

快 速

**傅立叶
变换浅谈**

邓贤照 徐英凯

水利电力出版社

快速傅立叶变换浅谈

邓贤照 徐英凯

水利电力出版社

(京) 新登字115号

内 容 提 要

本书由浅入深地介绍了快速傅立叶变换的基本知识,以及应用BASIC语言程序执行快速傅立叶变换的计算方法,同时亦简要地讨论了快速傅氏变换在失真分析、机械振动、数字滤波等领域的应用。本书作为普及性读物,适合于具有初等微积分知识的一般读者,对有关专业的工程技术人员也有一定的参考价值。

快速傅立叶变换浅谈

邓贤照 徐英凯

*

水利电力出版社出版、发行
(北京三里河路6号)

各地新华书店经售

七〇七所印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 5 375印张 117千字

1994年4月第一版 1994年4月北京第一次印刷

印数001—700册

ISBN 7-120-01667-9/O·17

定价4.45元

序

快速傅立叶变换是本世纪60年代，在傅立叶分析的基础上发展起来的一种快速高效的计算方法，是许多工程技术领域内非常实用的基本分析工具之一，为傅立叶分析的广泛应用创造了有利条件。

本书用浅谈的手法写深奥的知识，深入浅出地解说了快速傅立叶变换的原理与算法，并对其具体应用作了介绍，对推广这种计算方法的应用，将起到积极的推动作用。

邓贤照先生年逾八旬，在困苦的生活条件下，夜以继日，为我国科学普及工作，竭尽心力，不能不令人感佩。

苏哲文

1993年7月9日

前 言

在《热的解析理论》(Théorie analytique de la chaleur)中,傅立叶(Joseph Fourier)首次提出利用三角级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$,来分析固体中的热传导问题,同时他认为任何函数都可以展开成为上面的级数形式,傅立叶的研究经过后人的不断发展,逐步形成了今天的傅立叶分析理论,其应用的范围包括声、光、电、热、量子力学以及自动控制系统等诸多领域。

在本世纪60年代,加尔温(Garwin)与图基(Tukey)利用傅立叶分析的原理,对计算方法进行了成功的改进,创造了快速傅立叶变换(FFT)这样一种信息处理的新技术,它使得在计算机上的运算次数大为减少,提高了数字处理的速度。由于它所具有的明显优点,使得在诸多方面都被广泛地采用。

本书就是想通过对这一方法的深入浅出的讨论,使读者能对快速傅氏变换有一个粗浅的了解。凡学习过初等微积分的读者均能够读懂本书的全部内容。

在本书的编写过程中,曾念、钟振宇及许多朋友给予了热情的帮助,北京航空航天大学王晋军副教授提出了不少宝贵意见,高继刚、夏艳丽同志协助了部分章节的校订。在此致以深深的谢意。

本书第七至十章由邓贤照编写,第一至六章由徐英凯编写。

由于作者水平所限,定会有不妥甚至错误,恳请广大读者批评指正。

编 者

1993年6月5日

目 录

序 前言

第一篇 预 备 知 识

第一章	振动的合成与分解	(1)
第一节	振动的合成与分解	(1)
第二节	频域与时域	(4)
第二章	振动的时域表示与频域表示	(6)
第一节	时间与频率	(6)
第二节	正弦波	(11)
第三节	非正弦波	(15)
第四节	频域信息的获取	(19)
第三章	周期性波形的傅立叶分析	(21)
第一节	傅立叶级数	(21)
第二节	频谱	(29)
第三节	吉普斯 (Gibb's) 现象	(31)
第四节	用途	(33)
第四章	非周期性波形的傅立叶分析	(36)
第一节	傅立叶级数与傅立叶积分	(36)
第二节	傅立叶变换	(43)
第三节	非周期函数的频谱	(45)
第四节	频域图	(48)
第五节	波的奇偶性	(57)

第六节	波的周期性与 矩形窗波形	(61)
-----	--------------	------

第二篇 数字傅立叶分析

第五章	离散傅立叶变换与快速傅立叶变换	(67)
第一节	开窗与取样	(67)
第二节	离散傅立叶变换 (DFT)	(72)
第三节	快速傅立叶变换 (FFT)	(77)
第六章	快速傅立叶变换中应注意的一些问题	(79)
第一节	时域数据	(80)
第二节	FFT的直角坐标系表示	(81)
第三节	FFT的极坐标表示	(83)
第七章	快速傅立叶变换的计算	(85)
第一节	桑德一图基算法	(85)
第二节	快速傅立叶变换 (FFT) 与其逆变换 (IFFT) 的计算程序	(89)
第八章	快速傅立叶变换算法的应用	(97)
第一节	失真分析	(97)
第二节	机械振动及其特征分析	(99)
第三节	频率响应估计	(101)
第四节	卷积	(103)
第五节	相关	(109)

第三篇 性质 及 误差

第九章	傅立叶变换的性质与误差	(115)
第一节	傅立叶变换的性质	(115)
第二节	噪音	(119)
第三节	模/数转换	(122)
第四节	开窗造成的泄漏	(126)

第五节	周期性	(134)
第六节	混叠	(140)
第七节	其它误差源	(145)
第十章	改善 FFT 结果的一些指导方法	(146)
第一节	采用信号平均法去掉附加噪音	(146)
第二节	去掉平均值以提高幅值的清晰度	(146)
第三节	由 FFT 的观点观察波形	(147)
第四节	取样率高于两倍的最高频率	(149)
第五节	为改善泄漏而改变窗函数	(152)
附录	桑德一图基算法例题详解	(155)
参考文献		(164)

第一篇 预 备 知 识

第一章 振动的合成与分解

第一节 振动的合成与分解

在日常生活中，时常会遇到周而复始的运动，大至行星的运转，飞轮的旋转，蒸汽机活塞的往复，小到琴弦的运动，人心脏的搏动等等。这种运动我们称之为周期运动。

简谐运动是最简单的周期运动，它可以由正弦函数 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ 和余弦函数 $y = A\cos(\omega t + \theta)$ 表示。其中 y 称为振动的位移， A 叫做振幅； $\omega t + \varphi$ 或 $\omega t + \theta$ 叫做位相（或周相）， φ 与 θ 叫做初位相（或初周相）。

对于上述两个函数，每当自变量 t 增加 $\frac{2\pi}{\omega}$ 时，函数值就

重复地出现。如对 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ ，当 t 增加 $\frac{2\pi}{\omega}$ 时，

$$A\sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right] = A\sin(\omega t + \varphi)。所以函数 $y =$$$

$A\sin(\omega t + \varphi)$ 的周期就是 $\frac{2\pi}{\omega}$ 。对余弦函数也是这样的。因此

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ 叫做简谐振动的周期，它的倒数 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ 叫做频率，频率的单位是赫兹(Hz)。

现在我们来看两个简谐振动，它们的频率分别为 f 与 $3f$ ，

见图1-1。其中频率为 f 的简谐振动，我们称为基波。而频率

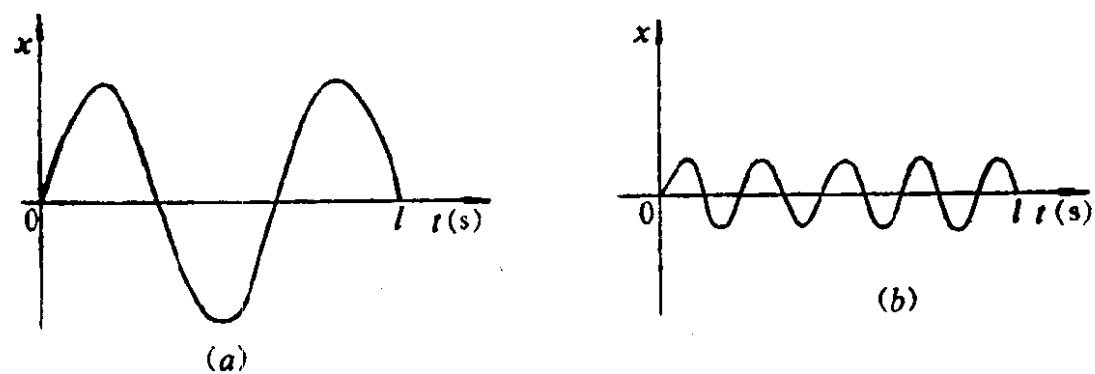


图 1-1 频率为 f 与 $3f$ 的简谐振动
(a) 频率为 f 的简谐振动；(b) 频率为 $3f$ 的简谐振动

为 $3f$ 的简谐振动，我们称为三次谐波。图1-2表示的是这两个简谐振动（正弦波）的合成。

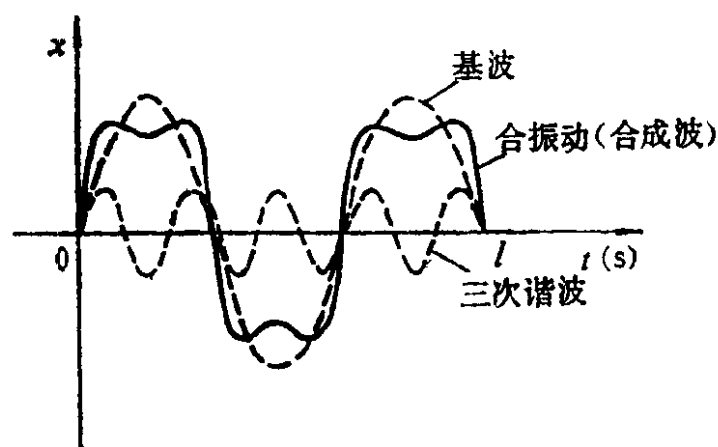


图 1-2 基波与三次谐波的合成

从合振动的图象我们可以看出，合振动不再是简谐振动，但却仍然是周期性振动。合振动的周期、频率都与频率最低的分振动相同。在上例中，合振动的周期与频率分别和基波的周期与频率相同。由此，我们看到，几个简谐振动可以合成较复杂的周期性振动。那么，复杂的周期性振动能不能分

解成几个简谐振动呢？如果能，较复杂的周期性振动就可以用较简单的数个简谐振动来描述。这无疑将对研究较复杂的周期性振动提供极大的便利。

实验表明，任何复杂的周期性振动，都可以看成是由频率成整数倍的简谐振动合成的。

图1-3就是频率为100Hz的黑管声响的振动图象[图(b)]及声谱图[图(a)]，它是由100Hz的基音（基波）和9个频率为基音的整数倍的泛音（谐波）组成的。

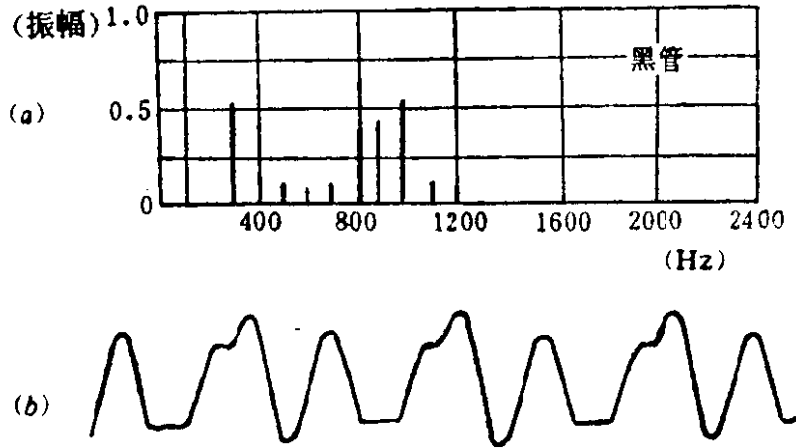


图 1-3 黑管的振动图象和声谱图

在图1-4(b)中是频率为100Hz的钢琴声响的振动图象。如果用专门仪器对它进行分析，就可以发现它被分解为16个简谐振动，即这个较复杂的波形可以分解为16个正弦波。它们的频率是成整数倍的，频率最低的波叫做基波，为100Hz；其余称为谐波，频率分别为200Hz，300Hz，…。图1-4(a)表示出这16个简谐振动的频率与振幅。

由上面两个例子可以看出复杂的周期性振动可以分解为数个简谐振动。若仅从数学的角度看，也就是一个复杂的周期函数可以被数个简单的正弦函数或余弦函数来表示。而正

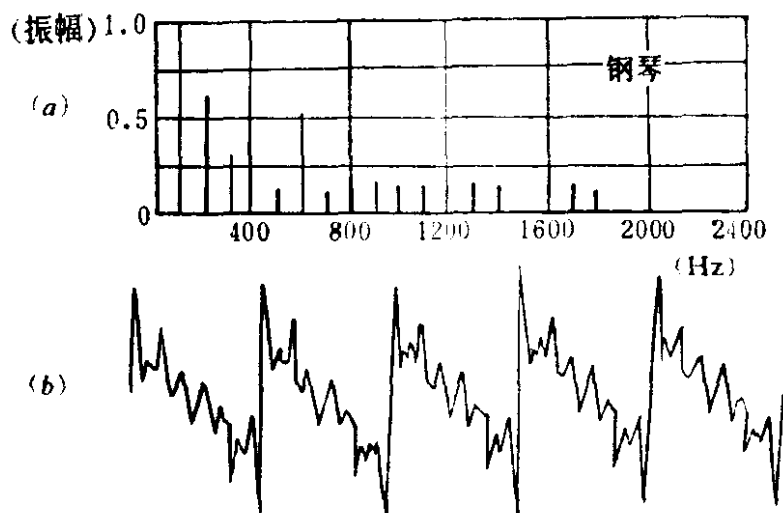


图 1-4 钢琴的振动图象和声谱图

弦函数、余弦函数是我们所熟悉的，这就为我们研究复杂的周期函数打开了方便之门。

第二节 频 域 与 时 域

首先，我们来看看时域函数与频域函数。图1-1,图1-2,图1-3(b)及图1-4(b)中的振动波形，是在以时间 t 为横坐标，以位移 x 为纵坐标的坐标系中描述的，这个坐标系，我们称之为时域。在此坐标系中所描述的函数，即以时间 t 为自变量，以位移 x 为因变量的函数，称其为时域函数。而图1-3(a)及图1-4(a)中的坐标系是以频率为横坐标，位移（振幅）为纵坐标。称这个坐标系为频域。在其上所描述的函数称之为频域函数。

由上节的两个例子可以看出，某一个振动现象由频域，或由时域表示各有其特点。在时域中，可以清楚地看到完整的振动波形；而在频域中，可以很快地分辨出组成这一振动

的那些简谐振动的特征。根据所研究问题的不同，我们可以在时域函数与频域函数中进行选择，选择其中更有利于我们解决问题的那个函数进行研究。由此，将已知的时域变为频域，或将已知的频域变为时域就成为十分重要的一件工作了。而我们所讨论的傅立叶变换正是完成这件工作的一个有力工具。

将时域变为频域的变换，称之为傅立叶正变换；而将频域变为时域的变换，称之为傅立叶逆变换。

顺便提一下，为什么在傅立叶变换中要采用正弦函数或余弦函数呢？这是因为正弦与余弦函数既是周期函数也是正交函数，在处理图片信息时，一张照片需要26万个字节才能存入计算机，如处理许多照片就需要大量的存贮器，这样成本就会大大增加，为此要研究各种数据压缩法。而变换的正交性是实现压缩的有效措施。利用计算机进行正交变换，具有比直接使用硬设备更为灵活的优点。

第二章 振动的时域表示与频域表示

第一节 时间与频率

在世界上,时间的计量是以1967年国际计量委员会会议上通过的以原子时的秒长为基本单位的,而原子时的秒长为铯原子跃迁频率 9 192 631 770 周所经历的时间,这个数字叫做频率基准,它的倒数叫时间基准,简称时基。

时间与时间函数在现实世界中,无处不在。比如气温 T 随时间的变化而变化,因此,气温 T 是时间的函数,数学上表示为 $T(t)$; 物体运动的路程 S 也是时间 t 的函数 $S(t)$; 金属丝的长度随温度的变化而改变,但由于温度 T 是时间 t 的函数,因此金属丝的长度 L 即是温度 T 的函数,也可以表示为时间 t 的函数 $L(T(t))$ 。

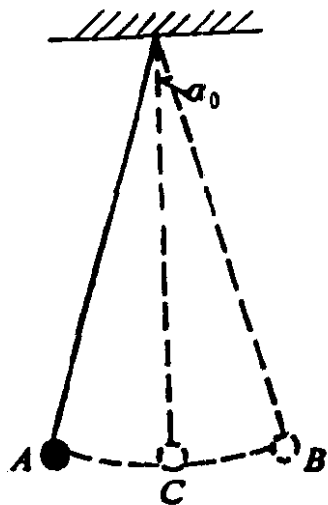


图 2-1 单摆

为了形象化地说明频率,我们来看一个例子。把一个小球拴在一根不会伸长的细线下端(如图2-1所示),如果线的质量与小球的质量相比小得可以略去不计,而小球的直径与细线的长度比较起来也显得很小,则这个装置称为一个单摆。

如果位移很小,则摆的运动近似于简谐振动。当摆锤从点 A 到点 B ,再由点 B 返回点 A 时,完成一个全振动。作一个全振动所需的时间叫做摆的一个周期(用 T 表示),每一秒钟全振动的次数叫

做频率，位移是指从摆的任何瞬时位置到平衡位置 C 的距离，振幅是诸多位移中最大的一个(用 A 表示)。现在，我们来看图2-2。

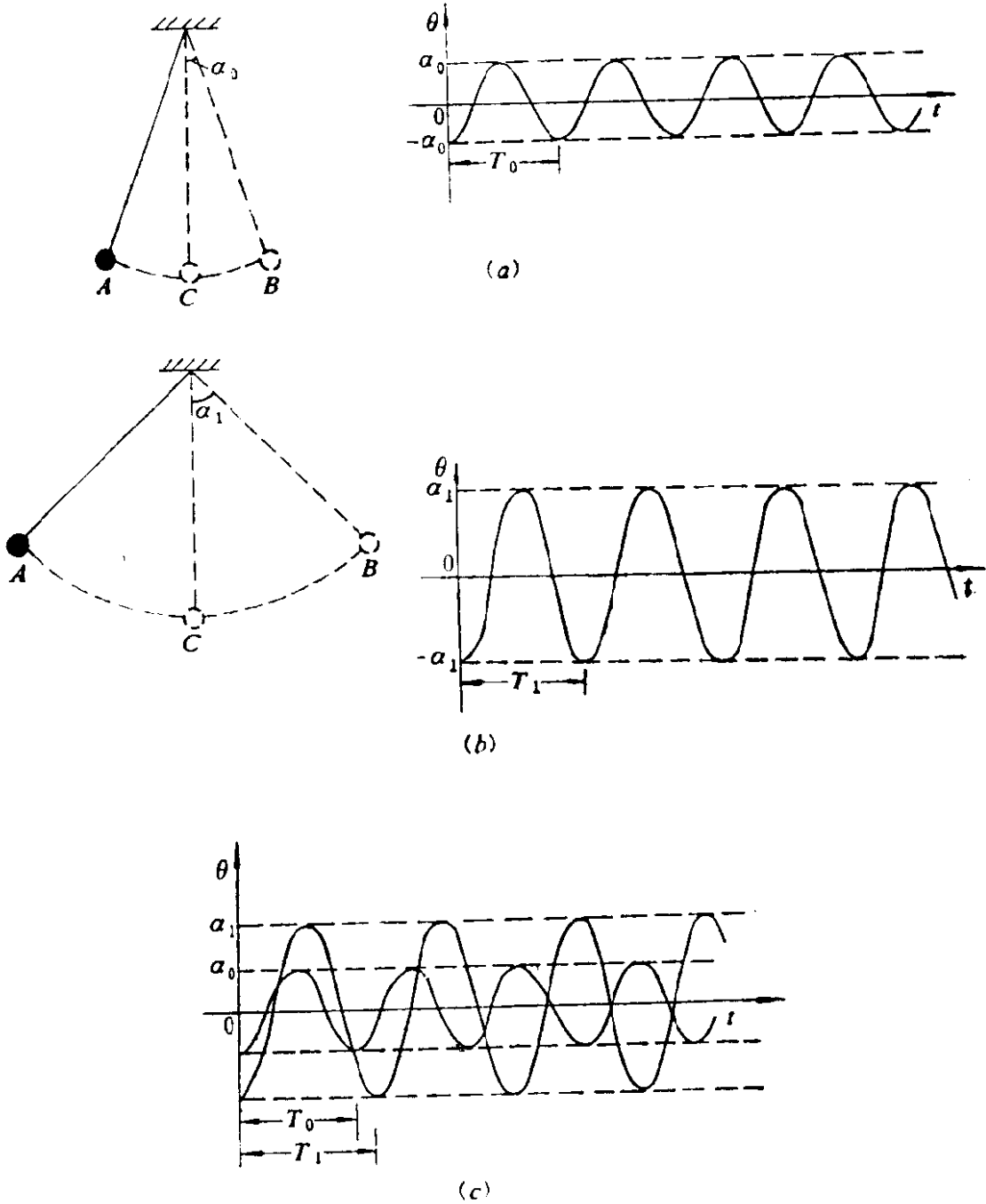


图 2-2 摆的运动

在图2-2(a)中, 摆的位移较小, 其角位移由 $-\alpha_0$ 到 α_0 , 此时, 摆的周期为 T_0 。但当摆的位移大时, 如图2-2(b), 摆的角位移为 $\alpha_1 > \alpha_0$, 此时, 摆的周期 T_1 也大于 T_0 , 这是可以由实验观察到的。

图2-2(c)是将这两个摆动的图形叠加在一起的图形。从这个图中, 我们可以清楚地看出, 同一摆开始的角位移不同, 则摆的周期也不同。即是说, 摆的周期 T 是随其角位移 θ 的变动而变动的。根据周期与频率的关系, 可以很自然地想到, 频率也随角位移 θ 的变化而改变。

研究振动问题, 也同研究其它问题一样, 离不开对时间的测量。测量就要有一个标准, 伽利略在比萨大教堂里观察一盏圣灯的缓慢摆动时, 是用他的脉搏作为一个记时器, 也就是用他的脉搏的跳动作为时间基准。他观察到相继的各个振动是在相等的时间内完成的, 而与振幅无关。一台电子振荡器在许多方面是模拟机械摆的。正弦波的输出就是一个时间函数, 它与单摆的角位移时间函数极其相似。频率计数器就是应用数脉搏的方法, 不过它是以电脉冲来替代人的脉搏作为时间的基准罢了。

图2-3表示的是伽利略观测单摆的电子改型。其中(a)是电子振荡器; (b)是电子振荡器的电压的时间函数; (c)表示通过数时基脉冲的个数来测量信号周期 T 。

时基是一个很重要的概念, 在一切时域测量中都要用到它。在图2-3(c)中, 使用时基直接测量信号的周期。

时间函数可以由曲线记录仪描出。曲线记录仪的纸速受时基的精确控制。如果时间函数由示波器显示的话, 示波器以一个斜波电压在阴极射线管 (CRT) 面上以恒速拖动一

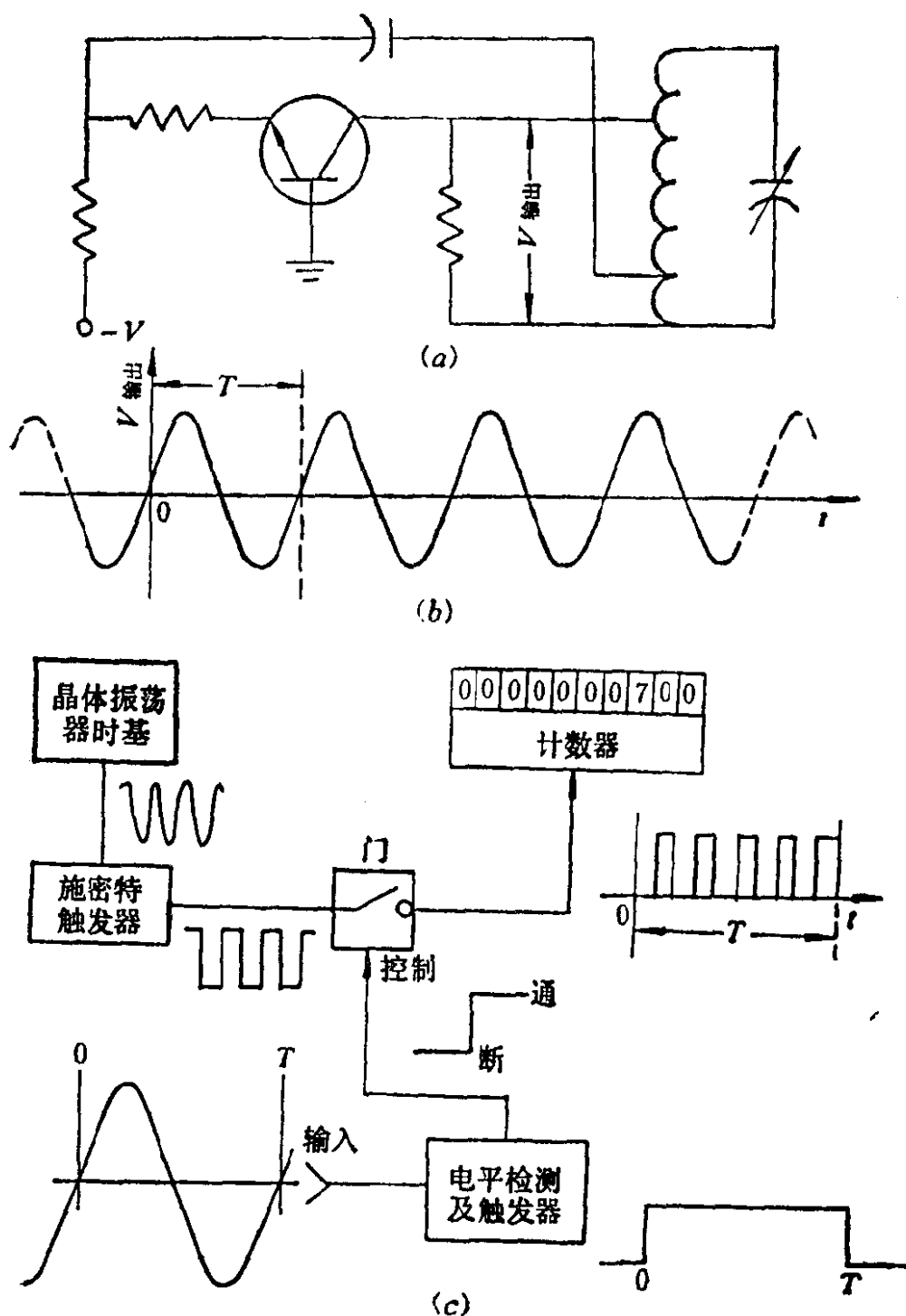


图 2-3 伽利略观测单摆的电子改型
 (a)电子振荡器; (b)电子振荡器的电压时间函数图;
 (c)经数时基脉冲的个数来测量信号周期 T