微分方程

● 蔡维璇　辜建德　编

厦门大学出版社

微 分 方 程

蔡维璇　辜建德　编

厦门大学出版社

[闽]新登字 09 号

微 分 方 程

蔡维璇　辜建德　编

*

厦门大学出版社出版发行

福建省新华书店经销

厦门大学印刷厂印刷

*

开本 850×1168　1/32　7.5 印张　181 千字

1993 年 8 月　第 1 版　1993 年 8 月　第 1 次印刷

印数：1—1500 册

ISBN　7—5615—0743—7/O·48

定价：5.00 元

前　言

本书是作者十多年来在讲授《微分方程》课程的讲稿基础上经过修改整理编写的，曾作为数学专业、控制理论专业、系统工程专业和自动控制专业的基础课教材。本书编写的目的是企图使之既符合教学计划要求，又适合作理、工、师范等有关专业开设《微分方程》课程的教材或参考书。因此，根据要求，只就章节内容作一些删减，力求精练地介绍必要的基础理论，而重点放在解题方法和技能技巧的训练上，取舍尽量适合不同对象的要求，打好双基，为今后学习专业课和应用打下基础。编写中力求做到“由浅入深，循序渐进”论证详细明了，便于自学。

本书共分六章。第一章介绍微分方程的基本概念及实际背景。第二章讲解初等积分法，主要介绍几类方程解题方法，强调变量变换思想，以开阔解题思路。第三章介绍一阶微分方程解的存在唯一性定理以及解的延拓性和解对初值的连续性、可微性。第四章利用向量、矩阵讲线性微分方程组的一般理论及常系数线性方程的解法。第五章把第四章一般理论推广到高阶线性方程，只作小结对照，不加证明，主要介绍常系数线性方程的解法及一些高阶特殊类型方程的解法。第六章介绍一阶偏微分方程的解法。最后，就书中习题给出答案。

在编写过程中，主要参考了贺建勋、王志成著《微分方程》上、中、下；丁同仁著《常微分方程基础》；王高雄等著《常微分方程》；王柔怀、伍卓群著《常微分方程讲义》；艾利斯哥尔兹著《微分方程》以及 А. Ф. Филиппов 编《Сборник Задач По Дифференцальвным

Уравнения》等书。

承贺建勋教授指教、仔细审阅书稿并提出宝贵意见，就此表示衷心感谢。在出版过程中，得到厦门大学出版社陈天泽、吴天祥、蒋东明以及厦大印刷厂吴顺昇、厦门大学系统科学系隋榕生、黄秀丽等同志的热情支持，在此也表示衷心谢意。

由于我们水平限制，书中错漏在所难免，衷心希望同志们和读者随时提出批评和指教。

作　者

1993年7月20日于厦门大学

目　　录

第一章　绪论
§1. 微分方程的一般概念 ……………………………… (1)
§2. 微分方程的简单实例 ……………………………… (7)
§3. 微分方程的几何解释 ……………………………… (10)

第二章　一阶微分方程的初等解法
§1. 变量分离方程与变量变换 ………………………… (14)
§2. 线性方程与常数变易法 …………………………… (23)
§3. 恰当方程与积分因子 ……………………………… (30)
§4. 一阶稳方程与参数表示 …………………………… (40)
§5. 小结 …………………………………………………… (52)

第三章　一阶微分方程的存在定理
§1. 解的存在唯一性定理与逐步逼近法 ……………… (56)
§2. 解的延拓 ……………………………………………… (65)
§3. 解对初值的连续性和可微性 ……………………… (70)

第四章　线性微分方程组
§1. 解的存在唯一性定理 ……………………………… (78)
§2. 线性微分方程组的一般理论 ……………………… (84)
§3. 常系数线性微分方程组 …………………………… (96)

第五章　高阶微分方程

§ 1. 高阶方程与方程组……………………………………（121）
§ 2. 常系数齐线性微分方程和 Euler（欧拉）方程 ……（131）
§ 3. 常系数非齐线性微分方程……………………………（142）
§ 4. 可降阶的一些方程类型………………………………（162）
§ 5. 二阶线性方程的幂级数解法与解的定性性质……（175）

第六章　一阶线性偏微分方程

§ 1. 首次积分…………………………………………………（190）
§ 2. 一阶偏微分方程…………………………………………（199）

附

习题答案与提示……………………………………………（218）

第一章　绪　论

§1. 微分方程的一般概念

我们在代数学中曾讨论过高次代数方程(例如一元 n 次方程)和 n 元线性方程组的求解问题,其中未知的量是一个数 x,或一组数 $x_1,\cdots,x_n$。在解析几何和数学分析中我们又碰到了另一类方程,即所谓函数方程。例如要从方程 $x^2+y^2=1$ 中确定 y 作为 x 的函数,或更一般的,要从方程 $F(x,y)=0$ 中确定隐函数 $y=\varphi(x)$ 的问题,就是一个最简单的求解函数方程的问题,在这里作为未知而要去求的是整个函数。

我们所要研究的常微分方程可以说是最重要的函数方程的一种,但它与上述所说的函数方程不同,除了自变量和未知函数外,还包含了未知函数的微商。

定义 1　(微分方程)凡含有自变量、未知函数以及未知函数的某些微商(或微分)的方程称为**微分方程**。

下面就是一些微分方程的例子:

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \tag{1}$$

$$m\ddot{x}+h\dot{x}x+kx=F(t),\ (\text{其中 } \dot{x}=\frac{dx}{dt}) \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \tag{3}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+h\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}Sin\theta=0 \tag{4}$$

$$xdy-y^2dx=0 \tag{5}$$

$$y'''+y'^2+x=0 \tag{6}$$

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-4\pi\rho \tag{9}$$

$$\frac{dx}{dy}=x(ax+by+c),\ \frac{dy}{dt}=y(ex+fy+g) \tag{10}$$

只含一个自变量的微分方程称为**常微分方程**，自变量多于一个的称为**偏微分方程**。例如上列(1)至(7)都是常微分方程；(8)，(9)是偏微分方程；(10)是常微分方程组。

方程中所含未知函数微商的最高阶数称为这个方程或方程组的**阶**。例如(1)，(3)，(5)是一阶方程；(2)，(4)，(8)，(9)是二阶方程；(6)是三阶方程；(7)是 n 阶方程；(10)是一阶方程组。

值得注意的是微分方程中可以不含自变量和未知函数，例如(8)和(9)，但是微分方程中所含的导数(或微分)是一定要出现的，否则这个方程就不能称之为微分方程。

如果方程对于未知函数和它的各阶微商的全体而言是一次的，它就称为**线性微分方程**，否则它就称为**非线性微分方程**。一般的 n 阶线性微分方程具有以下形式.

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x) \tag{11}$$

其中 $a_1(x),\cdots,a_n(x),f(x)$ 是 x 的已知函数。例如(1)，(3)，(8)，(9)都是线性微分方程；(2)，(4)，(6)是非线性方程；(10)是非线性方程组。至于(7)，由于不知道函数 F 的具体形式，故无法判别它是线性方程还是非线性方程。方程(5)是对称形式的一阶微分方程，在这里 x 和 y 的地位是平等的，即可以把 x 看成自变量；也可

以把 y 看成自变量;如果把 y 看成未知函数,(5)就是非线性方程,而如果把 x 看成未知函数,(5)就是线性方程,这一点应该引起我们的特别注意。

方程(7)是 n 阶常微分方程的一般形式,其中 x 为自变量,y 为未知函数,且一定含有$\frac{d^n y}{dx^n}$,如果方程(7)能够就 $y^{(n)}$ 解出得到

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

这种已就最高阶导数解出的方程称为**正规形微分方程**或**显式微分方程**,相应的我们称方程(7)为**非正规形微分方程**或**隐式微分方程**。以后我们所要研究的微分方程多数是正规形的。

由于我们课程是常微分方程,故在本课程中"微分方程"一词常常理解为常微分方程,有时甚至简称为"方程",希望不要引起误会,且在本课程中若无特别声明,自变量一般均为实变量。

微分方程的一个中心问题是求解,那么什么是"方程的解"呢?

定义 2 (方程的解)如果把某一个函数(有直到 n 阶的导数)及其相应的各阶导数代入一个微分方程后,使该方程变成恒等式,我们就称这个函数为该微分方程的一个解。

按照这个定义可以确切说明什么样的函数是方程(7)的解。设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 $a<x<b$ 上有定义,连续且有至到 n 阶的微商,且知函数 $F(x,y,y_1,\cdots,y_n)$ 的定义域为 G,如果把 $y=\varphi(x)$ 及其相应的各阶导数代入方程(7),得到一个关于 x 的恒等式,即

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0$$

对一切 $x\in(a,b)$,$(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\in G$ 都成立.则称 $y=\varphi(x)$ 为方程(7)在区间 (a,b) 上的一个解,称区间 (a,b) 为解 $y=\varphi(x)$ 的定义区间。

有时,我们不容易求出解的明显表达式 $y=\varphi(x)$,而容易求出由关系式 $\Phi(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 是方程(7)的解,

则称 $\Phi(x,y)=0$ 为(7)的**隐式解**，今后我们将不加区别的把它们统称为方程的解。

例 1 考虑方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ (1)

$f(x)$是一个已知的连续函数. 这是一种最简单的常微分方程，称为可直接积分的方程，显然，根据微积分学的基本定理，我们知道方程(1)的解为：

$$y=\int f(x)dx=F(x)+C$$

其中 $F(x)$是 $f(x)$的任一确定的原函数，C 为任常数。由于 C 的任意性，我们知道方程(1)有无数个解，且知方程(1)的任一确定解必具有这个形式(但其中的 C 取特定的值)，所以 $y=F(x)+C$ 就是(1)的全部解，习惯上称为方程(1)的通解，而当 C 取特定的值时得到的解称为方程(1)的特解，这个例子给了我们求解微分方程的第一个信息，即可以把方程(1)或经过一些简单化简可化为方程(1)形式的方程的求解归结为求不定积分的运算，而且从例 1 可知，一般来说，微分方程的解不是唯一的，而是有为数无穷的一整族解. 即方程的通解。我们以方程(7)为例说明这个重要的概念。

定义 3 (方程的通解)方程(7)的一个含有 n 个任意常数 c_1，$c_2,\cdots,c_n$ 的解 $y=\varphi(x,c_1,\cdots,c_n)$称为它的**通解**，如果至少对于在一定范围内任意给定的初始条件，即

当 $x=x_0$ 时 $y=y_0,\dfrac{dy}{dx}=y_0^{(1)},\cdots,\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=y_0^{(n-1)}$， (12)

都能找出任意常数 $c_1,\cdots,c_n$ 的特定值，使对应的解满足这个初始条件，这里 $x_0,y_0,\cdots,y_0^{(n-1)}$ 是 $n+1$ 个常数。仿此可以同样定义方程(7)的**隐式通解** $\Phi(x,y,c_1,\cdots,c_n)=0$。今后我们为简单起见，也不把通解和隐式通解加以区别，统称为方程的通解。

因此可见为了确定方程的一个特定的解，常常要预先给出这个解所必需满足的条件，这就是所谓定解条件. 常见的定解条件有

二种即初始条件和边界条件，所谓初始条件(12)即给出运动在初始时刻的状态，所谓边界条件即由所考虑的区间的两端来给出定解条件. 而求方程满足定解条件的解，就是所谓定解问题，当定解条件为初始条件时，相应的定解问题就称为初值问题或 *Cauchy* 问题. 当定解条件为边界条件时，相应的定解问题就称为边值问题. 一般来说，方程的特解(即方程满足定解条件的解). 是可以由通解中取特定的任意常数值而得到，但是由于在定义 3 中初始条件的变化是有一定范围的，因而通解并不等于方程的所有解，也就是说可能有某些特解不能从通解中得到。

方程(7)的通解可以用另一种形式定义。若 $y=\varphi(x,c_1,\cdots,c_n)$ 是方程(7)的一个含有 n 个任意常数的解，如果这 n 个任意常数是独立的，即存在$(x,c_1,\cdots,c_n)$的某一邻域，使得雅可比行列式

$$\frac{\partial(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{\partial(c_1,c_2,\cdots,c_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial c_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_n}\end{vmatrix}\neq 0,$$

则此函数族 $y=\varphi(x,c_1,\cdots,c_n)$称为方程(7)的通解。

习题 1.1

1. 说明下列微分方程的常或偏，线性或非线性，阶数，自变量和未知函数

(1)$\frac{d^3s}{dt^3}-2cost\frac{d^2s}{dt^2}+sins=0$　　(2)$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+2u^2=0$

(3)$\frac{d^2u}{dt^2}\frac{du}{dt}+(\frac{du}{dt})^3+u=0$　　(4)$y^2\frac{dx}{dy}+x+1=0$

(5) $(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2=1$ (6) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f(x,y)$

2. 验证 $y=e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 是方程 $y'=|xy|(x<0)$ 的适合初始条件 $y|_{x=-\sqrt{2}}=\frac{1}{e}$ 的解。

3. 给定一阶微分方程 $\frac{dy}{dx}=2x$

(1) 求出它的通解； (2) 求通过点(1,4)的特解；

(3) 求出与直线 $y=2x+3$ 相切的解；

(4) 求出满足条件 $\int_0^1 ydx=2$ 的解；

(5) 绘出(2),(3),(4)中的解的图形。

4. 验证下表左列函数分别满足右列微分方程(可能有例外)；并填上所列的初始条件，指出下表中哪些是特解？哪些是通解。

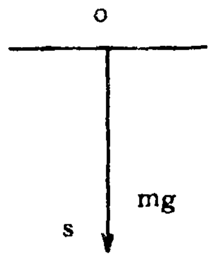
编号	函数	微分方程	初始条件
1	$y=e^{-x}+x-1$	$y'+y=x$	$y(0)=?$
2	$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}$	$y''-9y=0$	$y(0)=?$ $y'(0)=?$
3	$y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$	$y''+\lambda y=0$	$y(0)=?$ $y'(0)=?$
4	$y=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+e^{x^2}$	$y'-2xy=1$	$y(0)=?$
5	$y=\frac{e^x+ce^{-x}}{2x}$	$xy'+(1+x)y=e^x$	$y(1)=?$
6	$x^2+y^2=1$	$y'=-\frac{x}{y}$	$y(0)=?$
7	$x=e^{xy^2}$	$y'=\frac{1-xy^2}{2x^2y}$	$y(1)=?$
8	$y=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$	$x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$	$y(\frac{\pi}{2})=?$ $y'(\frac{\pi}{2})=?$
9	$\int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}}dt+x=1$	$y''=y(y')^2$	$y(1)=?$
10	$u(t,x)=\sin at\sin ax$	$u''_{tt}=u''_{xx}$	$u(0,x)=?$ $u'_t(0,x)=?$

§ 2. 微分方程的简单实例

微分方程是和微积分一起成长起来的一门重要的数学学科，它来源于十六世纪、十七世纪的力学、几何学的研究，以后在天体力学.物理学的研究中得到了发展，一直到现在日益成为人类认识自然，改造自然的有力工具，它的应用渗透到自然科学和数学的各个领域，无论是力学，电子技术，自动控制，星际航行，生物化学，甚至经济计划，人口控制等都有方程的应用，下面我们将列举一些例子说明微分方程的广泛应用和明显的物理背景。

例 1 自由落体运动。设质量为 m 的重物，从空中 O 点处自由落下(不计空气阻力)，试研究重物的运动规律。

解 不妨取 o 点处为原点，s 轴铅直向下为正。



由牛顿第二定律知

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg$$

$\therefore \dfrac{d^2s}{dt^2}=g$，这是形如(1)的方程。

故有 $s=\dfrac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2$，　　c_1,c_2 是两个互相独立的任意常数。

若 $t=0$ 时 $v=v_0,s=s_0$，则有 $s=\dfrac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$.

例 2 镭的衰变。由实验知道，镭因不断放出各种射线而质量逐渐减少的衰变速度与剩余物的质量成正比，求镭元素的质量 x 是时间 t 的什么样的函数?

解 设 t 时刻镭的质量为 $x(t)$，则$\dfrac{dx}{dt}$表示衰变速度，由题意可知：$\dfrac{dx}{dt}=-kx,k>0$ 是比例常数，当 $x>0$ 时$\dfrac{dx}{dt}<0$，表示当 t 增

加时镭的质量总是减少的，方程的解与初始条件 $x(t_0)=x_0$ 有关，这是一个可分离变量的方程，我们将在下一章详细研究它的解法。

例 3 鲨食鲽，而鲽在海中找寻无穷量的其它食物，试研究鲨与鲽之间的相互关系。

解 显然可以想象出，鲽少，鲨少，鲨少，鲽多，鲽多，鲨多，鲨多，鲽少，故它们之间的关系是有趣的周期变化，我们可以列出微分方程来近似的描述这个生态问题。

设 $x(t)$是 t 时刻的鲽数，$y(t)$是 t 时刻的鲨数，则有

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=r_1x-s_1xy \\ \dfrac{dy}{dt}=-r_2y+s_2xy\end{cases}\qquad r_1,r_2,s_1,s_2 \text{ 为正常数.}$$

这是一个可分离变量的方程，容易求出通解且知解是周期变化的。

例 4 1)求平面上的一切圆所满足的微分方程；

2)求以原点为中心的一切圆所满足的微分方程；

3)求半径为定值的一切圆所满足的微分方程。

解 1) $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ；可微分三次，消去 a,b,r.

$$(x-a)+(y-b)y'=0$$

$$1+y'^2+(y-b)y''=0$$

$$3y'y''+(y-b)y'''=0$$

由后二式消去 $y-b$，即得所求的微分方程为

$$(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=0$$

2) $a=b=0$，故所求方程为 $x+yy'=0$

3) r 为定数，故 r 可以出现在方程中，只要消去 a,b 可得方程

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\pm\frac{1}{r}$$

习题 1.2

1. 在弹簧振动的方程 $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx-r\dfrac{dx}{dt}$ 中为什么不出现重力的作用?

2. 对于例 1 中的自由落体，解释 $t=0$ 时 $s=0$;$t=1$ 时 $s=0$ 的物理意义，并求落体的运动规律。

3. 图 1.1 中的 $R-L$ 电路，它包含电感 L，电阻 R 和电源电动势 E，设 $t=0$ 时电路中没有电流，试求当开关 K 合上时，回路中的电流 I 所满足的微分方程和初始条件，假设 R,L,E 都是正常数。

4. 设有质量为 m 的摆球系于一根长 l_0 的细线上如图 1.2 所示。在重力作用下，它会在垂直于地面的平面上沿圆周运动。如果忽略细线的质量和弹性，且设球在摆动时受到空气阻力其大小与球的线速度成正比，试求摆动时角度 θ 所满足的微分方程，并给出两组不同的条件。

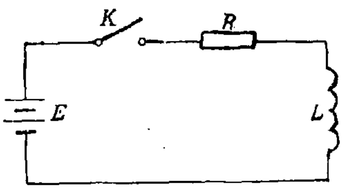


图 1.1

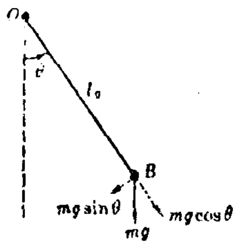


图 1.2

5. (t,x) 平面上有一曲线，其上每点处的切线与该点的向径和 ox 轴构成一等腰三角形，试求此曲线所满足的微分方程?

6. $i)$ 求通过两个定点 $p_1(q,0)$, $p_2(0,q)$ 的所有圆的方程。

$ii)$ 求切于两条直线 $y=\pm(x-c)tg\alpha$ 且圆心在 x 轴上的所有圆的微分方程。其中 c,α 为常数。

§ 3. 微分方程的几何解释

这一节我们将从几何直观的角度研究微分方程的求解问题，为简单明确起见，我们只限于讨论一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{13}$$

这里函数 $f(x,y)$ 在 xy 平面上的某区域 D 内有定义。

显然，方程(13)的每一个解 $y=\varphi(x)$ 都对应于 xy 平面上的某一条曲线，习惯我们上称这一条曲线为方程(13)的积分曲线，而方程(13)的通解 $y=\varphi(x,c)$ 则对应于 xy 平面上的一族曲线，我们称这族曲线为积分曲线族，满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解就是通过点 (x_0,y_0) 的一条积分曲线。我们感兴趣的是方程(13)反映了它的积分曲线的什么特征呢？为此对方程(13)作如下的几何解释。

1. 方向场 对于 D 内每一点 (x,y)，我们都画上一个以 (x,y) 为中点，以 $f(x,y)$ 为斜率的短线段 L_{xy}，这样在 D 内的每一点都得到了一个方向，我们就说在 D 中作出一个由方程(13)确定的方向场。显然，这个方向场的存在是与方程(13)有关，而与(13)的解是否存在无关。对方向场中任一点，如果有一条方程(13)的积分曲线通过的话，则此积分曲线在这一点的切线方向就和方向场在这一点方向相同，反之如果 $y=\psi(x)$ 确定了 xy 平面上的一条曲线，而且这一条曲线在它的每一点 $(x,\psi(x))$ 处的切线斜率都刚好等于 $f(x,y)$ 在这一点的值即 $\frac{d\psi}{dx}\equiv f(x,\psi(x))$，可知 $y=\psi(x)$ 就是方程(13)的解。因此求解方程(13)的几何意义，就是要在 D 中找这样一条曲线，使曲线在其上任一点的切线方向和方向场在这一点的方向一致，或者形象的说，求这方程(13)的解，就是在 D 中求一条始终顺着方向场的方向行进的曲线。