再生核的理论与应用

张新建 著

3

科学出版社
www.sciencep.com

再生核的理论与应用

张新建　著

科学出版社
北京

O177.3
Z212

内 容 简 介

本书系统讨论再生核理论及其在数学领域中的应用，内容包括再生核的一般性质，半内积空间的再生核、W_2^m 空间的再生核、解析函数空间再生核的基本理论和构造方法，以及再生核在样条函数、插值与逼近、算子方程中的应用，同时还介绍了再生核空间中的逼近和算子理论等方面的基本内容. 本书的主要特色：将 W_2^m 空间的内积和再生核理论纳入半内积空间理论的统一框架；用 Green 函数方法统一讨论 W_2^m 空间的再生核的构造；对几类常系数微分算子所对应的再生核进行了详细讨论，并探讨了再生核理论中的 Green 函数方法与其他方法的联系；介绍了再生核与样条函数的若干联系.

本书可作为高等院校数学专业高年级大学生、研究生和教师的教材或教学参考书，也可供工科相关专业的研究生和工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

再生核的理论与应用/张新建著. —北京：科学出版社，2010

ISBN 978-7-03-026730-6

Ⅰ. 再… Ⅱ. 张… Ⅲ. 核空间–研究 Ⅳ. O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 019571 号

责任编辑：赵彦超／责任校对：李奕萱

责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 2 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)

2010 年 2 月第一次印刷 印张：13

印数：1—2 500 字数：251 000

定价：39.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

核函数的概念最早来源于积分算子理论. 在对各种核函数的研究中, 具有正定对称性的核函数 $K(t,s)$ 逐渐引起了人们的注意. 人们发现, 每个正定对称函数 $K(t,s)$ 都对应一个由函数构成的 Hilbert 空间, 使得这个正定对称函数对该空间具有再生性. 反之, 若一个二元函数 $K(t,s)$ 对某个空间具有再生性, 则这个二元函数一定具有正定对称性. 这些联系促使人们对具有再生性的核函数进行专门研究. 1950 年, Aronszajn 发表了长篇论文 *Theory of reproducing kernels*, 标志着再生核理论框架的初步形成. 随后, 再生核在积分方程、偏微分方程、复分析和奇异积分等方面得到重要应用. 20 世纪 60~80 年代, 再生核在样条函数的理论与应用研究中起着重要的作用, 尤其在随机数据的样条平滑中扮演着核心的角色. 80 年代以来, 随着各种具体再生核构造和算子方程的研究, 使得再生核为一些积分和微分方程精确解的表示和数值解的计算带来了新颖而有效的方法. 与此同时, 再生核空间上算子理论的研究进入活跃时期, 尤其是解析再生核空间上算子的研究涌现了大量论文, 得到了不少深刻的结果. 近年来, 再生核还为小波分析、神经网络、有限元逼近、无网格数值方法等领域带来了新的方法和研究课题.

再生核虽然已经被应用于不少领域, 而且其应用潜力还在不断被发掘, 但散布在各类文献中的再生核理论和方法尚缺少系统的整理和提炼, 也缺少较全面介绍再生核基本理论的专著. 作者希望本书的出版能为再生核理论和应用的研究提供一点方便. 本书以介绍再生核理论和构造方法为主, 包括再生核的一般性质、半内积空间的再生核、W_2^m 空间的再生核、解析函数空间的再生核. 同时也介绍了再生核在样条函数、插值与逼近、算子方程中的一些应用, 以及再生核空间中的逼近和算子理论等方面的基本内容.

本书分为 9 章. 第 1 章介绍再生核空间的基本理论, 内容包括再生核的基本性质、内积空间存在再生核的条件、再生核与正定对称函数的等价性, 并讨论了两个再生核的和、差、积成为新的再生核的条件及新再生核空间的构成.

第 2 章介绍再生核空间的一般构造理论. 我们将看到有限维、无限维空间和解析函数空间或者说可分 Hilbert 空间的再生核都可由空间的规范正交基构造出来. 当然, 对有些可分空间而言, 找出其标准正交基并非易事, 因此, 本章还重点介绍了半内积空间再生核构造方法.

第 3 章介绍 Green 函数与再生核. 因为 W_2^m 空间可以作为 m 阶微分算子的定义域, 即给定一个 m 阶线性微分算子 L 后, W_2^m 中的每个函数都可以作为非齐

次微分方程 $Lf(t)=u(t)$ 的解, 而这个方程的解可以通过 L 的 Green 函数来表示, 这就是说, W_2^m 中的每个函数可以通过 Green 函数表示, 因此, W_2^m 空间再生核的构造应该根植于 Green 函数理论.

第 4 章是在 W_2^m 空间中对一些具体的微分算子讨论再生核的具体计算. 本章在第 3 章的统一框架下对几类微分算子所对应的再生核的构造过程进行了详细讨论, 给出了计算公式; 为了再生核的具体表示和计算, 还用新的方法导出了 Vandermonde 矩阵的逆矩阵公式.

第 5 章介绍 W_2^m 空间的其他再生核. 前三节介绍国内其他学者在再生核构造方面的工作, 这些构造法虽比较复杂, 但已在某些微分和积分方程的数值求解中得到了大量满意的结果, 并导出了 $W_2^m(R)$ 空间再生核的优美的递推公式. 后两节通过对一类特定的微分算子的讨论, 探讨了再生核构造的其他方法与 Green 函数方法之间的联系.

第 6 章介绍再生核与样条函数. 再生核与样条函数有着极为密切的联系, 尤其是通过再生核使得样条函数在概率统计中发挥了独特的作用, 这些联系在国内没有引起足够的关注. 本章主要介绍自然 L 插值和光顺样条与再生核的一些关系、包括样条函数的再生核表示及用再生核建立的递推算法.

第 7 章研究再生核空间中的插值与逼近. 在某种意义下, 再生核就是插值型泛函的表示元, 这给研究再生核空间的插值问题带来了方便. 这一章主要包括一般再生核空间中的最小范数插值和有限逼近、半内积空间的插值逼近和抽象 Hilbert 空间中的算子样条逼近.

第 8 章讨论再生核空间中的算子方程. 在再生核空间中, 样条插值算子与最佳插值逼近算子是一致的, 这给再生核空间中算子的逼近带来了方便, 以此为依据介绍了算子方程求解的一种投影格式. 本章还介绍了再生核空间中算子方程求解的一般方法, 并以第二类 Fredholm 积分方程为例说明了这一方法的应用.

第 9 章介绍再生核空间上的算子. 这一章简要介绍了再生核空间上算子的核函数、一般再生核空间上和解析再生核空间上的复合算子和乘子. 解析再生核空间上的算子理论是近年来正在蓬勃发展的研究领域, 详细的内容可见专门的著作.

本书中的许多内容源于作者的研究工作, 这些内容主要有: 第 3 章中基本 Green 函数和基本再生核概念的提出, 将 W_2^m 空间的内积和再生核构造纳入半内积空间理论的统一框架下; 第 4 章的全部内容; 5.1 节中部分定理的新证法, 5.4 和 5.5 节的全部内容; 第 6 章除 6.4 节和 6.7 节外的全部内容; 7.4 节的内容; 第 8 章前两节的主要结果和后两节的部分结果. 由于有些工作尚不够完善和深入, 且作者水平有限, 错误和不当之处肯定难免, 恳请专家和读者给予指正.

作者的研究工作和本书的出版得到国防科技大学理学院及数学与系统科学系领导的支持和鼓励, 并得到国防科技大学学术专著出版和基础研究基金的资助; 易

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

东云教授、朱健民教授、成礼智教授、宋松和教授、李超教授等数学系同仁对作者的研究工作一直给予了理解和帮助; 陈传淼教授对本书的写作给予了不少有价值的指点, 使作者受益匪浅. 作者对上述单位和个人表示衷心的感谢!

作　者

2009 年 10 月

目　录

前言

第 1 章　再生核空间的基本理论 ······ 1

1.1 再生核与再生核空间的基本性质 ······ 1

1.2 再生核的存在性 ······ 6

1.3 再生核空间的和 ······ 11

1.4 再生核空间的分解 ······ 12

1.5 再生核空间的乘积 ······ 15

第 2 章　再生核空间的一般构造理论 ······ 19

2.1 有限维空间的再生核 ······ 19

2.2 无穷维空间的再生核 ······ 23

2.3 解析函数空间的再生核 ······ 25

2.4 Bergman 空间 ······ 29

2.5 半内积空间 ······ 34

2.6 半内积空间的再生核 ······ 38

2.7 Parseval 框架 ······ 41

第 3 章　Green 函数与再生核 ······ 44

3.1 线性微分算子的 Green 函数 ······ 44

3.2 由 Green 函数确定再生核 ······ 48

3.3 点赋值泛函与再生核 ······ 52

3.4 微分算子基本再生核 ······ 54

第 4 章　几类常系数线性微分算子与再生核 ······ 62

4.1 关于 Vandermonde 矩阵的求逆 ······ 62

4.2 $L = D^m$ 的情形 —— 多项式再生核 ······ 67

4.3 具有互异特征值的常系数微分算子 ······ 72

4.4 $L = D^m - 1$ 的情形 ······ 81

第 5 章　W_2^m 空间的其他再生核 ······ 88

5.1 $W_2^m[a,b]$ 空间的另一种完备内积 ······ 88

5.2 $m = 1$ 和 $m = 2$ 的情形 ······ 91

5.3 $W_2^m[0,\infty)$ 和 $W_2^m(R)$ 的情形 ······ 94

5.4 一类微分算子确定的再生核 ······ 98

5.5 一类微分算子矩阵情形 ······ 104
第 6 章 再生核与样条函数 ······ 107
6.1 自然 L 插值样条的再生核表示 ······ 107
6.2 用再生核讨论自然 L 插值样条的连续性质 ······ 111
6.3 用再生核给出自然 L 插值样条的递推算法 ······ 113
6.4 自然 L 插值样条与最小二乘估计 ······ 117
6.5 自然 L 光顺样条的再生核表示 ······ 123
6.6 用再生核给出自然 L 光顺样条的递推算法 ······ 127
6.7 自然 L 光顺样条与最小二乘估计 ······ 130
第 7 章 再生核空间中的插值与逼近 ······ 134
7.1 再生核空间中的最小范数插值 ······ 134
7.2 再生核空间中函数的有限逼近 ······ 138
7.3 半内积空间中的插值逼近 ······ 141
7.4 Hilbert 空间中的算子样条逼近 ······ 145
第 8 章 再生核空间中的算子方程 ······ 155
8.1 再生核空间中线性泛函的最佳逼近 ······ 155
8.2 算子方程求解的一种投影格式 ······ 160
8.3 再生核空间中算子方程求解的一般方法 ······ 166
8.4 第二类 Fredholm 积分方程的再生核解法 ······ 170
第 9 章 再生核空间上的算子 ······ 176
9.1 再生核空间上算子的核函数 ······ 176
9.2 再生核空间上的复合算子 ······ 180
9.3 解析再生核空间上的复合算子 ······ 183
9.4 再生核空间上的乘子 ······ 188
9.5 解析再生核空间的乘子 ······ 190
参考文献 ······ 196

第 1 章　再生核空间的基本理论

本章介绍再生核、再生核空间及相关的一些基本概念和性质. 首先讨论再生核的投影与限制、再生核空间中的收敛性和再生核的唯一性等基本性质. 1.2 节给出再生核与正定函数是等价的这一重要结果. 由这一结果可知, 每个再生核都是正定函数, 每个正定函数都可作为某个 Hilbert 空间的再生核. 以此为基础, 当两个再生核的和、差、积仍是正定函数时, 它们必然是新的 Hilbert 空间的再生核, 如何构造这些新的再生核 Hilbert 空间, 就导致了两个再生核空间的和、差、乘积等问题, 1.3~1.5 节讨论了这些问题.

1.1　再生核与再生核空间的基本性质

定义 1.1.1　设 H 是内积空间, 其元素是某个抽象集合 B 上的实值或复值函数, 则称 H 是 B 上的*内积函数空间*. 在不至于引起混淆时, 也称 H 为 B 上的*内积空间*.

定义 1.1.2　设 H 是 B 上的内积函数空间, 其内积为 $(\cdot,\cdot)$, 设 $K(t,s)$ 是 B 上的二元函数, 如果对每个给定的 $s\in B$, $K(t,s)$ 作为 t 的函数是 H 中的元素, 且对任意的 $f\in H$, 有

$$f(s)=(f(\cdot),K(\cdot,s))\,, \tag{1.1.1}$$

则称 $K(t,s)$ 是内积空间 H 的*再生核*, H 称为 B 上的*再生核内积函数空间*, 在不至于引起混淆时, 也称 H 为*再生核内积空间*. 若 H 是完备的再生核内积空间, 则称 H 为*再生核 Hilbert 空间*.

对 B 上的二元函数 $K(t,s)$, 通常记 $K_s=K(\cdot,s)$. 用 t^* 表示在 t 处的点赋值泛函, 则有 $t^*(f)=f(t)=(f,K_t)$.

定理 1.1.3　设 H 是 B 上的再生核内积空间, 再生核为 $K(t,s)$, 则

(i) 对一切 $t,s\in B$, 有 $K(t,s)=(K_s,K_t)$, 从而 $K(t,t)\geqslant 0$;

(ii) 对一切 $t,s\in B$, 有 $K(t,s)=\overline{K(s,t)}$;

(iii) 对一切 $t,s\in B$, 有 $|K(t,s)|\leqslant\sqrt{K(t,t)}\sqrt{K(s,s)}$;

(iv) 若对某点 $t_0\in B$, 有 $K(t_0,t_0)=0$, 则对任意 $f\in H$, 有 $f(t_0)=0$.

证明　(i) 由再生核的定义知, 对每个 $t\in B$, 有 $K_t\in H$, 且 $K(t,s)=(K_s,K_t)$.

(ii) 由 (i) 的结果知 $K(t,s)=(K_s,K_t)=\overline{(K_t,K_s)}=\overline{K(s,t)}$.

(iii) 应用 Cauchy-Schwarz 不等式和 (i) 的结果, 得到

$$|K(t,s)|^2 = |(K_s, K_t)|^2 \leqslant (K_s, K_s)(K_t, K_t) = K(s,s)K(t,t). \tag{1.1.2}$$

(iv) 若 $K(t_0,t_0)=0$, 则由 (iii) 的结果知, 对任意 $s \in B$, 有 $K(s,t_0)=0$, 于是

$$f(t_0) = (f, K(\cdot,t_0)) = (f, 0) = 0, \quad \forall f \in H.$$

下面再介绍再生核与再生核空间的一些最基本的性质, 主要包括: 再生核的投影与限制、再生核空间中的收敛、再生核与再生核空间之间的对应关系.

1.1.1　再生核的投影与限制

定理 1.1.4　设 H 为 Hilbert 空间, H_1 是 H 的闭子空间, P 是 H 到 H_1 的正交投影算子, 则

(i) 若 H_1 是具有再生核 $K_1(t,s)$ 的 Hilbert 空间, 则

$$(Pf)(t) = (f(\cdot), K_1(\cdot,t)), \quad \forall f \in H;$$

(ii) 若 H 也是再生核 Hilbert 空间, 再生核为 $K(t,s)$, 则 H_1 的再生核为

$$K_1(\cdot,t) = PK(\cdot,t).$$

证明　(i) 对任意的 $f \in H$, 因为 $f - Pf \perp H_1$, 而 $K_{1_t} \in H_1$, 于是

$$(f, K_{1t}) = (f - Pf, K_{1t}) + (Pf, K_{1t}) = (Pf, k_{1t}) = (Pf)(t).$$

(ii) 易知 $PK(\cdot,t) \in H_1$, 又对任意的 $f \in H_1$, 有 $Pf = f$, 且注意到投影算子的自共轭性, 得

$$(f, PK_t) = (Pf, K_t) = (f, K_t) = f(t),$$

即 $PK(\cdot,t)$ 是 H_1 的再生核. 证毕.

推论 1.1.5　设 H 是再生核 Hilbert 空间, 再生核为 K.

(i) 若 H 的闭子空间 H_1 和 H_2 满足: $H_1 \perp H_2$ 且 $H = H_1 \oplus H_2$, 则 $K = K_1 + K_2$, 其中 K_1, K_2 分别是 H_1, H_2 的再生核;

(ii) 若 H_1 是 H 的闭子空间, 具有再生核 K_1, 则对一切 t, 有 $K_1(t,t) \leqslant K(t,t)$.

证明　(i) 设 P 是 H 到 H_1 的正交投影算子, 则 $I-P$ 是 H 到 H_2 的正交投影算子, 且 $K = PK + (I-P)K$. 根据定理 1.1.4(ii), PK 和 $(I-P)K$ 分别是 H_1 和 H_2 的再生核.

(ii) 由定理 1.1.3(i) 和定理 1.1.4(ii) 得

$$K_1(t,t) = (K_{1t}, K_{1t}) = \|K_{1t}\|^2 = \|PK_t\|^2 \leqslant \|K_t\|^2 = K(t,t).$$

定理 1.1.6 设 H 是 B 上的再生核 Hilbert 空间, 其再生核 $K(t,s)$ 在 $B_1 \subset B$ 上的限制记为 K_1, 由 H 中的函数在 B_1 上的限制得到的函数集合记为 H_1, 则 H_1 可以成为以 K_1 为再生核的 Hilbert 空间.

证明 记 $H_0 = \{f \in H : f(t) = 0,\ t \in B_1\}$, 则 H_0 是 H 的闭子空间. 事实上, H_0 显然是 H 的子空间; 又若 $\{f_n\} \subset H_0$ 且 $\|f_n - f\| \to 0\ (n \to \infty)$, 则对任意 $t \in B_1$, 由

$$\begin{aligned}|f(t)| = |(f, K(\cdot,t))| &\leqslant |(f - f_n,\ K(\cdot,t))| + |(f_n,\ K(\cdot,t))| \\ &\leqslant \|f - f_n\| \cdot \|K(\cdot,t)\| + f_n(t) = \|f - f_n\| \cdot \|K(\cdot,t)\|\end{aligned}$$

知 $f(t) = 0$, 即 H_0 是闭的. 记 H_0 的正交补空间为 H', 由推论 1.1.5(i) 知 $K = K_0 + K'$, 且 K_0, K' 分别是 H_0 和 H' 的再生核. 因为对每个 $s \in B$, $K_0(\cdot,s) \in H_0$, 即 $K_0(t,s) = 0\ (t \in B_1)$, 故

$$K(t,s) = K'(t,s), \quad t \in B_1. \tag{1.1.3}$$

对于每个 $f \in H$, f 在 B_1 上的限制记为 f_1, 即 $f(t) = f_1(t)\ (t \in B_1)$. H 中所有在 B_1 上的限制等于 f_1 的函数构成一个等价类, 记为 $\tilde{f}$. 易知 f 与 g 属于同一个等价类当且仅当 $f - g \in H_0$, 因此, 以等价类为元素的空间 $\tilde{H}$, 即商空间 $\tilde{H} = H/H_0$ 与 H_1 是线性同构的. 又易知等价类 $\tilde{f}$ 中的所有函数在 H' 上的投影是相等的, 记这个投影为 f_1', 则每个 $f_1 \in H_1$ 唯一对应一个 f_1', 且 $f_1' \in \tilde{f}$ 即 $f_1(s) = f_1'(s)$. 据此, 在 H_1 中引入内积

$$\langle f_1, g_1 \rangle = (f_1', g_1'), \quad f_1,\ g_1 \in H_1. \tag{1.1.4}$$

对给定的 $s \in B$, 由 (1.1.3) 式知, $K(t,s)$ 与 $K'(t,s)$ 作为 t 的函数属于同一等价类, 它们在 B_1 上的限制就是 $K_1(t,s)$. 又由定理 1.1.4 知, $K'(\cdot,s)$ 是 $K(\cdot,s)$ 在 H' 上的投影, 故由 (1.1.4) 式, 当 $s \in B_1$ 时, 有

$$f_1(s) = f_1'(s) = (f_1',\ K'(\cdot,s)) = \langle f_1, K_1(\cdot,s) \rangle,$$

即 H_1 关于内积 (1.1.4) 具有再生核 $K_1(t,s)$.

在 H_1 上由内积 (1.1.4) 导出的范数记为 $\|\cdot\|_1$, 则由定理 1.1.6 的证明过程知

$$\|f_1\|_1 = \|f_1'\| = \min\{\|f\| :\ f \in \tilde{f}\}, \quad f_1 \in H_1.$$

1.1.2 再生核空间中的收敛性质

定理 1.1.7 设 H 是 B 上的再生核 Hilbert 空间, 再生核为 $K(t,s)$, 则由 $K_s = K(\cdot,s)(s \in B)$ 生成的线性子空间在 H 中稠密.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

证明 对于 $f \in H$, 易知 f 与由 $K_s = K(\cdot, s)(s \in B)$ 生成的线性子空间正交的充分必要条件为 $(f, K_s) = 0\,(\forall\, s \in B)$, 从而 $f(s) = 0\,(\forall\, s \in B)$, 即 $f = 0$. 故定理成立.

命题 1.1.8 设内积空间 H 具有再生核 $K(t, s)$, $\{g_n\}$ 是 H 的标准正交系, 则对任意满足 $\sum |a_n|^2 < \infty$ 的数列 $\{a_n\}$, 有

$$\sum |a_n g_n(t)| \leqslant K(t,t)^{1/2} \left(\sum |a_n^2\right)^{1/2}.$$

证明 因为 $\{g_n\}$ 是标准正交的, 由 Bessel 不等式, 有 $\sum |(K(\cdot, s), g_n)|^2 \leqslant \|K(\cdot, s)\|^2$, 即 $\sum |g_n(s)|^2 \leqslant \|K(\cdot, s)\|^2$, 又 $\|K(\cdot, s)\|^2 = (K(\cdot, s), K(\cdot, s)) = K(s, s)$, 则

$$\sum |a_n g_n(t)| \leqslant \left[\sum |a_n|^2\right]^{1/2} \left[\sum |g_n(t)|^2\right]^{1/2} \leqslant K(t,t)^{1/2} \left(\sum |a_n|^2\right)^{1/2}.$$

定理 1.1.9 设 H 是 B 上的再生核 Hilbert 空间, 再生核为 $K(t, s)$, 函数列 $\{f_n\} \subset H$.

(i) 若 $\{f_n\}$ 弱收敛到 f, 则 $\{f_n\}$ 逐点收敛到 f;

(ii) 若 $\{f_n\}$ 强收敛到 f, 且 $K(t, t)$ 在某个子集 $B_1 \subset B$ 上有界, 则 $\{f_n\}$ 必在 B_1 上一致收敛到 f.

证明 (i) 因为 $\{f_n\}$ 弱收敛到 f, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n, K(\cdot, t)) = (f, K(\cdot, t))$, 即

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t).$$

(ii) 因为 $\{f_n\}$ 强收敛到 f, 即 $\|f_n - f\| \to 0\,(n \to \infty)$, 由

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f(t)| &= |(f_n - f, K(\cdot, t))| \leqslant \|f_n - f\| \cdot \|K(\cdot, t)\| \\ &= \|f_n - f\|(K_t, K_t)^{1/2} = \|f_n - f\| \cdot K(t,t)^{1/2} \end{aligned}$$

即知结论成立.

定理 1.1.10 设 H 是 B 上的再生核 Hilbert 空间, 再生核为 $K(t, s)$. 若赋予 B 某种距离, 使得映射 $t \mapsto K(\cdot, t)$ 是 B 到 H 的连续映射, 则 H 中的弱收敛序列 $\{f_n\}$ 在 B 的每个紧子集 B_1 上是一致收敛的.

证明 由条件知, 映射 $t \mapsto K(\cdot, t)$ 将 B_1 映成 H 的一个紧子集 H_1. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有限个点 $\{t_n\}_1^l \subset B_1$, 使得对每个 $t \in B_1$, 至少有一点 $t_k \in \{t_n\}_1^l$, 满足 $\|K(\cdot, t) - K(\cdot, t_k)\| < \varepsilon/4M$, 这里 $M = \sup\limits_n \|f_n\|$.

由 $\{f_n\}$ 的弱收敛性, 存在正整数 n_0, 当 $n > n_0$ 时, 有 $|f_n(t_k) - f(t_k)| < \varepsilon/2 (1 \leqslant k \leqslant l)$. 于是当 $n > n_0$ 时, 对任意 $t \in B_1$, 有

$$|f_n(t) - f(t)| = |f_n(t) - f_n(t_k) + f_n(t_k) - f(t_k) + f(t_k) - f(t)|$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant |f_n(t_k)-f(t_k)|+|(f_n-f,K(\cdot,t)-K(\cdot,t_k))| \\
&< \varepsilon/2+\|f_n-f\|\cdot\|K(\cdot,t)-K(\cdot,t_k)\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+2M\frac{\varepsilon}{4M}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

故 $\{f_n\}$ 在 B_1 上一致收敛.

1.1.3 再生核与再生核空间的对应关系

定理 1.1.11 设 H 是 B 上的再生核内积空间, 则其再生核是唯一的.

证明 设 $K_1(t,s)$, $K_2(t,s)$ 都是 H 的再生核, 则由再生核的定义和定理 1.1.3(ii) 知

$$K_1(t,s)=(K_1(\cdot,s),K_2(\cdot,t))=\overline{(K_2(\cdot,t),K_1(\cdot,s))}=\overline{K_2(s,t)}=K_2(t,s),$$

即再生核是唯一的.

定理 1.1.12 设 $H_i(i=1,2)$ 均为 B 上的再生核 Hilbert 空间, 其内积分别为 $(\cdot,\cdot)_i\,(i=1,2)$, 再生核分别为 $K_i(t,s)(i=1,2)$. 若 $K_1(t,s)=K_2(t,s)(t,s\in B)$, 则 $H_1=H_2$ 且

$$(f,h)_1=(f,h)_2\,,\quad \forall\, f,h\in H_1=H_2.$$

证明 记 $K(t,s)=K_1(t,s)=K_2(t,s)\,(t,s\in B)$, 再令 $W=\operatorname{span}\{K_s: s\in B\}$, 由定理 1.1.7 知, 对任意 $f\in H_1$, 存在 $\{f_n\}\subset W$, 使得 $\|f-f_n\|_1\to 0\,(n\to\infty)$. 因为 $W\subset H_1\cap H_2$, 则 $\{f_n\}$ 也是 H_2 中的 Cauchy 序列, 所以存在 $g\in H_2$, 使得 $\|g-f_n\|_2\to 0\,(n\to\infty)$, 再由定理 1.1.9 得 $f(t)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)=g(t)\,(t\in B)$, 于是 $f\in H_2$, 从而 $H_1\subset H_2$. 同样可以证明 $H_2\subset H_1$, 所以 $H_1=H_2$.

对任意 $f,h\in W$, 可设 $f(t)=\sum_i\alpha_iK(t,s_i)$, $h(t)=\sum_j\beta_jK(t,t_j)$. 因为

$$(K(\cdot,t_i),K(\cdot,s_j))_1=K_1(s_j,t_i)=K_2(s_j,t_i)=(K(\cdot,t_i),K(\cdot,s_j))_2\,.$$

所以有

$$\begin{aligned}
(f,h)_1&=\sum_i\sum_j\alpha_i\bar{\beta}_j\,(K(\cdot,s_i),K(\cdot,t_j))_1\\
&=\sum_i\sum_j\alpha_i\bar{\beta}_j\,(K(\cdot,s_i),K(\cdot,t_j))_2=(f,h)_2\,,
\end{aligned}$$

即 $(f,h)_1=(f,h)_2\;(f,h\in W)$, 再由 W 在 H_1 和 H_2 中稠密知, $(f,h)_1=(f,h)_2$ 对 f,h 属于 $H_1\,(=H_2)$ 时也成立.

由上面两个定理得知, 再生核与再生核空间是相互唯一确定的.

1.2 再生核的存在性

1.2.1 赋值型内积空间

定义 1.2.1 设 H 是某个集 B 上的内积空间, 若对每个 $t \in B$, 存在一个常数 $c_t > 0$ 使得对任意 $f \in H$, 有 $|f(t)| \leqslant c_t\|f\|$, 则称 H 是 B 上的赋值型内积函数空间. 简称为赋值型内积空间.

定理 1.2.2 (i) 若 B 上的内积空间 H 存在再生核, 则 H 必是赋值型内积空间;

(ii) 若 H 是 B 上的赋值型 Hilbert 空间, 则 H 必是再生核 Hilbert 空间.

证明 (i) 设 $K(t,s)$ 是 H 的再生核, 则对每个 $t \in B$ 和任意的 $f \in H$, 有 $|f(t)| = |(f(\cdot), K(\cdot,t))| \leqslant \|K(\cdot,t)\| \cdot \|f\|$, 故 H 是 X 上的赋值型内积空间.

(ii) 若 H 是 B 上的赋值型 Hilbert 空间, 则对每个 $t \in B$, 点赋值泛函 $t^*(f) := f(t)\,(f \in H)$ 是 H 上的连续线性泛函, 由 Riesz 表示定理知, 存在 $K_t \in H$, 使得 $(f, K_t) = f(t)$, 即 K_t 为 H 的再生核.

设 H_0 是定义在 B 上的非完备的赋值型内积空间, 是否能将 H_0 完备化, 得到一个赋值型 Hilbert 空间呢?

命题 1.2.3 设 H_0 是由定义在 B 上的非完备的赋值型内积空间, 那么 H_0 的完备化空间是 B 上的赋值型 Hilbert 空间.

证明 设 H_0 的内积为 $(\cdot,\cdot)$, 相应的范数为 $\|\cdot\|$, 设 H_0 的完备化空间为 H, 再设 $\{f_n\}$ 是 H_0 中的 Cauchy 列, 即 $\|f_n - f_m\| \to 0(n,\ m \to \infty)$, 记其极限为 $f \in H$, 则 f 的范数为 $\|f\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|$. 对于每个 $t \in B$, 由于 H_0 是赋值型内积空间, 则存在常数 c_t, 使得 $|f_n(t) - f_m(t)| \leqslant c_t\|f_n - f_m\|$, 因此 $\{f_n(t)\}$ 为 Cauchy 数列, 若记 $g(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$, 则 $g(t)$ 是 B 上的一个函数.

对 $x \in X$, 记 x^* 是 H_0 上的点赋值泛函 $x^*(h) = h(x)\ (h \in H_0)$, 则 x^* 是 H_0 上的线性有界泛函, 且 $\|x^*\| \leqslant c_x$. 由 Hahn-Banach 定理, x^* 可以唯一地延拓到 H 上, 且

$$x^*(f) = \lim_{n\to\infty} x^*(f_n) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x), \quad f \in H.$$

因此 $f(x) = g(x)\ (x \in X)$, 且 $|x^*(f)| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x)| \leqslant c_x \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\| = c_x\|f\|$, 即 H 是 B 上的赋值型 Hilbert 空间.

定理 1.2.4 设 H_0 是由定义在 B 上的函数构成的非完备的再生核内积空间, 其内积为 $(\cdot,\cdot)$, 相应的范数为 $\|\cdot\|$, 再生核为 $K(t,s)$, 则 $K(t,s)$ 也是 H_0 的完备化空间 H 的再生核.

证明 由完备化的概念知, 对任意的 $f \in H$, 存在 $\{f_n\} \subset H_0$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, 且 $(f,h) = \lim\limits_{n\to\infty}(f_n,h)(\forall h \in H_0)$, 于是, 对任意 $s \in B$, 有

$$f(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(s) = \lim_{n\to\infty}(f_n, K(\cdot,s)) = (f, K(\cdot,s)),$$

即 $K(t,s)$ 是 H 的再生核.

上述定理说明, 满足什么条件的内积空间一定存在再生核.

1.2.2 再生核的正定性

现在再来考察一个定义在某集合 B 上的二元函数 $K(t,s)$ 要满足什么条件才有可能成为某个空间的再生核. 为此, 先介绍正定函数的概念.

定义 1.2.5 设 B 是一个抽象集合, $F(x,y)$ 是定义在 $B\times B$ 上满足 $F(x,y) = \overline{F(y,x)}$ 的复值函数. 如果对 B 中任意有限个点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 矩阵 $(F(x_i,x_j))$ 是非负定的, 即对任意的复数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{c}_i c_j F(x_i,x_j) \geqslant 0. \tag{1.2.1}$$

则称 $F(x,y)$ 是**正定的**, 记为 $F(x,y) \succ 0$. 若当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 互异, 且 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 不全为零时, 上式严格不等号总成立, 则称 $F(x,y)$ 是**严格正定的**.

引理 1.2.6 若 $K(t,s)$ 为 B 上的正定函数, 则对任意的 $t,s \in B$, 有

$$|K(t,s)|^2 \leqslant K(t,t)K(s,s). \tag{1.2.2}$$

证明 因为 $K(t,s)$ 为正定函数, 由定义 1.2.5 知, 矩阵

$$\begin{pmatrix} K(t,t) & K(t,s) \\ K(s,t) & K(s,s) \end{pmatrix}$$

是非负定的, 即它的行列式非负, 则 $K(t,t)K(s,s) \geqslant K(t,s)K(s,t)$. 又 $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$, 即知 (1.2.2) 式成立.

定理 1.2.7 设 B 上的内积空间 H 具有再生核 $K(t,s)$, 则 $K(t,s)$ 是 B 上的正定函数. 若 B 中任意有限个互异点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 所对应的赋值泛函 $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ 在 H 上是线性无关的, 则 $K(t,s)$ 是严格正定的.

证明 对任意 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset X$ 和任意数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 由再生核的性质, 有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \bar{c}_j c_k K(x_j,x_k) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \bar{c}_j c_k (K(\cdot,x_k), K(\cdot,x_j)) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} c_k K(\cdot,x_k), \sum_{j=1}^{n} c_j K(\cdot,x_j)\right) = \left\|\sum_{k=1}^{n} c_k K(\cdot,x_k)\right\|^2 \geqslant 0.\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

这说明矩阵 $(K(x_j,x_k))_{j,k=1}^n$ 是正定的. 定理的第一个结论成立.

再证定理的第二个结论. 在所给条件下, 若 $K(t,s)$ 不是严格正定的, 则在 B 中存在互异的有限个点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和不全为零的复数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$, 使得

$$\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \bar{c}_j c_k K(x_j,x_k)=0.$$

再由 (1.2.3) 式知 $\sum\limits_{k=1}^n c_kK(t,x_k)=\theta(H$ 的零元素), 于是, 对任意的 $f\in H$, 有

$$\sum_{k=1}^n \bar{c}_k f(x_k)=\sum_{k=1}^n \bar{c}_k(f,K(\cdot,x_k))=\left(f,\sum_{k=1}^n c_kK(\cdot,x_k)\right)=0.$$

因为 $\bar{c}_1,\bar{c}_2,\cdots,\bar{c}_n$ 不全为零, 故 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$ 是线性相关的, 矛盾.

推论 1.2.8　设 $K(t,s)$ 是 B 上的再生核空间 H 的再生核, 若 B 上的多项式全体属于 H, 则 $K(t,s)$ 是严格正定的.

证明　当 B 上的多项式全体属于 H 时, 易知 B 中任意有限个互异点 x_1, $x_2,\cdots,x_n$ 所对应的赋值泛函 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$ 在 H 上是线性无关的, 故由定理 1.2.7 知 $K(t,s)$ 是严格正定的.

由推论 1.2.8 知, 一般而言, 再生核空间的再生核应该是严格正定的. 下面的例子说明, 不是严格正定的再生核也是存在的. 令函数空间

$$H_0=\{f(t):f(t)\text{在},[0,1]\text{上 a.c.},\ f'(t)\in L^2[0,1],\text{且}f(0)=f(1)=0\}.$$

因为 $f(t)$ 绝对连续, 且 $f(0)=0$, 则有 $f(t)=\displaystyle\int_0^t f'(s)\mathrm{d}s$, 由此可以得到

$$|f(t)|\leqslant\left(\int_0^1[f'(s)]^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\sqrt{t}.$$

利用上式可以证明 $(f,h)=\displaystyle\int_0^1 f'(t)h'(t)\mathrm{d}t\,(f,h\in H_0)$ 是 H_0 的内积, 且 H_0 关于此内积是完备的. 设由此内积导出的范数为 $\|\cdot\|$, 则上式成为 $|f(t)|\leqslant\sqrt{t}\|f\|$, 于是由定理 1.2.2 知 H_0 是再生核空间. 可以验证 H_0 的再生核为

$$K(t,s)=\begin{cases}(1-s)t, & t\leqslant s,\\(1-t)s, & t>s.\end{cases}$$

因为 $K(0,t)=K(1,t)=0$, 由 (1.2.3) 式知 $K(t,s)$ 不是严格正定的.

1.2.3 正定函数生成再生核空间

定理 1.2.9 设 $K(t,s)$ 为 B 上的正定函数, 则 $K(t,s)$ 必定是 B 上某个内积空间的再生核.

证明 令 $W=\mathrm{span}\{K(\cdot,s):s\in B\}$, 即 W 是 B 上所有形如 $\sum\limits_k c_kK(t,s_k)$ 的函数构成的集合, 其中 $\{s_1,s_2,\cdots\}$ 是 B 的点列, $\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ 是任意有限个复数, 显然 W 是线性空间. 对 W 中的任意两个函数 $f(t)=\sum\limits_k c_kK(t,s_k)$, $g(t)=\sum\limits_j c'_jK(t,s'_j)$, 定义

$$(f,g)=\sum_k\sum_j c_k\bar{c}'_jK(s'_j,s_k). \tag{1.2.4}$$

由 (1.2.4) 式即知 $(f,g)=\overline{(g,f)}$, 且不难证明 (f,g) 是双线性的.

首先证明: 对 $f\in W$, 则 $f=0$(为零函数) 的充分必要条件是: 对任意 $g\in W$, 有 $(f,g)=(g,f)=0$. 事实上, 若 $f(t)=\sum\limits_k c_kK(t,s_k)=0$, 则

$$(f,K(\cdot,t))=\sum_k c_kK(t,s_k)=f(t)=0,\quad (K(\cdot,t),f)=\overline{f(t)}=0.$$

再由 W 中函数的构成即知, 对任意的 $g\in W$, 有 $(f,g)=(g,f)=0$. 反过来, 如果对任意的 $g\in W$, 有 $(f,g)=0$, 则取 $g=K(\cdot,t)$, 得 $f(t)=(f,K(\cdot,t))=0$.

上面证得的结论也说明了由 (1.2.4) 式定义的 (f,g) 是由 f,g 唯一确定的.

以下证明: 令 $\phi_s(t)=K(t,s)$, 则对任意 $f\in W$, 有

$$|(f,\phi_s)|^2\leqslant(f,f)\cdot(\phi_s,\phi_s)=(f,f)\cdot K(s,s). \tag{1.2.5}$$

事实上, 由 $K(t,s)$ 的正定性知, 对任意 $f\in W$, 有 $(f,f)\geqslant 0$. 再由 (1.2.4) 式的双线性性知, 对任意数 λ, 有

$$0\leqslant(f+\lambda\phi_s,f+\lambda\phi_s)=(f,f)+2\mathrm{Re}[(f,\phi_s)\bar{\lambda}]+(\phi_s,\phi_s)|\lambda|^2.$$

当 $\phi_s=0$(恒为零函数) 时, 由前面证得的结论知 $(f,\phi_s)=0$, 从而 (1.2.5) 式成立. 若 ϕ_s 不恒为零函数, 则 $(\phi_s,\phi_s)>0$(若不然, 即 $K(s,s)=0$, 则对任意 $t\in B$, 由 (1.2.2) 式得 $|\phi_s(t)|^2\leqslant K(t,t)K(s,s)=0$), 取 $\lambda=-(f,\phi_s)/(\phi_s,\phi_s)$, 就可得到 (1.2.5) 式.

为了证明 (1.2.4) 式定义了线性空间 W 的内积, 只需证明: 对任意 $f\in W$, 当 $(f,f)=0$ 时, 必有 $f=0$(为零函数). 这可由 (1.2.5) 式立即得知.

最后, 容易验证 $K(t,s)$ 关于内积 (1.2.4) 是 W 的再生核.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com