线性代数的理论和习题

S. LIPSCHUTZ 著

上海科学技术出版社

线性代数的理论和习题

S. 利普舒茨 著

沐定夷 徐克绍 译

上海科学技术出版社

SCHAUM'S OUTLINE OF

THEORY AND PROBLEMS OF LINEAR ALGEBRA

By

Seymour Lipschutz

McGraw-Hill Book Company 1968

线性代数的理论和习题

S. 利普舒茨 著

沐定夷 徐克绍 译

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 松江科技印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 21 字数 500,000

1981年11月第1版 1981年11月第1次印刷

印数: 1—23,400

统一书号: 13119 932 定价: (科四) 1.95 元

译　序

随着电子计算机技术的飞跃发展，有些非线性问题高精度地线性化与大型线性问题的可计算性正在逐步实现，从而线性问题的重要性显得日益突出起来．因此，无论从理论上或应用上看来，作为线性数学的基础——线性代数，正受到数学工作者与科技工作者的特别重视．鉴于此，我们不揣浅陋，翻译了肖姆纲要式丛书(Schaum's Outline Series)中S．利普舒茨所著的«Linear Algebra»一书，供广大读者阅读与参考．

关于本书的内容概要，读者可参阅原序，这里不再赘述．它的编写体例颇为新颖．作者在每章的第1节中先介绍有关内容，并辅以说明性的材料，而不涉及复杂的推理，这样能比较顺利地初步了解主要内容；第2节包含一大批题目及其解答，其中包括大部分定理的证明及有关重要的例题，进一步巩固与充实了对内容的理解；第3节是供复习用的补充题，大部分附有答案供校核．

书中的第一与三到八章由徐克绍翻译，其余部分由沐定夷翻译，译竣后相互校阅，最后由沐定夷整理定稿．翻译时，除原文中明显的刊误已予以订正外，其余一律尊重原著．但限于我们的水平，译文中可能有不少谬讹之处，竭诚欢迎批评指正．

吴忠英同志参加了译稿的誊写等工作，谨此表示衷心的感谢．

译　者　　1979年10月

原　序

近年来，线性代数已成为数学家、工程师、物理学家与其他科学家所要求的数学基础的重要部分．这个要求反映了这门学科内容的重要性与应用的广泛性．

这本书计划用作线性代数正式教程的课本或用作所有现行标准课本的补充．其目的在于介绍线性代数的引论，这对各种专门化领域的读者都是有用的．本书比大多数初等教程包含较多的材料，它具有较大的灵活性，从而为读者提供了一本有用的参考书，也进一步激发起读者对这门课程的兴趣．

本书每章先清晰地叙述有关的定义、法则与定理，并伴以说明性的例证和其它描述性的材料．接着是各类题解与补充题．题解用来进一步阐述和充实理论，使之要点突出．如果没有这些，学生会继续感到自己学得不够巩固，它也重复强调了一些基本法则，这些法则对有效地学习是极端重要的．题解还包含了许多定理的证明．补充题则用来全面复习各章材料．

本书前三章讲述欧几里得空间中的向量、线性方程与矩阵，这些内容为接着的向量空间与线性映射的抽象论述提供了动力与基本的计算工具．关于本征值与本征向量的那一章，安排在行列式这一章的后面，它给出了用对角阵表示线性算子的条件，这自然引导到各种标准型的研究，特别是三角标准型、约当标准型与有理标准型．最后一章论述内积空间，得出了对称算子的谱分解定理，并将之用在实二次型的对角化上．为了完整起见，本书最后还附有关于集与关系、代数结构与域上多项式三个附录．

（下为致谢部分，译略．）

S. 利普舒茨

于坦普尔大学　1968 年 1 月

目　　录

第一章　$\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{C}^n$ 中的向量

§1.1　基 本 内 容

1. 引言

在各种物理应用中，有一些量例如温度与速率，它们仅有“大小”．这种量可用实数来表示，称为纯量．另一方面，也有一些量例如力与速度，它们既有“大小”又有“方向”．这种量可用箭头(具有适当的长度与方向且从某一给定的参考点 O 引出)来表示，称为向量．在本章中详细研究这种向量的性质．

先考虑关于向量的下列运算：

(1) **加法**　两个向量 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 的和 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 由所谓平行四边形法则得出，即 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 是由 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 为边组成的平行四边形的对角线，如图 1-1 所示．

(2) **纯量乘法**　实数 k 与向量 $\mathbf{u}$ 的乘积 $k\mathbf{u}$ 其大小可由 $\mathbf{u}$ 的大小与 $|k|$ 相乘而得，其方向当 $k>0$ 时保持与 $\mathbf{u}$ 同向，当 $k<0$ 时与 $\mathbf{u}$ 反向，$k=0$ 时是零向量，记作 $\mathbf{0}$，见图 1-1．

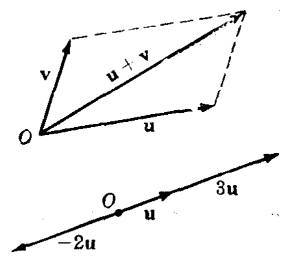

图　1-1

假定读者已经熟悉用有序实数对来表示平面的点．如果轴的原点选在上述参考点 O 上，那末每个向量由其端点坐标唯一确定．上述运算与端点之间的关系如下：

(1) **加法**　如果 $(a,\ b)$ 与 $(c,\ d)$ 是向量 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 的端点，那末 $(a+c,\ b+d)$ 是 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 的端点，如图 1-2(a) 所示．

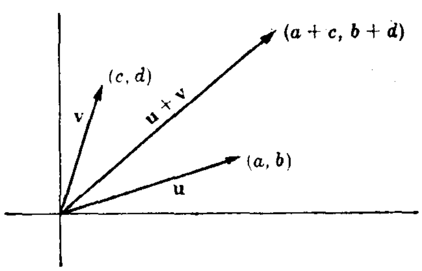

图　1-2(a)

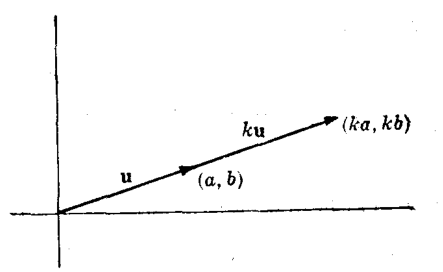

图　1-2(b)

(2) **纯量乘法**　如果 $(a,\ b)$ 是向量 $\mathbf{u}$ 的端点，那末 $(ka,\ kb)$ 是向量 $k\mathbf{u}$ 的端点，如图 1-2(b) 所示．

在数学上，将向量与其端点看作是等同的，即把有序实数对 $(a,\ b)$ 称为一个向量．事实上，我们将推广这一概念，把 n 元实数组 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ 称为一个向量．并进一步推广，允许 n 元数组的坐标是复数而不一定是实数．而且，在第四章中，还将抽象出这种 n 元数组的性质，形式地定义一种称为向量空间的数学系统．

我们假定读者已经熟悉实数域 $\mathbf{R}$ 的初等性质.

2. $\mathbf{R}^n$ 中的向量

所有 n 元实数组的集合称为 n 维空间，记作 $\mathbf{R}^n$. $\mathbf{R}^n$ 中的一个 n 元数组，譬如

$$\mathbf{u}=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n),$$

称为点或向量；实数 u_i 称为向量 $\mathbf{u}$ 的分量(或坐标). 此外，当讨论空间 $\mathbf{R}^n$ 时，把 $\mathbf{R}$ 中的元，即实数，称为纯量.

例 1. 考虑下述向量:

$$(0,\ 1),\ (1,\ -3),\ (1,\ 2,\ \sqrt{3},\ 4),\ \left(-5,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \pi\right).$$

前两个向量有两个分量，因而是 $\mathbf{R}^2$ 中的点；后两个向量有四个分量，因而是 $\mathbf{R}^4$ 中的点.

如果两个向量 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 有相同个数的分量，即属于同一空间，并且对应分量都相等，那末它们是相等的，记作 $\mathbf{u}=\mathbf{v}$. 向量 $(1,\ 2,\ 3)$ 与 $(2,\ 3,\ 1)$ 不相等，因为对应分量不相等.

例 2. 假定 $(x-y,\ x+y,\ z-1)=(4,\ 2,\ 3)$，那末由向量相等的定义，得

$$\begin{cases} x-y=4, \\ x+y=2, \\ z-1=3. \end{cases}$$

解上述方程组，得到 $x=3,\ y=-1,\ z=4$.

3. 向量加法与纯量乘法

设 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量:

$$\mathbf{u}=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n) \quad \text{与} \quad \mathbf{v}=(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n),$$

$\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 的和，记作 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$，是由各对应分量相加得到的向量:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ \cdots,\ u_n+v_n).$$

实数 k 与向量 $\mathbf{u}$ 的积，记作 $k\mathbf{u}$，是由 $\mathbf{u}$ 的各分量乘以 k 得到的向量:

$$k\mathbf{u}=(ku_1,\ ku_2,\ \cdots,\ ku_n).$$

可见 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 与 $k\mathbf{u}$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量. 我们又定义

$$-\mathbf{u}=-1\mathbf{u} \quad \text{与} \quad \mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{u}+(-\mathbf{v}).$$

注意对分量个数不相同的向量，其和不予定义.

例 3. 设 $\mathbf{u}=(1,\ -3,\ 2,\ 4)$ 与 $\mathbf{v}=(3,\ 5,\ -1,\ -2)$，则

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(1+3,\ -3+5,\ 2-1,\ 4-2)=(4,\ 2,\ 1,\ 2),$$
$$5\mathbf{u}=(5\cdot1,\ 5\cdot(-3),\ 5\cdot2,\ 5\cdot4)=(5,\ -15,\ 10,\ 20),$$
$$2\mathbf{u}-3\mathbf{v}=(2,\ -6,\ 4,\ 8)+(-9,\ -15,\ 3,\ 6)=(-7,\ -21,\ 7,\ 14).$$

例 4. $\mathbf{R}^n$ 中的向量 $(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ 称为零向量，记作 $\mathbf{0}$. 它与纯量 0 相似之处在于，对任何向量 $\mathbf{u}=(u,\ \cdots,\ u_n)$，

$$\mathbf{u}+\mathbf{0}=(u_1+0,\ u_2+0,\ \cdots,\ u_n+0)=(u_1,\ \cdots,\ u_n)=\mathbf{u}.$$

下列定理描述了 $\mathbf{R}^n$ 中向量在加法与纯量乘法运算下的基本性质.

定理 1-1 对任何向量 $\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}\in\mathbf{R}^n$ 与任何纯量 $k,\ k'\in\mathbf{R}$:

(1) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$; (2) $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$;

(3) $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$; (4) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$;

(5) $k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$; (6) $(k+k')\mathbf{u}=k\mathbf{u}+k'\mathbf{u}$;

(7) $(kk')\mathbf{u}=k(k'\mathbf{u})$; (8) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

注 假定 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中向量，有某一非零纯量 $k\in\mathbf{R}$ 使 $\mathbf{u}=k\mathbf{v}$，那末 $k>0$ 时 $\mathbf{u}$ 称为与 $\mathbf{v}$ 同向；$k<0$ 时与 $\mathbf{v}$ 反向.

4. 点积

设 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量：

$$\mathbf{u}=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n) \quad 与 \quad \mathbf{v}=(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n),$$

$\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 的点积或内积，是由各对应分量乘积相加得到的纯量，记作 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$：

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n.$$

如果 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 的点积是零，即：$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$，那末称它们是正交的(或垂直的).

例 5. 设 $\mathbf{u}=(1,\ -2,\ 3,\ -4)$，$\mathbf{v}=(6,\ 7,\ 1,\ -2)$，$\mathbf{w}=(5,\ -4,\ 5,\ 7)$，则

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=1\cdot6+(-2)\cdot7+3\cdot1+(-4)\cdot(-2)=6-14+3+8=3,$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}=1\cdot5+(-2)\cdot(-4)+3\cdot5+(-4)\cdot7=5+8+15-28=0.$$

于是，$\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{w}$ 正交.

$\mathbf{R}^n$ 中点积的基本性质如下.

定理 1-2 对任何向量 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}\in\mathbf{R}^n$ 与任何纯量 $k\in\mathbf{R}$:

(1) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$; (2) $(k\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$;

(3) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$; (4) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geqslant0$，又当且仅当 $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ 时 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0$.

注 具有上述向量加法，纯量乘法与点积运算的空间 $\mathbf{R}^n$ 通常称为 n 维欧几里得空间.

5. $\mathbf{R}^n$ 中的范数与距离

设 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量：$\mathbf{u}=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)$ 与 $\mathbf{v}=(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n)$.

点 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 之间的距离记作 $d(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$，定义为

$$d(\mathbf{u},\ \mathbf{v})=\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\cdots+(u_n-v_n)^2}.$$

向量 $\mathbf{u}$ 的范数(或长度)记作 $\|\mathbf{u}\|$，定义为 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ 的非负平方根：

$$\|\mathbf{u}\|=\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2}.$$

由定理 1-2，$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geqslant0$，因此平方根存在. 可见，

$$d(\mathbf{u},\ \mathbf{v})=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|.$$

例 6. 设 $\mathbf{u}=(1,\ -2,\ 4,\ 1)$ 与 $\mathbf{v}=(3,\ 1,\ -5,\ 0)$，则

$$d(\mathbf{u},\ \mathbf{v})=\sqrt{(1-3)^2+(-2-1)^2+(4+5)^2+(1-0)^2}=\sqrt{95},$$

$$\|\mathbf{v}\|=\sqrt{3^2+1^2+(-5)^2+0^2}=\sqrt{35}.$$

考虑平面 $\mathbf{R}^2$ 中的两点，比如 $p=(a,\ b)$ 与 $q=(c,\ d)$，则

$$\|p\|=\sqrt{a^2+b^2} \quad 与 \quad d(p,\ q)=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}.$$

即 $\|p\|$ 相当于从原点到 p 点的通常欧几里得长度，而 $d(p,\ q)$ 相当于点 p 与 q 之间的通常欧几里得距离，如图 1-3 所示. 类似的结论对于直线 $\mathbf{R}$ 上与空间 $\mathbf{R}^3$ 中的点也成立.

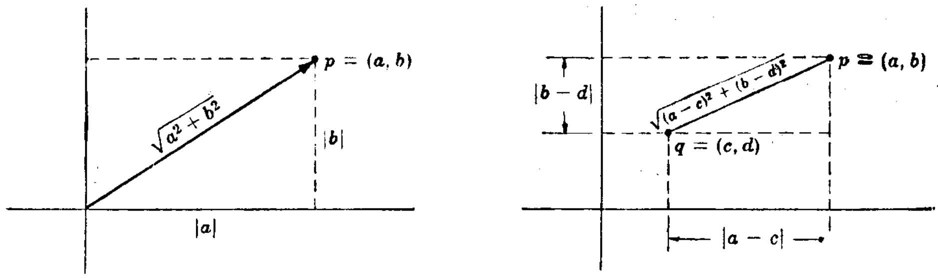

图 1-3

注 如果向量 $\mathbf{e}$ 的范数是 1: $\|\mathbf{e}\|=1$, 那末把 $\mathbf{e}$ 称为单位向量. 可见对任何非零向量 $\mathbf{u}\in\mathbf{R}^n$, 向量 $\mathbf{e}_{\mathbf{u}}=\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ 是与 $\mathbf{u}$ 同向的单位向量.

现在叙述一个通常称为柯西-许瓦尔兹不等式的基本关系式.

定理 1-3(柯西-许瓦尔兹不等式) 对任何向量 $\mathbf{u},\ \mathbf{v}\in\mathbf{R}^n$, 有 $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|\leqslant\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$.

利用上述不等式, 可以用

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

来定义 $\mathbf{R}^n$ 中任意两个非零向量 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 的夹角 θ. 注意, 如果 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$, 那末 $\theta=90^\circ$ (或 $\theta=\pi/2$). 这与前面的正交性定义相符.

6. 复数

复数的集合用 $\mathbf{C}$ 来表示. 形式上, 一个复数是一有序实数对 $(a,\ b)$. 复数的相等、加法与乘法定义如下:

$$(a,\ b)=(c,\ d)\ \text{当且仅当}\ a=c\ \text{与}\ b=d\ \text{时};$$
$$(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d);$$
$$(a,\ b)(c,\ d)=(ac-bd,\ ad+bc).$$

我们认为实数 a 等同于复数 $(a,\ 0)$:

$$a\leftrightarrow(a,\ 0).$$

这是容许的, 因为在这一对应下实数的加法与乘法运算仍旧保留:

$$(a,\ 0)+(b,\ 0)=(a+b,\ 0)\quad\text{与}\quad(a,\ 0)(b,\ 0)=(ab,\ 0).$$

因而, 把 $\mathbf{R}$ 看作 $\mathbf{C}$ 的子集, 以及用 a 代替 $(a,\ 0)$ 总是既容许又方便的.

复数 $(0,\ 1)$ 记作 i, 它有着重要的性质:

$$i^2=ii=(0,\ 1)(0,\ 1)=(-1,\ 0)=-1\quad\text{或}\quad i=\sqrt{-1}.$$

而且, 利用 $\quad(a,\ b)=(a,\ 0)+(0,\ b)\quad$ 与 $\quad(0,\ b)=(b,\ 0)(0,\ 1)$

有

$$(a,\ b)=(a,\ 0)+(b,\ 0)(0,\ 1)=a+bi.$$

记号 $a+bi$ 比 $(a,\ b)$ 方便. 例如复数的和与积可简单地利用交换律、分配律与 $i^2=-1$ 得到:

$$(a+bi)+(c+di)=a+c+bi+di=(a+c)+(b+d)i;$$
$$(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i.$$

复数 $z=(a,\ b)=a+bi$ 的共轭定义且表示为

$$\bar{z}=a-bi.$$

(注意 $z\bar{z}=a^2+b^2$.)另外，如果 $z\neq 0$，那末 z 的逆与用 z 作除法由

$$z^{-1}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i \quad 与 \quad \frac{w}{z}=wz^{-1}$$

给出，其中 $w\in\mathbf{C}$. 又定义

$$-z=-1z \quad 与 \quad w-z=w+(-z).$$

例 7. 假定 $z=2+3i$, $w=5-2i$, 那末

$$z+w=(2+3i)+(5-2i)=2+5+3i-2i=7+i,$$
$$zw=(2+3i)(5-2i)=10+15i-4i-6i^2=16+11i,$$
$$\bar{z}=\overline{2+3i}=2-3i,\quad \bar{w}=\overline{5-2i}=5+2i,$$
$$\frac{w}{z}=\frac{5-2i}{2+3i}=\frac{(5-2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{4-19i}{13}=\frac{4}{13}-\frac{19}{13}i.$$

正如实数可用直线上的点来表示一样，复数可用平面上的点来表示. 特别，我们用平面上的点 (a, b) 表示实部是 a 虚部是 b 的复数 $z=a+bi$. z 的绝对值定义为从 z 到原点的距离，记作 $|z|$:

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

注意，$|z|$ 等于向量 (a, b) 的范数. 且有 $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$.

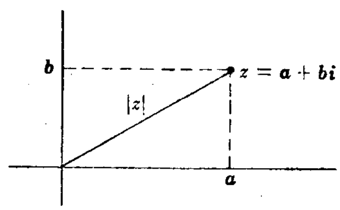

图 1-4

例 8. 假定 $z=2+3i$, $w=12-5i$, 那末

$$|z|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13},\ |w|=\sqrt{144+25}=13.$$

注 在附录B中我们定义称为域的代数结构. 我们强调指出，具有上述加法与乘法运算的复数集 $\mathbf{C}$ 是一个域.

7. $\mathbf{C}^n$ 中的向量

用 $\mathbf{C}^n$ 表示的所有 n 元复数组的集合称为 n 维复空间. 正如实的情形一样，$\mathbf{C}^n$ 中的元称为点或向量，$\mathbf{C}$ 的元称为纯量，而 $\mathbf{C}^n$ 中的向量加法与 $\mathbf{C}^n$ 上的纯量乘法由

$$(z_1, z_2, \cdots, z_n)+(w_1, w_2, \cdots, w_n)=(z_1+w_1, z_2+w_2, \cdots, z_n+w_n),$$
$$z(z_1, z_2, \cdots, z_n)=(zz_1, zz_2, \cdots, zz_n)$$

给出，其中 $z_i, w_i, z\in\mathbf{C}$.

例 9. $(2+3i, 4-i, 3)+(3-2i, 5i, 4-6i)=(5+i, 4+4i, 7-6i)$,

$2i(2+3i, 4-i, 3)=(-6+4i, 2+8i, 6i)$.

设 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的任意向量:

$$\mathbf{u}=(z_1, z_2, \cdots, z_n),\ \mathbf{v}=(w_1, w_2, \cdots, w_n),\quad z_i, w_i\in\mathbf{C}.$$

$\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 的点积或内积定义为

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=z_1\bar{w}_1+z_2\bar{w}_2+\cdots+z_n\bar{w}_n.$$

注意到当 w_i 是实数时有 $w_i=\bar{w}_i$, 因而这个定义化为前面实数的情形. $\mathbf{u}$ 的范数定义为

$$\|\mathbf{u}\|=\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}=\sqrt{z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+\cdots+z_n\bar{z}_n}=\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2}.$$

注意，$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ 以至 $\|\mathbf{u}\|$ 都是实数，当 $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ 时它们是正数，$\mathbf{u}=\mathbf{0}$ 时是 0.

例 10. 设 $\mathbf{u}=(2+3i, 4-i, 2i)$, $\mathbf{v}=(3-2i, 5, 4-6i)$, 则

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}&=(2+3i)\overline{(3-2i)}+(4-i)\overline{(5)}+(2i)\overline{(4-6i)}\\&=(2+3i)(3+2i)+(4-i)(5)+(2i)(4+6i)=13i+20-5i-12+8i=8+16i,\end{aligned}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=(2+3i)\overline{(2+3i)}+(4-i)\overline{(4-i)}+(2i)\overline{(2i)}$$
$$=(2+3i)(2-3i)+(4-i)(4+i)+(2i)(-2i)=13+17+4=34,$$
$$\|\mathbf{u}\|=\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}=\sqrt{34}.$$

具有上述向量加法,纯量乘法与点积运算的空间 $\mathbf{C}^n$ 称为 n 维复欧几里得空间.

注 如果 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ 定义为 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=z_1w_1+\cdots+z_nw_n$, 那末即使 $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$, 也可能有 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0$, 例如 $\mathbf{u}=(1, i, 0)$. 事实上, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ 甚至可以不是实数.

§1.2 问题及其解

1. $\mathbf{R}^n$ 中的向量

1.1 计算: (i) $(3, -4, 5)+(1, 1, -2)$; (ii) $(1, 2, -3)+(4, -5)$; (iii) $-3(4, -5, -6)$; (iv) $-(-6, 7, -8)$.

解: (i) 对应分量相加:

$$(3, -4, 5)+(1, 1, -2)=(3+1, -4+1, 5-2)=(4, -3, 3).$$

(ii) 这个和不予定义,因为两向量的分量数不同.

(iii) 用纯量 -3 乘每个分量:

$$-3(4, -5, -6)=(-12, 15, 18).$$

(iv) 用 -1 乘每个分量:

$$-(-6, 7, -8)=(6, -7, 8).$$

1.2 设 $\mathbf{u}=(2, -7, 1)$, $\mathbf{v}=(-3, 0, 4)$, $\mathbf{w}=(0, 5, -8)$. 求 (i) $3\mathbf{u}-4\mathbf{v}$; (ii) $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}-5\mathbf{w}$.

解: 先作纯量乘法再作向量加法.

(i) $3\mathbf{u}-4\mathbf{v}=3(2, -7, 1)-4(-3, 0, 4)=(6, -21, 3)+(12, 0, -16)=(18, -21, -13)$.

(ii) $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}-5\mathbf{w}=2(2, -7, 1)+3(-3, 0, 4)-5(0, 5, -8)=(4, -14, 2)+(-9, 0, 12)+(0, -25, 40)=(4-9+0, -14+0-25, 2+12+40)=(-5, -39, 54)$.

1.3 求 x 与 y, 使得 $(x, 3)=(2, x+y)$.

解: 由于两个向量相等,因此各对应分量彼此相等:

$$\begin{cases}x=2,\\3=x+y,\end{cases}$$

把 $x=2$ 代入第二个方程,得 $y=1$. 于是 $x=2$, $y=1$.

1.4 求 x 与 y, 使得 $(4, y)=x(2, 3)$.

解: 将纯量 x 乘入,得 $(4, y)=x(2, 3)=(2x, 3x)$.

令各对应分量彼此相等:

$$\begin{cases}4=2x,\\y=3x.\end{cases}$$

解关于 x 与 y 的线性方程组得 $x=2$, $y=6$.

1.5 求 x, y, z, 使得 $(2, -3, 4)=x(1, 1, 1)+y(1, 1, 0)+z(1, 0, 0)$.

解: 先将纯量 x, y, z 乘入,然后相加:

$$\begin{aligned}(2,\ -3,\ 4)&=x(1,\ 1,\ 1)+y(1,\ 1,\ 0)+z(1,\ 0,\ 0)\\&=(x,\ x,\ x)+(y,\ y,\ 0)+(z,\ 0,\ 0)\\&=(x+y+z,\ x+y,\ x).\end{aligned}$$

令各对应分量彼此相等，得

$$\begin{cases}x+y+z=2,\\x+y\quad\ =-3,\\x\qquad\quad =4.\end{cases}$$

解此方程组，把 $x=4$ 代入第二个方程，得 $4+y=-3$ 或 $y=-7$. 再代入第一个方程，求得 $z=5$. 于是 $x=4$, $y=-7$, $z=5$.

1.6 证明定理 1-1：对任何向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\in\mathbf{R}^n$ 与任何纯量 $k, k'\in\mathbf{R}$,

(i) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$; (ii) $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$;

(iii) $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$; (iv) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$;

(v) $k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$; (vi) $(k+k')\mathbf{u}=k\mathbf{u}+k'\mathbf{u}$;

(vii) $(kk')\mathbf{u}=k(k'\mathbf{u})$; (viii) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

解：设 u_i, v_i, w_i 分别是 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 的第 i 个分量.

(i) 由定义，u_i+v_i 是 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 的第 i 个分量，因此 $(u_i+v_i)+w_i$ 是 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$ 的第 i 个分量. 另一方面，v_i+w_i 是 $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ 的第 i 个分量，因此 $u_i+(v_i+w_i)$ 是 $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ 的第 i 个分量. 但 u_i, v_i, w_i 都是实数，对它们结合律成立，即

$$(u_i+v_i)+w_i=u_i+(v_i+w_i),\quad i=1,\ \cdots,\ n.$$

于是，$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$，因为它们的各对应分量相等.

(ii) 这里，$\mathbf{0}=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$，因此

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{0}&=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)+(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)\\&=(u_1+0,\ u_2+0,\ \cdots,\ u_n+0)=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)=\mathbf{u}.\end{aligned}$$

(iii) 由 $-\mathbf{u}=-1(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)=(-u_1,\ -u_2,\ \cdots,\ -u_n)$，得

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+(-\mathbf{u})&=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)+(-u_1,\ -u_2,\ \cdots,\ -u_n)\\&=(u_1-u_1,\ u_2-u_2,\ \cdots,\ u_n-u_n)=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

(iv) 由定义，u_i+v_i 是 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 的第 i 个分量，而 v_i+u_i 是 $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ 的第 i 个分量. 但 u_i 与 v_i 都是实数，对它们交换律成立，即

$$u_i+v_i=v_i+u_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

于是 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$，因为它们的各对应分量相等.

(v) 由于 u_i+v_i 是 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 的第 i 个分量，因此 $k(u_i+v_i)$ 是 $k(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ 的第 i 个分量. 由于 ku_i 与 kv_i 分别是 $k\mathbf{u}$ 与 $k\mathbf{v}$ 的第 i 个分量，因此 ku_i+kv_i 是 $k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$ 的第 i 个分量. 但 k, u_i 与 v_i 都是实数，因此

$$k(u_i+v_i)=ku_i+kv_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

于是，$k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$，因为它们的各对应分量相等.

(vi) 注意到第一个加号指两个纯量 k 与 k' 的加法，而第二个加号指两个向量 $k\mathbf{u}$ 与 $k'\mathbf{u}$ 的加法.

由定义，$(k+k')u_i$ 是向量 $(k+k')\mathbf{u}$ 的第 i 个分量. 由于 ku_i 与 $k'u_i$ 分别是 $k\mathbf{u}$ 与 $k'\mathbf{u}$ 的第 i 个分量，因此 $ku_i+k'u_i$ 是 $k\mathbf{u}+k'\mathbf{u}$ 的第 i 个分量. 但 k, k', u_i 都是实数，因此

$$(k+k')u_i=ku_i+k'u_i,\quad i=1,\ \cdots,\ n.$$

于是，$(k+k')\mathbf{u}=k\mathbf{u}+k'\mathbf{u}$，因为它们的各对应分量相等.

(vii) 由于 $k'u_i$ 是 $k'\mathbf{u}$ 的第 i 个分量，因此 $k(k'u_i)$ 是 $k(k'\mathbf{u})$ 的第 i 个分量. 但 $(kk')u_i$ 是 $(kk')\mathbf{u}$ 的第 i 个分量，而 $k,\ k',\ u_i$ 都是实数，因此

$$(kk')u_i=k(k'u_i),\quad i=1,\ \cdots,\ n.$$

于是，$(kk')\mathbf{u}=k(k'\mathbf{u})$，因为它们的各对应分量相等.

(viii) $1\cdot\mathbf{u}=1(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)=(1u_1,\ 1u_2,\ \cdots,\ 1u_n)=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)=\mathbf{u}$.

1.7 证明对任何向量 $\mathbf{u}$，$0\mathbf{u}=\mathbf{0}$. 显然其中第一个 0 是纯量，第二个 $\mathbf{0}$ 是向量.

解：**方法 1** $0\mathbf{u}=0(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)=(0u_1,\ 0u_2,\ \cdots,\ 0u_n)=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)=\mathbf{0}$.

方法 2 由定理 1-1,

$$0\mathbf{u}=(0+0)\mathbf{u}=0\mathbf{u}+0\mathbf{u},$$

两边同时加上 $-0\mathbf{u}$，即得要求的结果.

2. 点积

1.8 计算 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$，其中：(i) $\mathbf{u}=(2,\ -3,\ 6)$，$\mathbf{v}=(8,\ 2,\ -3)$；(ii) $\mathbf{u}=(1,\ -8,\ 0,\ 5)$，$\mathbf{v}=(3,\ 6,\ 4)$；(iii) $\mathbf{u}=(3,\ -5,\ 2,\ 1)$，$\mathbf{v}=(4,\ 1,\ -2,\ 5)$.

解：(i) 对应分量相乘，然后相加：$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=2\cdot8+(-3)\cdot2+6\cdot(-3)=-8$.

(ii) 分量个数不相同的向量之间的内积不予定义.

(iii) 对应分量相乘然后相加：$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=3\cdot4+(-5)\cdot1+2\cdot(-2)+1\cdot5=8$.

1.9 确定 k，使得向量 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 正交，其中：(i) $\mathbf{u}=(1,\ k,\ -3)$，$\mathbf{v}=(2,\ -5,\ 4)$；(ii) $\mathbf{u}=(2,\ 3k,\ -4,\ 1,\ 5)$，$\mathbf{v}=(6,\ -1,\ 3,\ 7,\ 2k)$.

解：对每种情形，算出 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$，令它们等于 0，再解出 k.

(i) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=1\cdot2+k\cdot(-5)+(-3)\cdot4=2-5k-12=0,\ -5k-10=0,\ k=-2$;

(ii) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=2\cdot6+3k\cdot(-1)+(-4)\cdot3+1\cdot7+5\cdot2k=12-3k-12+7+10k=0,\ k=-1$.

1.10 证明定理 1-2：对任何向量 $\mathbf{u},\mathbf{v},\ \mathbf{w}\in\mathbf{R}^n$ 与任何纯量 $k\in\mathbf{R}$,

(i) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$; (ii) $(k\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$;

(iii) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$; (iv) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geqslant0$，当且仅当 $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ 时，$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0$.

解：设 $\mathbf{u}=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)$，$\mathbf{v}=(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n)$，$\mathbf{w}=(w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_n)$.

(i) 由于 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ \cdots,\ u_n+v_n)$，因此

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}&=(u_1+v_1)w_1+(u_2+v_2)w_2+\cdots+(u_n+v_n)w_n\\&=u_1w_1+v_1w_1+u_2w_2+v_2w_2+\cdots+u_nw_n+v_nw_n\\&=(u_1w_1+u_2w_2+\cdots+u_nw_n)+(v_1w_1+v_2w_2+\cdots+v_nw_n)\\&=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}.\end{aligned}$$

(ii) 由于 $k\mathbf{u}=(ku_1,\ ku_2,\ \cdots,\ ku_n)$，因此

$$(k\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=ku_1v_1+ku_2v_2+\cdots+ku_nv_n=k(u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n)=k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}).$$

(iii) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n=v_1u_1+v_2u_2+\cdots+v_nu_n=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$.

(iv) 由于对每个 i，u_i^2 是非负的；又由于非负实数的和是非负的，因此

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2\geqslant0.$$

而且，当且仅当对每个 i，$u_i=0$ 时，即 $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ 时，$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0$