普通高等教育"十一五"国家级规划教材

北京大学数学教学系列丛书

本科生
数学基础课教材

数学分析

（第二册）

伍胜健　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

北京大学数学教学系列丛书

数 学 分 析

(第 二 册)

伍胜健　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学分析·第二册/伍胜健编著. —北京: 北京大学出版社, 2010. 2
(北京大学数学教学系列丛书)
ISBN 978-7-301-15876-0
Ⅰ. 数… Ⅱ. 伍… Ⅲ. 数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. O17
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 171115 号

书　　名: 数学分析(第二册)
著名责任者: 伍胜健　编著
责 任 编 辑: 曾琬婷
标 准 书 号: ISBN 978-7-301-15876-0/O·0798
出 版 发 行: 北京大学出版社
地　　址: 北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址: http://www.pup.cn　电子邮箱: zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话: 邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
　　　　　出版部 62754962
印 刷 者: 北京大学印刷厂
经 销 者: 新华书店
　　　　　890 毫米×1240 毫米　A5 开本　9.75 印张　255 千字
　　　　　2010 年 2 月第 1 版　2010 年 2 月第 1 次印刷
印　　数: 0001—4000 册
定　　价: 18.00 元

内 容 简 介

本书是综合性大学和高等师范院校数学系本科生数学分析课程的教材. 全书共分三册. 第一册共六章, 内容为函数、序列的极限、函数的极限与连续性、导数与微分、导数的应用、不定积分; 第二册共六章, 内容为定积分、广义积分、数项级数、函数序列与函数项级数、幂级数、傅里叶级数; 第三册共五章, 内容为 n 维欧氏空间与多元函数的极限和连续、多元函数微分学、重积分与广义重积分、曲线积分与曲面积分及场论、含参变量的积分。本书每章配有适量习题, 书末附有习题答案或提示, 供读者参考.

作者多年来在北京大学为本科生讲授数学分析课程, 按照教学大纲, 精心选取教学内容并对课程体系优化整合, 经过几届学生的教学实践, 收到了良好的教学效果. 本书注重基础知识的讲述和基本能力的训练, 按照认知规律, 以几何直观、物理背景作为引入数学概念的切入点, 对内容讲解简明、透彻, 做到重点突出、难点分散, 便于学生理解与掌握.

本书可作为高等院校数学院系、应用数学系本科生的教材, 对青年教师本书也是一部很好的教学参考书. 为了帮助读者学习, 本书配有学习辅导书《数学分析解题指南》(材源渠、方企勤编. 书号: ISBN 978-7-301-06550-1; 定价 24.00 元)供读者参考.

作 者 简 介

伍胜健 北京大学数学科学学院教授、博士生导师. 1992 年在中国科学院数学研究所获博士学位. 主要研究方向是复分析. 在北京大学长期讲授数学分析、复变函数、复分析等课程.

目　录

第七章　定　积　分

§7.1　定积分的概念与微积分基本定理

7.1.1　曲边梯形的面积

定积分最朴素的思想可以追溯到阿基米德时代, 阿基米德的“由直线组成平面图形, 由平面组成立体图形”的思想可以认为是定积分的萌芽. 他曾借助圆柱和圆锥的体积并利用细分的方法求出了球的体积. 但由于用细分的方法无法解决一般函数的定积分计算问题, 因此定积分的研究在漫长的岁月里一直没有进展. 直到 17 世纪, 在天文学和物理学等学科的促进下, 数学研究才取得了很大的进展. 伽利略和开普勒的一系列发现, 如开普勒的行星运动三定律等, 导致了导数的诞生. 导数对现代数学理论的建立起了巨大的促进作用. 到了 17 世纪下半叶, 牛顿和莱布尼茨两人在综合、发展前人工作的基础上, 几乎同时建立了微积分理论. 正是这种理论, 使得定积分有了简便的计算方法, 从而也使得它具有极大的理论和实用价值.

可以引入定积分概念的问题很多, 如开普勒研究的椭圆面积问题; 已知速度求路程的问题; 已知密度求质量的问题; 等等. 下面我们以求由区间 $[a,b]$ 上非负函数 $f(x)$ 的图像 (曲线) 与 x 轴及直线 $x=a, x=b$ 所围图形 S (如图 7.1.1, 我们称该图形为**曲边梯形**) 的面积为例来详细阐述定积分的基本思想.

回忆一下, 我们目前所能精确求出面积的图形只能是由有限条线段所围成的平面图形. 如果 $y=f(x)$ 不是一个线性函数, 则不可能简单地用某个我们已知的计算公式算出该曲边梯形的面积. 因此我们需要探究如何来求这种图形面积的方法.

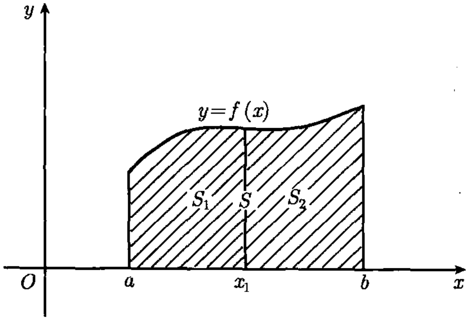

图 7.1.1

为了使问题简化, 我们假定 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 并记 M,m 分别为它在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值. 在重积分理论中, 我们将讨论一般的平面图形的面积问题并证明曲边梯形 S 的面积必定存在. 现在我们假定该曲边梯形的面积存在并将其面积仍记为 S, 易于看出

$$m(b-a) \leqslant S \leqslant M(b-a).$$

设函数 $y=f(x)\,(x\in[a,b])$ 的图像为 T. 由连续函数的性质可以知道 T 上必有一点 $(c,f(c))$, 使得 $S=f(c)(b-a)$. 我们事先无法知道 c 在何处, 能做的是在区间 $[a,b]$ 上取一点 ξ, 计算 $f(\xi)(b-a)$.

$f(\xi)(b-a)$ 的几何意义很明显, 它是以区间 $[a,b]$ 为底, 以 $f(\xi)$ 为高的矩形的面积. 它与 S 的误差可以由下式估计:

$$|S-f(\xi)(b-a)|=|f(c)-f(\xi)|(b-a)\leqslant(M-m)(b-a),$$

其中 $M-m$ 也称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**振幅**.

如果我们等分区间 $[a,b]$ 成两个小区间, 并令 $x_1=\dfrac{a+b}{2}$ (见图 7.1.1), 则直线 $x=x_1$ 将 S 分成两个曲边梯形 S_1 及 S_2. 现将它们的面积仍然分别记为 S_1 和 S_2, 显然有

$$S=S_1+S_2.$$

在 S_1 和 S_2 中重复我们刚才在区间 $[a,b]$ 上所做的过程, 记 M_1, M_2 分别为 $f(x)$ 在区间 $[a,x_1]$ 和 $[x_1,b]$ 上的最大值, m_1, m_2 分别为 $f(x)$ 在区间 $[a,x_1]$ 和 $[x_1,b]$ 上的最小值. 在区间 $[a,x_1]$ 上任意取 ξ_1, 在区间 $[x_1,b]$ 上任意取 ξ_2, 则有以下的估计式:

$$|f(\xi_1)(x_1-a)-S_1| \leqslant (M_1-m_1)\frac{b-a}{2},$$

$$|f(\xi_2)(b-x_1)-S_2| \leqslant (M_2-m_2)\frac{b-a}{2}.$$

因此

$$\begin{aligned}
&|f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(b-x_1)-S| \\
&\leqslant [(M_1-m_1)+(M_2-m_2)]\frac{b-a}{2} \\
&\leqslant (M-m)(b-a).
\end{aligned}$$

上式成立是因为分割后的误差估计由小区间上的振幅给出, 而一个函数在小区间上的振幅不会比在包含该区间的大区间上的振幅大的缘故. 上式还告诉我们: 对于分成两块所得到的和式 $f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(b-x_1)$ 与 S 的误差和原来 $f(\xi)(b-a)$ 与 S 的误差, 分割后的误差的估计式不会变大. 在许多情况下, 比如 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 单调, 分割后任意取值得到的和式与 S 的误差估计比分割前的误差估计会变得更小.

当区间 $[a,b]$ 分割后的区间长度很小时, 由 $f(x)$ 的一致连续性, $f(x)$ 在每个小区间上的振幅都可以很小. 基于这种思想, 我们将区间 $[a,b]$ 分割成更小的区间, 如对充分大的 n, 将区间 $[a,b]$ 等分为 n 个小区间 (见图 7.1.2). 设其分点为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

记 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1},x_i] (i=1,2,\cdots,n)$ 上的最大值为 M_i, 最小值为 m_i. 在每个区间上任取 ξ_i, 作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

则此和式与 S 的误差可以有下面的估计：

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - S\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{7.1.1}$$

上述不等式右边即为图 7.1.2 中与曲线相交的小矩形面积之和. 由于 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 从而一致连续, 因此对于 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 当每个 $x_i - x_{i-1} < \delta$ 时 (这只要 n 充分大即可), 有 $M_i - m_i < \varepsilon$. 于是我们有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - S\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon(b-a).$$

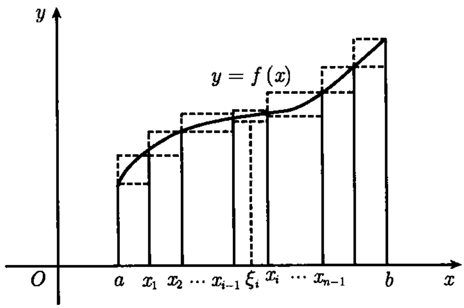

图　7.1.2

以上分析告诉我们, 只要 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 当区间 $[a,b]$ 分割得充分 “细” 时, 对每个小曲边梯形的曲边 “以直代曲”, 作出的和式的值可以任意地接近该曲边梯形的面积. 因此有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = S.$$

下面我们以由曲线 $f(x) = x^2(x \in [0,1])$ 与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围的图形为例来求其面积 S (见图 7.1.3).

将区间 $[0,1]$ 进行 n 等分, 其分点为 $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1$. 在区

间 $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right](i=1,2,\cdots,n)$ 上任取 ξ_i, 作和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2.$$

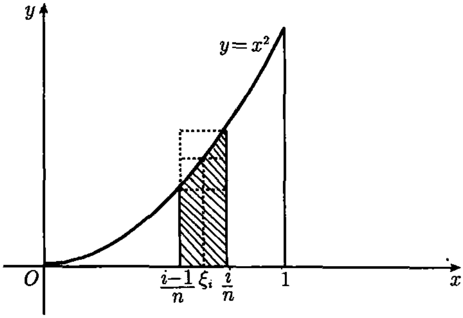

图 7.1.3

由于 $\frac{i-1}{n}\leqslant\xi_i\leqslant\frac{i}{n}\,(i=1,2,\cdots,n)$, 且 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 单调上升, 因此有

$$m_i=\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\leqslant\xi_i^2\leqslant\left(\frac{i}{n}\right)^2=M_i.$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{3},$$

我们有

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2-S\right|\leqslant\left|\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2-\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2\right|\to 0\quad(n\to\infty).$$

因此有

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=\frac{1}{3}.$$

我们再来举一个质点做直线运动的例子. 假定一个质点在直线上朝着一个方向运动, 其速度 $v=v(t)$ 是时间 t 的函数. 为简便计, 假定 $v(t)\geqslant 0$. 现在我们来求在时间段 $[a,b]$ 内质点走过的路程 s.

若 $v(t)=c$ 是常数函数, 则 $s=c(b-a)$. 如果 $v(t)$ 不是常数函数, 即质点做非匀速运动时, 我们如何来求 s 呢? 为此我们来分析一下, 假定 $v(t)$ 是连续变化的 (在许多实际问题中大都是如此), 则对任意 $t_0\in[a,b]$, $v(t)$ 在 t_0 附近的值与 $v(t_0)$ 很接近. 换句话说, 对很小的 $\delta>0$, 在时间段 $[t_0-\delta,t_0+\delta]$ 内, 质点走过的路程 $\tilde{s}\approx 2\delta v(t_0)$ (简称 "以不变代变"). 这就启发我们将区间 $[a,b]$ 作分割: $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, 当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{t_i-t_{i-1}\}$ 很小时, 在每个时间段 $[t_{i-1},t_i](i=1,2,\cdots,n)$ 内质点走过的路程 $s_i\approx v(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$, 其中 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$. 因此, 总的路程

$$s=\sum_{i=1}^{n}s_i\approx\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)(t_i-t_{i-1}). \tag{7.1.2}$$

当时间段 $[a,b]$ 的分割对应的小时间段的长度趋于零时, 上面路程的近似值与路程的准确值无限地接近. 因此若和式 (7.1.2) 有极限, 此极限便是我们要求的路程. 容易看出以上已知速度函数求路程与我们在前面求曲边梯形的面积具有相同的"纯数学"极限过程.

7.1.2 定积分的定义

上面我们对若干问题进行了讨论, 在自然界还有许多类似的问题, 在解决它们的过程中可以抽象出一个相同的 "纯数学" 极限过程. 为此我们给出下面的定义.

定义 7.1.1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义, 对于区间 $[a,b]$ 的一个分割

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$, $\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$. 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]\,(i=1,2,\cdots,n)$ 上任取 ξ_i, 作和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

如果当 $\lambda(\Delta)\to 0$ 时, 上述和式存在极限 I, 且 I 不依赖分割 Δ 的选取及 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的选取, 则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$

上是**黎曼可积**(简称**可积**)的, 同时称 I 为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**定积分**, 记为

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 a 与 b 分别称为定积分的**下限**和**上限**, $f(x)$ 称为**被积函数**, x 称为**积分变量**.

在定积分理论的讨论中, 我们经常要遇到分割求和. 为了使行文简洁, 在今后对每个给定的区间 $[a,b]$, 我们总是用 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 来表示它的一个分割, 对于这个分割总是记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$, 并且记 $\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$. 在 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上任取一点 ξ_i, 我们称和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 为函数 $f(x)$ 关于 Δ 的**黎曼和**.

用 "ε-δ" 语言叙述定积分的定义则更为精确.

定义 7.1.1′ 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义, 若存在常数 $I\in\mathbb{R}$, 使得对于 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 对区间 $[a,b]$ 的任何一个分割 Δ, 当 $\lambda(\Delta)<\delta$ 时, 在每个 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上任取 ξ_i, 都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 是黎曼可积的, 并称 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分.

今后, 我们用记号 $f(x)\in R[a,b]$表示函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

从定义 7.1.1(或定义 7.1.1′) 可以看出: 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则它在区间 $[a,b]$ 上的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是一种特殊和式的极限. 因此, 和式写成 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\tau_i)\Delta t_i$ 并不影响和式的极限, 此和式是由函数关系 f 决定的, 与自变量取 x 还是取 t 无关, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

值得注意的是, 上述和式的极限与我们所学过的序列极限和函数极限是不同的. 在 $\lambda(\Delta) \to 0$ 的过程中, 这个极限过程具有两个任意性, 即分割的任意性及在每个小区间上 ξ_i 选取的任意性. 尽管这些极限过程有所不同, 但定积分定义中和式的极限与序列极限或函数极限仍具有一些相似的性质, 如一个函数的定积分存在, 则它必定唯一. 这些性质的证明可以由定义直接推出, 读者可自证之.

7.1.3　定积分的几何意义

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续. 我们先看 $f(x) \geqslant 0$ 的情形. 根据我们前面的讨论可知: 定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是由直线 $x=a, x=b, y=0$ 与曲线 $y=f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积 S.

当 $f(x) \leqslant 0$ 时, 同样地设由直线 $x=a, x=b, y=0$ 与曲线 $y=f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积为 S, 则此时 $S=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

当 $f(x)$有正有负时, 则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是由直线 $x=a, x=b, y=0$ 与 $y=f(x)$ 所围成的几个曲边梯形中, 位于 x 轴上方的各个曲边梯形面积之和减去位于 x 轴下方的各个曲边梯形面积之和. 如图 7.1.4, 则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = S_1 - S_2 + S_3 - S_4.$$

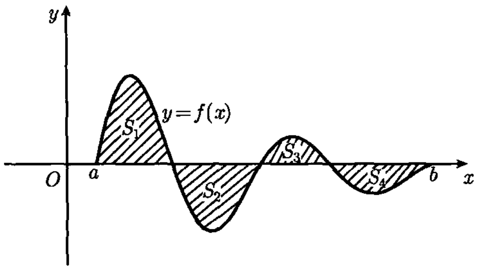

图　7.1.4

7.1.4 连续函数的可积性

在对曲边梯形面积的讨论中, 如果假定该面积存在, 我们找到了一种求出该面积的方法. 有了这一基础, 对一个连续函数 $y=f(x),x\in[a,b]$, 我们比较容易证明它在区间 $[a,b]$ 上必定是可积的.

定理 7.1.1 设函数 $f(x)\in C[a,b]$, 则 $f(x)\in R[a,b]$.

证明 记 m,M 分别为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最小和最大值. 我们注意到, 对区间 $[a,b]$ 的任意分割 Δ, $f(x)$ 关于 Δ 的任一黎曼和满足

$$m(b-a)\leqslant\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i\leqslant M(b-a),\quad(7.1.3)$$

其中 m_i 与 M_i 分别为 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上的最小值和最大值. 特别地, 对每一个 $n\in\mathbb{N}$, 将区间 $[a,b]$ 的 n 等分的分割记为 Δ_n, 在此分割的每个小区间 $[x_{j-1},x_j](j=1,2,\cdots,n)$ 上取定 $\xi_j=x_j$, 我们可得一个特殊的黎曼和

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}f(x_j)\frac{b-a}{n}.$$

这样一来, 我们便得到了一个序列 $\{S_n\}$, 由 (7.1.3) 知它是一个有界序列, 因此存在收敛子列 $\{S_{n_k}\}\subset\{S_n\}$. 设 $\lim\limits_{k\to\infty}S_{n_k}=S$, 下面我们证明 S 即为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分.

对于 $\forall\varepsilon>0$, 由函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致连续知, $\exists\delta>0$, 当 $x',x''\in[a,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时, 有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)},$$

从而对任意的分割 Δ, 当 $\lambda(\Delta)<\delta$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{4}.$$

由于 $\lim\limits_{k\to\infty}S_{n_k}=S$, 因此存在 $K>0$, 使得当 $n_k>K$ 时, 有 $\lambda(\Delta_{n_k})<\delta$