^2=4$个。$\{x_1, x_2\}$是一个二维随机变量，或二维随机矢量。

同理，如果在t_1，t_2，…，t_n观察其所取的值（$x_1, x_2, \cdots, x_n$），便可得到一个n维随机矢量，其样本空间为$S_{x_1}\times S_{x_2}\times\cdots\times S_{x_n}$，在该样本空间中包括从（0，0，…，

0）到（1，1，…，1)的 2^n 个样本点。

于是，如果在 t_1，t_2，…观察其所取的值 $x_1, x_2, \cdots$，则可得到一个无穷维的随机矢量，其样本空间为

$$S_{x_1} \times S_{x_2} \times \cdots \times S_{x_n} \times \cdots$$

（2）正弦波过程

在振荡源的大批生产中抽出其中一台振荡器，它的输出波形为

$$x(t) = v \sin(\omega t + \varphi)$$

其中 v 为振幅，ω为振荡角频率，$\omega = 2\pi f$，f为振荡频率，φ 为振荡的起始相角。由于生产中的不一致性，各振荡器的振幅和频率与额定的指标均有一定的允许偏差，各台的偏差是不一致的，也就是说，v、ω 是随机变量，每一台的 v、ω 是样本空间(V、Ω)中的一个样本点，而且每次把振荡器接上电源，振荡的起始相角 φ 也是随机的，φ 也有一个样本空间 Φ。因此每次对一台振荡器作试验，其输出电压的v、ω、φ 是样本空间(V、Ω、Φ)中的一个点。当然，输出电压还是一个时间函数。不同的振荡器在各次试验中其输出电压的时间函数虽然均是正弦波，但因 v、ω、φ 为随机变量，不同台不同次的输出可能均不相同。如果固定一个观测时刻，观察各台振荡器在这一时刻的电压，由于 v、ω、φ 是随机变量，且

$$x(t) = v \sin(\omega t + \varphi)$$

故 x(t)也是随机变量。在 t 时 x(t)的分布决定于 t 以及 v、ω、φ 的分布。

称 $x(t) = v \sin(\omega t + \varphi)$为正弦波随机过程，在这个过程中，t 是一个参量，它可以取[0，∞)内的任意值。

（3）如对晶体管的噪声电平进行测量，每隔单位时间（假定为 1 微秒）取一个样本，则可在时刻 $t = 1, 2, 3, \cdots$， n，…测得一族无穷可列维随机矢量 $\{\xi_1\ \xi_2 \cdots \xi_n \cdots\}$ 一次测量的结果为样本空间的一个点，每次测试的结果可能各不相同。我们把每次测试的结果称为一个现实，或称为一个样本函数。另一方面，如果固定一个观测时刻，对噪声进行无穷次测量，则可得到该时刻噪声的分布。如果固定二个时刻，则测得该二个时刻噪声（二维随机变量）的二维分布。如果固定n个时刻，则可测得 n 个时刻噪声（n 维随机矢量）的 n 维分布。

从上述三个例子中看到有二种描述随机过程的方法：

（1）固定时刻 t，随机过程 $\xi(t)$ 在该时刻所取的值是一随机变量。对应每一个随机变量，有一概率空间 $(\Omega、\mathscr{F}、P)$，即 $\xi_t(\omega)=\xi(\omega, t)$ 是样本空间 $\omega\epsilon\Omega$ 内的一个随机变量，可用分布函数 $F_t(x)=F(x; t)=P\{\xi_t(\omega)<x\}=P\{\xi(\omega, t)<x\}$ 来描述 $\xi(\omega, t)$。这是一维分布。这种描述只能说明在某一时刻 $\xi(\omega, t)$ 的分布，而不能描述不同时刻 $\xi(\omega, t)$ 的相互关系。为了描述随机过程 $\{\xi(t), t\in T\}$ 在不同时刻的相互关系，就要求用 n 维联合分布函数来描述 n 个不同时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 相对应的 n 个随机变量 $\xi(t_1), \xi(t_2), \cdots, \xi(t_n)$。

$$
\begin{aligned}
&F_{t_1, t_2, \cdots, t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\\
&=F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)\\
&=P\{\xi(t_1)<x_1, \xi(t_2)<x_2, \cdots, \xi(t_n)<x_n\}
\end{aligned}
$$

其中 n 是任意选定的，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是T中的 n 个元素。

由于上式中 n 及 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 都是任意选定的，因此要求给出的是一族有限维分布函数。可以看出，这一族有限维分布函数不仅刻划出了对应于每一个时刻 t 的随机变量

$\xi(t)$的统计规律性，而且也刻划出了不同时刻t_i、t_k的$\xi(t_i)$、$\xi(t_k)$间的关系。因此，随机过程$\xi(t)$的统计规律性可由它的有限维分布函数族完整地描述出来。称这一有限维分布函数族为随机过程$\{\xi(t), t\in T\}$的有限维分布函数族。

这里需要说明如下两点：

① 为了简便起见，往往把$\xi(\omega, t)$简写为$\xi(t)$。

② 有时把随机过程$\xi(t)$在$t=t_k$所取的值$x(t_k)$称为随机过程$\xi(t)$在$t=t_k$时的状态。

（2）对于特定的$\omega_k\in\Omega$，即对于一个特定的试验结果，$\xi^{(k)}(t)$是一个确定的样本函数，它可以理解为随机过程的一次实现。有时为了避免混淆，第k个实现可用$x_k(t)$表示之。由于$x_k(t)$是一次实现，它可以通过测量而得到。例如在正弦波过程的一次试验中，v、ω、φ均为一个确定的值，因此一次试验得到的现实为一正弦函数。

这两种描述方法是互为补充的。由于随机过程可以用一族有限维分布函数描述，因此可以利用研究随机矢量的方法研究随机过程。

概括上面述二种描述方法，可以对随机过程作一个概括的说明。

定义：设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是概率空间，T是直线上的参数集（可列或不可列的），若对每一个$t\in T$，$\xi(\omega,t)=\xi_t(\omega)$是随机变量，则称$\{\xi(\omega, t), t\in T\}$为该概率空间上的随机过程。

随机过程是一个统称，有时这一名词专指T是连续的场合。若$\{t\in T\}$取离散值时称为随机序列（或时间序列）。把一次试验结果$x_k(t)$，$t\in T$，称为随机过程的一个实现或一个样本。

参数集T在许多实际问题中往往指的是时间参数，如上述的三个例子。但是也可以采用其他物理量如长度作为参数集。例如，考虑长度为l的棉条的横截面，若用$A(x)$表示在x处的棉条横截面积，则对于固定的x，$A(x)$是一随机变量。在n个不同距离x_1，x_2，…，x_n处对应的横截面积$A(x_1)$，$A(x_2)$，…，$A(x_n)$组成一n维随机矢量，即$A(x)$是一个随机过程。

§2 随机过程的分类和举例

根据参数集T的性质，随机过程可分为两大类：

（1）参数集T是一个可列集，如

$$T_1=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$$

$$T_2=\{\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$$

§1中的伯努利过程就是属于这一类的随机过程。称这类过程为离散参数随机过程或随机序列。

（2）参数集T是一个不可列集，如

$$T_3=\{t/t\geqslant 0\},\quad T_4=\{t/-\infty<t<\infty\}$$

这类过程称为连续参数随机过程。

另一方面也可以据$\xi(t_k)$所取值（即状态）的特征，把随机过程分为两大类。（1）离散状态，即$\xi(t_k)$所取的值是离散的；（2）连续状态，即$\xi(t_k)$所取的值在一个范围内是连续的。

所以随机过程可分为四大类：

（1）离散参数离散型随机过程

这类过程的特点是参数集为离散的，同时固定t_k、$\xi(t_k)$所取的值（状态）也是离散的。伯努利过程属于这一类。

例一、一维随机游动的研究。设有一质点在 x 轴上作随机游动，即在 $t=0$ 时质点属于 x 轴的原点 0，在 $t=1, 2, 3, \cdots$ 时质点可以在 x 轴上正向或反向移动一个单位距离，作正向移动一个单位距离的概率为 p，作反向移动一个单位距离的概率为 $q=1-p$。经时间 n，质点偏离原点的距离为 k，问处于 k 的概率如何？

解 设质点每次移动的距离为 ξ_i，ξ_i 可取 $+1$，也可取 -1，即 $P\{\xi_i=+1\}=p$

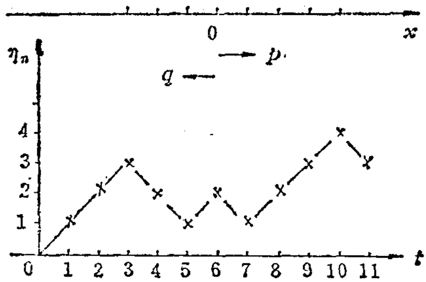


图 1-1

$$P\{\xi_i=-1\}=q=1-p$$

设质点在 $t=n$ 时，偏离原点的距离为 η_n，η_n 也是一随机变量，于是

$$\eta_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i \quad 而\ \eta_0=0$$

又设质点每次游动 ξ_i 与该质点所处的位置无关，当 $i\neq k$ 时 ξ_i 和 ξ_k 是相互统计独立的随机变量。图 1-1画出了 η_n 的样本函数。

当 $n=1$ 时，质点可取的位置为 $\eta_1=1$ 或 $\eta_1=-1$，而