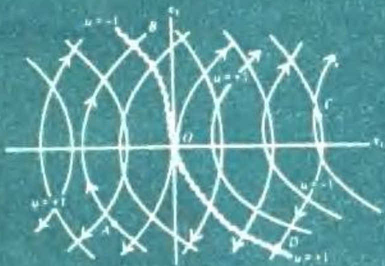
优化数学要义

——及在经济学和企业中的应用

韦澄芬 林少宫 李楚霖 著



商务印书馆

YŌUHUÀ SHÙXUÉ YÀOYÌ

优化数学要义

及在经济学和企业中的应用

韦澄芬　林少宫　李楚霖 著

商 务 印 书 馆 出 版

（北京王府井大街36号）

新华书店北京发行所发行

文字六〇三厂印刷

统一书号：4017·315

1985年9月第1版　　开本 850×1168 1/32

1985年9月北京第1次印刷　　字数 253 千

印数 6 500 册　　印张 $10\frac{5}{8}$

[redacted]定价：2.40 元

序

本书企图对常用的各种优化方法的基本概念作一介绍。它主要是为从事经济学、运筹学和管理工程的教师、研究人员和科技工作者而写的。这些人员需要用优化技术作为主要分析工具，同时也具备有包括偏微商和台劳定理在内的一年或一年半的微积分课程的一般知识，并且也懂得一些基本的向量、矩阵、集合论和初等概率论术语。他们常常接触到诸如拉格朗日乘数法，一、二阶条件，线性规划与活动分析，对偶问题，库恩—塔克条件，以及较新近的动态规划与最优控制等名词或表达式。他们已经用到或将要用到这些优化技术，如能对作为这些技术背景的数学概念有一个更清楚的理解，就会有豁然开朗之感。但是他们并不立即需要象"定理证明"的那种形式化论述，动辄抽象到 n 个变元的一般情形，甚至用一些艰涩的术语和符号，使非数学专业的人望而生畏。本书力求做到明晰并言之有理。我们希望，通过详细的、一步一步演算的例解，把优化问题中所用到的一些工具，阐述清楚。

本书原先在美国密执安州立大学经济系顾应昌教授的建议和协助下，由该校数学系韦澄芬教授于 1977 年用英文写成并在美国出版．书名为 Elements of Optimization with Applications in Economics and Business。1981 年夏，顾、韦二位教授访问华中工学院并为经济研究所、数学系、经济管理工程系讲学时，我们考虑了当前国内的迫切需要，经商议决定出本书的中文版，并约请本院林少宫、李楚霖二位教授作为合作者，在原书移译的基础上加以修改补充。现在，林、李两同志除作了一些次要的更动外，特别加写

了第九(随机规划)和第十(集合的概念和简单的均衡模型)两章。

本书中文版的筹划出版，一直得到商务印书馆副总编辑胡企林同志的热情支持，谨表感谢。

近年来，在我国经济学界以至整个社会科学界，随着对内搞活经济和对外实行开放这一政策的日益深入人心，不少人士开始认识到，在对问题进行定性分析的同时，或在以定性分析为主导的前提下，必须相应地进行和加强定量分析。对于现代化经济建设和文化建设，围绕最优化运算的数量分析是一种尤其重要而不可缺少的方法。《优化数学要义》一书正是适应了这种日渐增大的需要而问世的，它的中文增订本的出版是深值庆幸的。

最后，尹维珠同志耐心协助本书中文稿的抄录、校对等整理工作，特此致谢。

华中工学院经济研究所

张培刚谨识　1984年9月

目　录

第一章　一元函数的极值……1
1.1　极值点……1
1.2　必要条件和充分条件……2
1.3　一元函数的台劳公式……3
1.4　内极值的必要条件……4
1.5　极值的充分条件……5
1.6　内点极值的必要充分条件……11
1.7　评注……13
练习……13
第二章　二元或多元函数的极值(无约束的情形)……15
2.1　必要条件……15
2.2　二元函数的台劳公式——必要条件……15
2.3　二元函数的充分条件……17
2.4　关于n元函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的充分条件……25
练习……31
第三章　受约束的二元或多元函数……33
3.1　导言……33
3.2　必要条件……34
3.3　充分条件……36
3.4　例……43
练习……58
第四章　多个函数的联立最优化问题……60
4.1　问题的描述……60
4.2　用图形说明巴列托最优点的含义……63

4.3 在生产、消费和经济中巴列托最优的必要条件 ……67
4.4 巴列托最优性的推广 ……71
练习 ……73
第五章 线性规划 ……76
5.1 线性规划问题的一般性质 ……76
5.2 几何意义和代数意义 ……82
5.3 单纯形法 ……97
5.4 复杂情况和调整方法 ……105
5.5 解最小化问题 ……117
5.6 线性规划的假设 ……118
练习 ……120
第六章 线性规划——对偶分析和灵敏度分析 ……122
6.1 对偶 ……122
6.2 某些定理的证明 ……135
6.3 对偶性的经济意义 ……137
6.4 对偶单纯形法 ……140
6.5 灵敏度分析 ……142
练习 ……154
第七章 非线性规划 ……155
7.1 一般的非线性规划问题 ……155
7.2 库恩—塔克条件 ……158
7.3 库恩—塔克条件的进一步讨论 ……162
7.4 二次规划 ……172
7.5 可分函数 ……183
7.6 库恩—塔克条件在经济上的某些应用 ……193
7.7 分式规划 ……200
练习 ……204
第八章 最优控制 ……205
8.1 控制问题和某些术语 ……205

8.2 古典变分法 ……210
8.3 极大值原理(现代变分法) ……224
8.4 极大值原理(辅助变量和约束) ……234
8.5 动态规划 ……237
8.6 动态规划和变分法 ……247
8.7 随机控制和自适应控制 ……250
练习 ……250
第九章 随机规划 ……254
9.1 问题的提出 ……254
9.2 数学期望的概念和应用 ……255
9.3 二阶段决策 ……262
9.4 概率约束模型 ……270
9.5 评价和展望 ……272
练习 ……272
第十章 集合的概念和简单的均衡模型 ……275
10.1 均衡的数学模型 ……275
10.2 集合的概念 ……279
10.3 集合的基本运算 ……280
10.4 映像的概念 ……283
10.5 距离和收敛性 ……285
10.6 闭集和开集 ……287
10.7 不动点定理 ……292
练习 ……297
附录 I 二次型和特征根 ……298
附录 II 凸性和准凸性 ……300
习题解答 ……302
参考文献 ……326

第一章　一元函数的极值

1.1　极值点

设 $f(x)$ 是实变量 x 的函数，如果 $f(x_0)$ 比 x_0 的某一邻域内所有 x 的函数值 $f(x)$ 都大（或都小），则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处达到严格的或强的局部极大(或极小)。在这个定义中要注意，只要存在满足上述条件的邻域，就可以说 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处达到极大（或极小），而不管这个邻域有多大。

如果 $f(x_0)$ 比整个定义域上所有 $x(\neq x_0)$ 的函数值 $f(x)$ 都大（或都小），则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处达到严格的全局极大(或极小)。

如果用 $\geqslant$（或 $\leqslant$）代替严格不等号 $>$（或 $<$），则称 $f(x)$ 在 x_0 达到弱的(局部或全局)极大(或极小)。

把点 $(x_0, f(x_0))$ 称为局部或全局极大值(或极小值)点，把极大值点或极小值点统称为极点。我们看到，关于函数极大值的讨论实质上类似于极小值的讨论，因此极值问题既可说是极大值问题也可以说是极小值问题。

在图 1.1.1 中，函数 $f(x)$ 定义在区间 $a<x<b$ 上。p_1、p_3、p_5

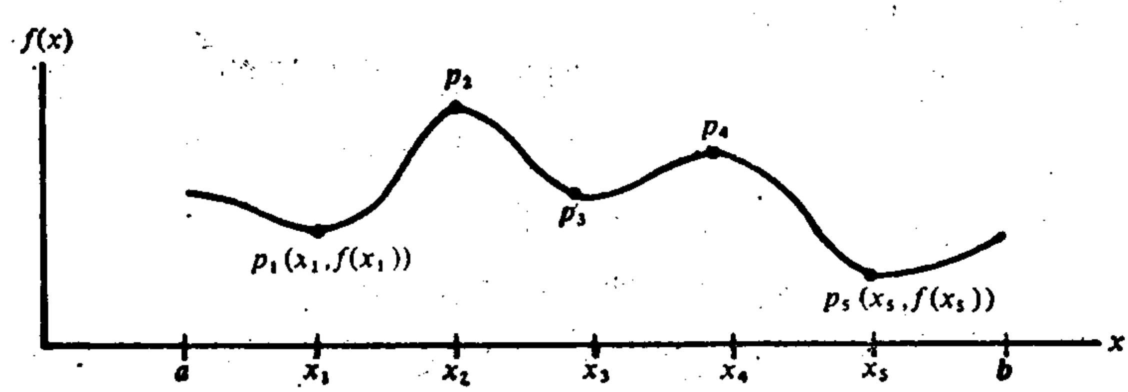


图 1.1.1

是局部极小值点；p_2、p_4是局部极大值点。p_5是全局极小值点，而p_2是全局极大值点。

1.2 必要条件和充分条件

我们主要关心的是局部极值的必要条件和充分条件。陈述S的必要条件C_n是指：C_n必须是真的，S才会是真的。也可以表示为："S成立，仅当C_n成立。"

陈述S的充分条件C_s是指：只要C_s是真的，S就是真的。也可以说，"若C_s，则S。"或"当C_s成立时S成立。"

一般说来，一个必要条件并不同时也是充分条件。当条件C对陈述S而言，既是必要条件又是充分条件时，就称C是必要和充分条件。有时说成"S成立，当且仅当C成立。"

有时，人们把必要条件称为一阶条件，把充分条件称为二阶条件。这是因为极值点的必要条件常常涉及一阶导数，而充分条件常常涉及二阶导数的缘故。关于这一点在下一节将会看到。不过要注意，它们并不是同义词。事实上，仅是二阶条件并不保证它一定是极值。

例 1　设：

陈述S是老陈住在湖北；

C_1是老陈住在中国；

C_2是老陈住在武汉；

C_3是老陈住在居于交通枢纽所在的华中地区的一个省内。

对S而言，C_1是一个必要条件，但它不是充分条件。一个人可以住在中国，但他不一定住在湖北。

对S而言，C_2是充分条件，但它不是必要条件。一个住在武汉的人，他必住在湖北。可是湖北的居民不一定非住在武汉不可。

对S而言，C_3是必要且充分条件。

例 2 设$f(x)$是区间$a<x<b$上x的连续函数，并在$x=x_0$上有连续的二阶导数，此处$a<x_0<b$。设陈述S是$f(x)$在$x=x_0$达到局部极小；

C_1是在$x=x_0$处$f'(x)=df(x)/dx=0$;

C_2是在$x=x_0$处$f'(x_0)=0$且$f''(x_0)>0$。

下面将证明，对S而言，C_1是必要条件，而C_2是充分条件。C_1不是充分的，因为即使$(x_0, f(x_0))$不是极值点也可能有$f'(x_0)=0$。这时$(x_0, f(x_0))$可能是一个拐点，参看图1.2.1。

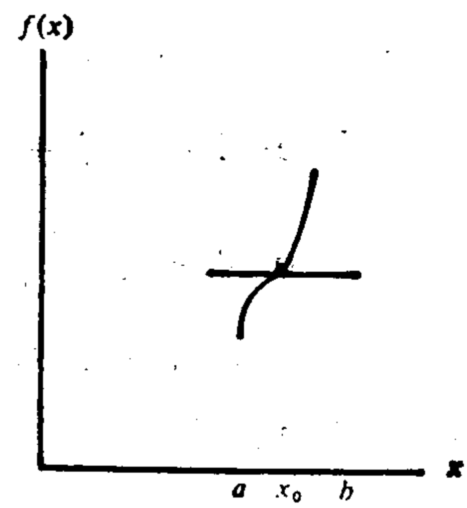


图 1.2.1

虽然C_2是充分的，但它不是必要的。考虑函数$f(x)=x^4$。它在$x=0$达到极小，可是$f''(0)$不是正的；$f''(0)=0$。

1.3 一元函数的台劳(Taylor)公式

在讨论连续的一元函数的极值问题时，常常使用台劳公式。我们不给出台劳定理的证明，这个证明要用到导数的中值定理。读者可在任何一本微积分教科书中找到这个证明。

定理 1.3.1(台劳定理) 设数$a<b$，而n为一正整数，并设函数f的n阶导数$f^{(n)}(x)$存在，$a\leqslant x\leqslant b$。则存在一个数ξ_n，使得$a<\xi_n<b$和

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots$$
$$+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3+\cdots \tag{1.3.1}$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}(b-a)^n. \qquad \square$$

数 ξ_n 和 n 有关，一般说来 $f^{(n)}(\xi_n)$ 的精确值不易求得。但可以证明，当 n 足够大时，$(f^{(n)}(\xi_n)/n!)(b-a)^n$ 是很小的，并且可以给出它的界限。

例 1　设 $f(x)=e^x, a=0, b=1, n=4$。则 $f(b)=e, f(a)=e^0=1$, $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=f^{(iv)}(x)=e^x$。因为 $b-a=1$, 所以

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{f^{(iv)}(\xi_4)}{4!},$$

其中 $$0<\xi_4<1; \qquad \left|\frac{f^{(iv)}(\xi_4)}{4!}\right|<\frac{e}{24}<\frac{1}{8}.$$

例 2　$f(x)=\log x, a=1,\ b=1.5,\ n=4$。$f'(x)=1/x,\ f''(x)=$ $=-x^{-2}, f'''(x)=2x^{-3}, f^{(iv)}(x)=-6x^{-4}$。于是

$$\log 1.5=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{6}{4!}\left(\frac{1}{\xi_4}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4,$$

其中 $$1<\xi_4<1.5; \qquad \left|-\frac{6}{4!}\left(\frac{1}{\xi_4}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\right|<\frac{1}{64}.$$

1.4　内极值的必要条件

如果连续函数 $f(x)$ 在内点 $x=x_0$ 上有局部极大值，则在 x_0 的某一邻域内的所有 $x(\neq x_0)$ 都有 $f(x_0)-f(x)>0$, 现设 f 在 x_0 及 x_0 的某一邻域内有连续的一、二阶导数，并把台劳公式写成为

$$f(x)-f(x_0)=$$
$$=\left[f'(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)\right](x-x_0), \qquad (1.4.1)$$

其中 ξ 位于 x 和 x_0 之间。因为 $f''(x)$ 是连续的，从而 $\frac{1}{2}f''(\xi)\times$ $\times(x-x_0)$ 是有界的，因此可以选取 x_0 的一个适当邻域，使得这一项的绝对值小于任意预先指定的正数。设 $f'(x_0)\neq 0$。我们仅考

虑 x_0 的这样的邻域，使得在此邻域内 (1.4.1) 方括号中的表达式的符号总是和 $f'(x_0)$ 的符号一样。因为在此邻域中存在点 x，使得 $x>x_0(x-x_0>0)$；也存在另一些点 x，使得 $x<x_0(x-x_0<0)$，由此推得在此邻域内既存在使 $f(x)-f(x_0)>0$ 的点 x，也存在另一些使 $f(x)-f(x_0)<0$ 的点 x。因此，如果 $f'(x_0)\neq 0$ 则 $f(x_0)$在此邻域中就不能为极大值。

如果 $f'(x_0)\neq 0$，可类似地证明 $f(x_0)$不能是局部极小值。从而有定理：

定理 1.4.1 设 $f(x)$ 是连续[①] 函数，它在 x_0 及 x_0 的某一邻域内有连续的二阶导数（从而也就有连续的一阶导数）。$f(x_0)$是一个局部极值的必要条件是 $f'(x_0)=0$。 □

所有满足 $f'(x_0)=0$ 的点$(x_0,\ f(x_0))$都称为临界点或驻点。

1.5 极值的充分条件

现在设 $f'(x_0)=0$ 且 $f(x)$ 有连续的三阶导数，在(1.3.1)中取 $n=3$ 并把它改写为

$$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{2}\left[f''(x_0)+\frac{1}{3}f'''(\xi)(x-x_0)\right](x-x_0)^2, \tag{1.5.1}$$

其中 ξ 位于 x 和 x_0 之间，因为 $f'''(\xi)(x-x_0)$在 x_0 的一适当的邻域内可任意小，所以当 $f''(x_0)\neq 0$ 时，(1.5.1) 的整个右边就有和 $f''(x_0)$ 一样的符号。由此，如果 $f''(x_0)>0$，则在此邻域内有 $f(x)-f(x_0)>0$，这时 $f(x_0)$就是局部极小值。如果 $f''(x_0)<0$，则在此邻域内有 $f(x)-f(x_0)<0$，这时 $f(x_0)$ 就是局部极大值。这样就证明了下述定理：

定理 1.5.1 设 $f(x)$ 是一连续函数，且在 x_0 及x_0 的某一邻域内

① 由导数的定义知，此处“连续”一词是多余的。

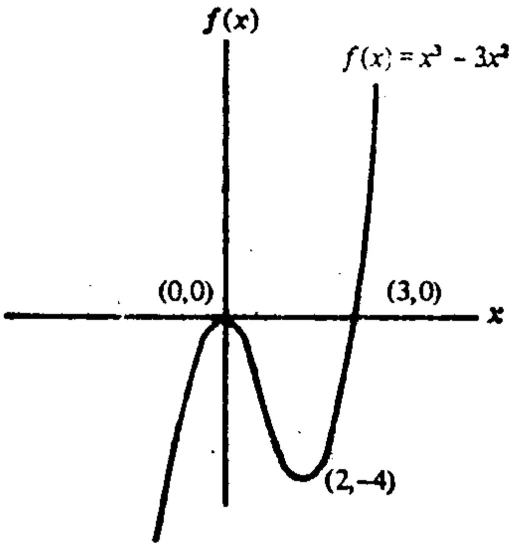


图 1.5.1

有连续的三阶导数。$f(x_0)$ 是局部极小值(极大值)的一个充分条件是 $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)>0$($f''(x_0)<0$)。 □

例 1① 设 $f(x)=x^3-3x^2$。试判断 $f(1)$是否为局部极值。

解: $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$,于是 $f'(1)=-3\neq 0$。因此 $f(1)$ 不是局部极值。

例 2 求函数 $f(x)=x^3-3x^2$ 的极值。

解:令 $f'(x)$等于 0 并解之: $f'(x)=3x(x-2)=0$, 解出 $x=0$ 或$x=2$。现检查$f''(0)$和$f''(2)$的符号: $f''(x)=6x-6$. $f''(0)=-6<0$, $f''(2)=6>0$。从而这个函数在 $x=0$ 有极大值,在 $x=2$ 有极小值。

例 3 在经济学中,我们有兴趣使某种商品 (Q) 的销售总利润 $T=T(q)$为最大。设 q 是这种商品的产量,$p=p(q)$是每单位的售价,而 $C=C(q)$是生产的总成本。因为总利润=总收入(pq)-总成本,故有

$$T=pq-C.$$

为了使 T 最大,其必要条件是

$$\frac{dT}{dq}=\frac{d(pq)}{dq}-\frac{dC}{dq}=0, \text{即} \frac{d(pq)}{dq}=\frac{dC}{dq};$$

即为了得到最大利润,其必要条件是边际收入要等于边际成本。

设对某一商品有

$$C=\frac{1}{3}q^3-4q^2+15q+2,$$

① 在下面的例子中,设每个函数的定义域都是实数轴。

并设其需求函数为

$$p=10-q.$$

我们希望求出使利润最大的生产水平。于是，总收入

$$R=10q-q^2,$$

而总利润

$$T=10q-q^2-\left(\frac{1}{3}q^3-4q^2+15q+2\right)$$

$$=-\frac{1}{3}q^3+3q^2-5q-2,$$

并且
$$\frac{dT}{dq}=-q^2+6q-5.$$

令 $\frac{dT}{dq}=0$，并解之得 $q=5$ 或 $q=1$。在 $q=5$ 处，

$$\frac{d^2T}{dq^2}=-2q+6=-4<0.$$

因此生产 5 单位的产品将获得最大利润，这时的利润是 $\frac{19}{3}$.

例 4 设

$$C=40q+20,000$$

和
$$p=160-0.01q,$$

其中 q 是每星期的产量，而价格和成本都以分计算。则

$$\text{总收入}=pq=160q-0.01q^2;$$

$$\text{边际收入}=\frac{d(pq)}{dq}=160-0.02q;$$

$$\text{边际成本}=\frac{dC}{dq}=40.$$

为了得到最大利润，必要条件是

$$\frac{d(pq)}{dq}=\frac{dC}{dq},$$

于是 $160-0.02q=40$，即 $q=6,000$ 单位/每星期。

由于 $$\left.\frac{d^2T}{dq^2}\right|_{q=6,000}=-0.02<0.$$

故在 $q=6,000$ 处有极大值。在这个生产水平上，

$$\begin{aligned}p&=160-0.01\times 6,000\\&=160-60=100\text{ 分/每单位}\end{aligned}$$

总利润将是

$$T=pq-C=100\cdot 6000-(40\cdot 6000+20,000)=3,400\text{ 元}.$$

一般说来，一个临界点并不一定给出极值，但在如上的一类应用问题中，我们往往只算到一阶导数就停止了。这时，通过简单计算容易验证，$q=6,000$ 是给出最大利润的生产水平。

例 5 在统计学中，常常要寻求概率分布函数的某一参数的最大似然估计量。设随机变量遵从泊松(Poisson)分布

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\qquad \text{对 } x=0,1,2,3,\cdots,\text{和 } \lambda\geqslant 0.$$

为了求出参数 λ 的最大似然估计量，作 n 次独立观测 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。它们遵从同一分布：

$$f(x_i)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}.\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

构造似然函数 $L(\lambda)$，也就是这 n 个 X_i 的联合分布：

$$L(\lambda)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_i^n x_i!}$$

(参看脚注①)。求使 $L(\lambda)$(或等价地使 $\log L(\lambda)$)极大的 λ 值就得到最大似然估计量 $\hat{\lambda}$。对此问题，易于算出

$$\frac{d\log L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}(-n\lambda+(\Sigma x_i)\log\lambda-\log\Pi x_i!)=-n+\frac{\Sigma x_i}{\lambda}.$$

---

① 符号 $\Pi_{i=1}^{n}a_i$ 和 $\Sigma_{i=1}^{n}a_i$ 分别表示连乘和相加，即 $\Pi_{i=1}^{n}a_i=a_1\cdot a_2\cdots a_n$，而 $\Sigma_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n$。

极值的必要条件是

$$-n+\frac{\Sigma x_i}{\lambda}=0.$$

解之得 $\lambda=\Sigma x_i/n$。直接代入或通过计算知

$$\frac{d^2\log L(\lambda)}{d\lambda^2}=\frac{-\Sigma x_i}{\lambda^2}<0.$$

我们看到这个 λ 值不但使 $\log L(\lambda)$ 而且也使 $L(\lambda)$ 达到极大，因此 $\hat{\lambda}=\Sigma x_i/n$。

习惯上，用 $\bar{x}$ 记 $\Sigma x_i/n$，于是 $\hat{\lambda}=\bar{x}$。

例 6 某厂商想在给定了商品销售量和存货的购入价格的条件下，把它的存货投资成本减到最小。令

V＝厂商的年销售量；

p＝每单位存货的购入价格；

q＝存货的每次购买数量；

i＝投放于购买存货的资金的利息率；

a＝购买存货的年度固定成本；

b＝每购买一次存货的可变成本。

每年购买存货的次数是 V/q，假定存货量按均匀速率提空，则平均现有存货量为 $q/2$，存货投资的年度维持成本为

$$\frac{ipq}{2}.$$

这一成本应加到年度购买成本 $a+(bV/q)$ 中去，从而给出存货投资的年度总成本

$$c=c(q)=a+\frac{bV}{q}+\frac{ipq}{2}.$$

将 c 对 q 微分并令其为零而得

$$\frac{dc}{dq}=-\frac{bV}{q^2}+\frac{ip}{2}=0,$$

由此解出

$$q=\sqrt{\frac{2bV}{ip}}.$$

这就是使总成本达到最小的最优购买量，可由二阶导数

$$\frac{d^2c}{dq^2}=\frac{2bV}{q^3}>0.$$

证实。这表明每次购买存货的最优量，亦即最优平均存货量，与厂商的总销售量的平方根成正比。

假如购买价格 p 不是常数而是 q 的函数，比方说，有可能按每次购买数量的大小打折扣，则

$$c=a+\frac{bV}{q}+\frac{ip(q)q}{2},$$

并且
$$\frac{dc}{dq}=-\frac{bV}{q^2}+\frac{i}{2}\left(p+q\frac{dp}{dq}\right),$$

这时令导数为零得到

$$q^2\left(p+q\frac{dp}{dq}\right)=\frac{2bV}{i},$$

因而
$$q=\sqrt{\frac{2bV}{i\left(p+q\frac{dp}{dq}\right)}}.$$

仍表明 q 与销售量的平方根成正比，但与 $p+q(dp/dq)$ 的大小有相反的变化关系。一般说来，由于有数量折扣的可能性，可以认为 dp/dq 是负的。因此，如果存货购入价格随购买量的增加而急剧下降的话，那末最优存货购买量会变大得多。

例 7　这个有趣的例子，说明怎样利用求极大的方法，证明在给定的投资水平下，利息率上升将使厂商最优经营期限缩短的经济原理。令

P＝投资时预期的厂商利润；

I＝投资额；

t＝投资持续期；