全国新课标实验区特级教师及研究专家联袂编写

三练一测大联盟

★Sanlianyicedalianmeng★

构建新理念◎迈进新课堂
领跑新课标◎共赢新高考

数学 5

必修(北师大版)

江西科学技术出版社

全国新课标实验区特级教师及研究专家联袂编写

三练一测大联盟

★Sanlianyicedalianmeng★

本册主编◎龚浩生 罗柳英

副主编◎张开桃 熊星飞 饶新明

构建新理念◎迈进新课堂

领跑新课标◎共赢新高考

数学⑤

必修(北师大版)

江西科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

三练一测大联盟：数学. 5：必修. 北师大版 / 龚浩生主编. 一南昌：江西科学技术出版社，2008. 12

ISBN 978-7-5390-3425-6

I. 三… II. 龚… III. 数学课－高中－习题 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 195221 号

国际互联网（Internet）地址：
http: // www. jxkjcbs. com
选题序号：ZK2008098
图书代码：J08398-101

三练一测大联盟：数学.5：必修.北师大版 龚浩生主编

出版发行	江西科学技术出版社
社址	南昌市蓼洲街 2 号附 1 号 邮编：330009 电话：(0791)6623491 6639342(传真)
印刷	江西新华印刷厂
经销	各地新华书店
开本	880mm×1230mm 1/16
印张	7.5
版次	2009 年 4 月第 1 版 2009 年 8 月第 2 次印刷
书号	ISBN 978-7-5390-3425-6
定价	17.80 元

前言

当前，教育改革如火如荼，教材的多元化、高考的多样化、选拔的能力化是社会发展的必然趋势，科学、经济、文化等各个领域正相互融合、相互借鉴、相互推动。了解新课程教材的特色，把握新教改的方向，是所有教育工作者共同关注的重大课题，也牵动着广大学生和亿万家长的心。

伴随着新课程理念的逐渐深入和新课改试验区的不断扩大，如何应对课改与高考结合的严峻现实？如何将“一切为了学生终身发展”的新课改理念领悟透彻，落到实处，产生实效？如何解决学生学习费时多而收效微的现实状况？……带着这些疑虑与困惑、深思与期待，我们深入研究新课改精神和高考动态，借鉴并吸收了课改一线最新的教研成果，精心策划、用心编写、倾心推出了这套《**三练一测大联盟**》系列丛书。该丛书着力在以下两个方面推陈出新：一是编写理念新——在策划编排上最大程度地体现新课程改革标准的精神，突出基础知识的丰富性和基本技能的创新性，确保编写内容既符合新课标的理念，又符合学生备考的要求；既是对教材内容的巩固与提高，又是对教材外延知识的补充和升华。二是呈现方式新——在编写内容上最大限度地体现素质教育的精神，除确保具体内容和选题范畴源于新教材、符合新课改的精神外，同时确保辅导的要点、选题的解答思路扣准新高考的方向；既体现现代教学灵活新颖的呈现形式，强调学生思维创新，又总结传统教育中合理的应试技能，将两者有机地融为一体。

呈现在您面前的这套新课标丛书《**三练一测大联盟**》的数学5·必修分册，共分设四大板块：

【整合探究】该栏目分为“基础整合”、“自主探究”两个部分：“基础整合”部分则简要提示本节重点学习的知识要点，从而让学生掌握相关知识，理解相关概念，思考相关方法。“自主探究”部分针对本节教材中的基础知识、基本数学思想灵活设空，简明扼要，言简意赅，让学生做到有的放矢，从而进行科学的自主探究，提高自身自主学习的能力和效果。

【课堂互动】针对本课时的核心内容，扣准考试的高频考点，瞄准自我突破的关键环节。针对本课时的重难点，步步为营，化整为零，各个击破，逐层提高。对每一考点知识进行条分缕析，意在培养学生科学的探究能力和自主的创新意识，让学生在学习中建立起一套科学、完整的数学思想体系，提高学生分析、解决问题的能力，让学生的综合知能得到迅速攀升。

【思想方法小结】依据考试的最新命题角度把握科学的解题规律，总结解题要点，归纳方法规律。使学生学有所思、思有所悟、悟有所得，促使学生把所学知识转化为解题能力，使得学生在学习中实现角色转换，让学生真正成为学习的主人。

另外，我们这套丛书还配有对应的活页练、单元水平测试卷和阶段水平测试卷。测试卷紧扣所学知识点，着重考查学生对所学知识的掌握程度，训练学生的解题能力，增强学生的学习信心，培养学生的实战能力。

此外，相应的教师用书还配有详尽的解析和参考答案，以供教师更好地驾驭课堂。

参与本书编写的教师，有名师龚浩生、罗柳英、张开桃和熊星飞等，编写阵容堪称强大。愿本书能切实帮助学生学好数学 5 · 必修，进一步帮助学生培养数学素养、提高自主探究能力，形成良好的科学文化素养，从而为自己的个性发展和终身学习奠定坚实的基础。

战国时期著名思想家、教育家荀子说：“假舆马者，非利足也，而致千里。假舟楫者，非能水也，而绝江河。君子生非异也，善假于物也。”一个人的成功，不但需要自己的努力，也需要借助他物来帮助自己，才能“致千里”，“绝江河”。最后衷心希望我们的辛勤汗水能够为同学们助上一臂之力，做到事半功倍！

目录 Contents

第一章　数　列

第二章　解三角形

目录 Contents

第三章　不等式

答案·练习·试卷

第一章 数列

§1.1 数列的概念

整合探究

基础整合

1. 数列的定义：按一定次序排列的一列数称为数列.数列中的数，称为数列的项，第 n 个数称为第 n 项，第 1 项也称为首项.数列的一般形式可以写成 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$，简记为 $\{a_n\}$，a_n 是数列的第 n 项，也叫数列的通项.
2. 数列的分类.按项数的多少，可把数列分为：项数有限的数列——有穷数列；项数无限的数列——无穷数列.
3. 数列的每一项都与一个序号相对应，因此数列可以看作定义域为正整数集 $\mathbf{N}_+$（或它的有限子集）的函数，当自变量从小到大依次取值时，该函数对应的一列函数值就是这个数列.
4. 数列的通项公式.如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与 n 之间的函数关系可以用一个式子表示成 $a_n=f(n)$，那么这个式子就叫做这个数列的通项公式，数列的通项公式就是相应函数的解析式.

   数列通项公式是给出数列的一种方法.求数列的通项公式实质上是找出数列的项与序号间的对应关系式.
5. 数列的表示：表示一个数列，常把通项 a_n 写在大括号“{ }”内，前面加“数列”二字.如数列 $\{a_n\}$，数列 $\{2n\}$，数列 $\{\frac{1}{n}\}$ 等.
6. 数列的递推公式.如果已知数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项（或前 k 项），且任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1}（或前 k 项）间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的递推公式.递推公式揭示了数列的任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1}（或前 k 项）的关系，也是给出数列的一种重要方法.

自主探究

1. 数列实例.

   (1) 1,2,3,4,5,… ①

   (2) 8,7,6,5,4,3,2,1 ②

   (3) $1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25},\cdots$ ③

   (4) 前 10 个正素数由小到大排成一列数

   2,3,5,7,11,13,17,19,23,29 ④

   上述各列数的共同的特征是______________.

   它们的一般形式可以写成______________.
2. 上述数列③中，首项是______，第 30 项是________，第 n 项是________，即通项是________.把数列③的第 n 项记为 a_n，则 $a_n=$________.
3. 上述数列实例中，有穷数列是__________，无穷数列是__________.
4. 一个数列的每一项的序号 n 与这一项 a_n 的对应关系为 $a_n=2n-1$，这个式子就叫做这个数列的________，由此可得 $a_{20}=$______，55 是这个数列的第______项.

课堂互动

【例 1】已知数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=(-1)^n\dfrac{n}{2n+1}$，求$a_3$、$a_{10}$、$a_{2n-1}$.

【思路点拨】将通项公式中的n分别换成3、10、$2n-1$就可求出相应的项.

$\because a_n=(-1)^n\dfrac{n}{2n+1}$，

$\therefore$(1)当$n=3$时，$a_3=(-1)^3\dfrac{3}{7}=-\dfrac{3}{7}$；

(2)当$n=10$时，$a_{10}=(-1)^{10}\dfrac{10}{21}=\dfrac{10}{21}$；

(3)$a_{2n-1}=(-1)^{2n-1}\dfrac{2n-1}{2(2n-1)+1}=-\dfrac{2n-1}{4n-1}$.

【方法延伸】由通项公式$a_n=f(n)$求某特定的项，只要把公式中的n用具体序号代入计算，即可求出数列的相应项.

【变式跟踪】1. 已知无穷数列：$1\times2,2\times3,3\times4,\cdots,n(n+1),\cdots$，判断420与421是否为该数列的项？若是，应为第几项？

【例 2】写出下列数列的一个通项公式：

(1)3,8,15,24,…

(2)3,5,9,17,33,…

(3)$-1,3,-6,10,-15,\cdots$

(4)$\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},\dfrac{7}{8},\dfrac{15}{16},\dfrac{31}{32},\cdots$

【思路点拨】由数列的前若干项，写通项公式，切入点是观察分析项的序号与项之间的对应关系，找出规律. 观察应注意(1)各项的公共结构特征；(2)对各项变形. 如凑、配一个数，再分解；(3)相邻项有什么特殊关系；(4)这个数列与某些常见数列有什么联系.

(1)观察各项与相应序号的关系，可发现

$3=1\times3,8=2\times4,15=3\times5,24=4\times6,\cdots$

故$a_n=n(n+2)$.

另：凑1配平方数. 可作变形：$3=2^2-1,8=3^2-1,15=4^2-1,24=5^2-1,\cdots$，故得：$a_n=(n+1)^2-1$.

(2)把各项分析出1，可变形为：$3=2+1,5=4+1=2^2+1,9=2^3+1,17=2^4+1,33=2^5+1,\cdots$，故得：$a_n=2^n+1$.

(3)各项的符号是负、正交替，故含因子$(-1)^n$. 把各项绝对值变形，有：$1,3=1+2,6=1+2+3=\dfrac{3\times4}{2},10=1+2+3+4=\dfrac{4(1+4)}{2},\cdots$，故得：$a_n=\dfrac{(-1)^n}{2}n(n+1)$.

(4)数列各项分母是2的指数幂，分子比分母小1. 故有：$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n}$.

【方法延伸】一般地，已知一个数列的前几项，写数列的通项，常将已知各项变形、转化找规律，常常可以和一些基本数列联系起来. 如：

(1)$a_n(-1)^n$，$-1,1,-1,1,-1,\cdots$

(2)$a_n=n$，1,2,3,4,5,…

(3)$a_n=2n$，2,4,6,8,10,…

(4)$a_n=2n-1$，1,3,5,7,9,…

(5)$a_n=2^n$，2,4,8,16,32,…

(6)$a_n=n^2$，1,4,9,16,25,…

(7)$a_n=10^n-1$，9,99,999,9999,…

【变式跟踪】2. 根据数列的前几项，写出下列各数列的一个通项公式.

(1)$1,\dfrac{7}{5},\dfrac{13}{7},\dfrac{7}{3},\dfrac{31}{11},\cdots$

(2)$-1,\dfrac{8}{5},-\dfrac{15}{7},\dfrac{24}{9},\cdots$

(3)5,55,555,5555,…

(4)$\dfrac{1}{3},1,\dfrac{9}{5},\dfrac{8}{3},\cdots$

【例 3】已知数列$\{a_n\}$的第1项$a_1=1$，以后各项由$a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{n(n-1)}(n\geqslant2)$给出，写出数列$\{a_n\}$的前5项，并写出数列$\{a_n\}$的一个通项公式.

【思路点拨】由通项公式. 依次取$n=2,3,4,5$即可求出前5项. 再观察前5项与项的序号n的关系，写出通项公式.

$a_n=1,a_2=a_1+\dfrac{1}{2\times1}=\dfrac{3}{2},a_3=a_2+\dfrac{1}{3\times2}=\dfrac{5}{3}$，

$a_4=a_3+\dfrac{1}{4\times3}=\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{4\times3}=\dfrac{7}{4},a_5=a_4+\dfrac{1}{5\times4}=\dfrac{7}{4}+\dfrac{1}{5\times4}=\dfrac{9}{5}$.

由前5项. 可得$a_n=\dfrac{2n-1}{n}$.

【方法延伸】由递推公式写数列的前有限项，可逐项依次求出. 但要求它的通项公式，却一般比较困难，甚至求不出通项公式，除了根据前若干项观察、归纳、寻找各项与序号的对应关系来求通项公式，也可利用递推公式的特点. 运用适当的技巧求解通项公式，像本题也可由递推公式，运用累加、裂项相消法求出a_n.

【变式跟踪】3. 写出下面数列$\{a_n\}$的前5项.

(1)$a_1=1,a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant2)$.

(2)$a_1=2,a_2=1,a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant3)$.

思想方法小结

1. 数列是一种特殊的函数,故函数思想是研究数列的一个基本思想.
2. 数列的通项公式 $a_n=f(n)$,就是一个以项的序号 n 为自变量的函数解析式.求数列的项就是求序号 n 所对应的函数值;已知数列的某一项,可通过解方程求其所对应的项数;判断某一项是否为数列中的项,同样可用方程思想加以解决.
3. 由数列的前 n 项求数列的通项公式时,一般要运用观察、归纳、猜想的研究方法,其中蕴涵了从特殊到一般的思想方法.

很多数列的通项公式可由一些简单数列的通项公式复合而成.

§1.2 数列的函数特性

整合探究

◇基础整合

1. 表示一个数列可用

(1)通项公式法;

(2)图象法;

(3)列表法.

数列是特殊的函数,其图象由离散的孤立点构成.

2. 数列的单调性.

一般地,一个数列 $\{a_n\}$,如果从第 2 项起,每一项都大于它前面的一项,即

$a_n<a_{n+1}$, $n=1,2,3,\cdots$,

就说 $\{a_n\}$ 单调递增,这个数列称为递增数列;

如果从第 2 项起,每一项都小于它前面的一项,即

$a_n>a_{n+1}$, $n=1,2,3,\cdots$,

就说 $\{a_n\}$ 单调递减,这个数列称为递减数列;

如果数列 $\{a_n\}$ 的各项都相等,那么这个数列称为常数列;

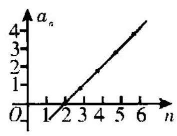
如果从第 2 项起,有些项大于它的前一项,有些项小于它的前一项,这个数列可称为摆动数列.

◇自主探究

1. 函数的表示方法有________、________、________,因为数列是一种特殊的函数,所以可以用表示函数的方法表示数列.

2. 用图象把数列的______与______的关系表示出来的方法叫做图象法.用图象法表示数列时,应把平面直角坐标系横轴作为表示数列的________的轴;把纵轴作为表示数列的________的轴.画图时,以________为点的横坐标,以________为点的纵坐标描点,得到的点的集合即为数列的图象.数列的图象是________.

3. 观察数列:$-1,0,1,2,3,4$ 及其图象.这个数列的图象是________,数列的项随着序号的增大而________,这样的数列称为________.数列 $2,1,\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{1}{3},\cdots,\frac{2}{n},\cdots$ 的图象是________,各项随着序号的增大而________,这样的数列称为________.



4. 用表格表示数列的项与序号的关系的方法,称为________,根据数列的通项公式填表:

n	1	2	3	4	5	6	…	n	…
a_n	1	4	5	4	1	-4	…		…

课堂互动

【例 1】已知函数 $f(x)=\frac{x-1}{x}$，设 $a_n=f(n)(n\in\mathbf{N}_+)$.

(1)求证：$a_n<1$；

(2)判断数列$\{a_n\}$的增减性.

【思路点拨】证明数列的有界性、增减性，都可从通项公式入手. 证明有界性，只要考察通项的值域；判断增减性，则考察数列任意相邻两项的大小关系，可类比函数单调性的证明方法.

(1)$\because a_n=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$，又$\because n\in\mathbf{N}_+$，$\therefore 1\geqslant\frac{1}{n}>0$.

$\therefore a_n<1$.

(2)$\because a_{n+1}-a_n=(1-\frac{1}{n+1})-(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}>0$，对 $n\in\mathbf{N}_+$ 都成立.

$\therefore a_{n+1}-a_n>0$，即 $a_{n+1}>a_n$ 对 $n\in\mathbf{N}_+$ 恒成立.

$\therefore$数列$\{a_n\}$是递增数列.

【方法延伸】注意类比函数的单调性定义及证明方法来理解并掌握数列的单调性判定方法.

【变式跟踪】1. 已知数列$\{a_n\}$，$a_n=\frac{2n+3}{n+1}$，判断数列$\{a_n\}$的单调性. 并证明 $a_n\leqslant\frac{5}{2}$.

【例 2】已知数列$\{a_n\}$中，$a_n=(m^2-m)(n^3-2n)$，若数列$\{a_n\}$是递减数列，求实数 m 的取值范围.

【思路点拨】解决本题的切入点是由递减数列定义得 $a_n>a_{n+1}$，对 $n\in\mathbf{N}_+$ 恒成立.

$\because$数列为递减数列，$\therefore a_{n+1}<a_n$，$n\in\mathbf{N}_+$，

即 $a_{n+1}-a_n<0$.

又$\because a_{n+1}-a_n=(m^2-m)[(n+1)^3-2(n+1)-(n^3-2n)]$

$=(m^2-m)(3n^2+3n-1)$，

$\therefore(m^2-m)(3n^2+3n-1)<0$.

$\because n\in\mathbf{N}_+$，$\therefore 3n^2+3n-1>0$，$\therefore m^2-m<0$，解得 $0<m<1$.

【方法延伸】数列增减性定义既可正面运用判定数列的增减性，也可逆向运用，建立不等关系，解决参数取值范围的问题.

【变式跟踪】2. 已知 $a_n=a(\frac{1}{2})^n$（$a\neq0$ 且为常数），判断数列$\{a_n\}$的单调性.

【例 3】数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=(n+1)(\frac{9}{10})^n$，$n=1,2,\cdots$，求出$\{a_n\}$中值最大的项.

【思路点拨】值最大的项，应比它前、后的项的值都要大，故从比较 a_{n+1} 与 a_n 的大小入手.

$a_{n+1}-a_n=(n+2)(\frac{9}{10})^{n+1}-(n+1)(\frac{9}{10})^n$

$=\frac{9^n}{10^{n+1}}[9(n+2)-10(n+1)]=\frac{9^n}{10^{n+1}}(8-n)$.

由此可见，当 $n<8$ 时，$a_{n+1}>a_n$，数列递增；当 $n>8$ 时，$a_{n+1}<a_n$，数列递减；当 $n=8$ 时，$a_{n+1}=a_n$，即 $a_9=a_8=\frac{9^9}{10^8}$.

$\therefore a_8,a_9$ 这两项是数列$\{a_n\}$中值最大的项.

【方法延伸】求数列中值最大或最小的项问题，除了用上述比较法，还可用研究函数最值的其它方法，如单调性方法、图象法等.

【变式跟踪】3. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{n-\sqrt{97}}{n-\sqrt{98}}$（$n\in\mathbf{N}_+$），则在数列$\{a_n\}$的前 30 项中，最大项和最小项分别是（　　）

A. a_{30},a_1　　B. a_1,a_{30}　　C. a_{10},a_9　　D. a_{10},a_{30}

思想方法小结

1. 数列是一类离散函数，它是刻画离散过程的重要数学模型. 运用函数观点研究数列的性质是一种基本思想方法.
2. 用图象表示数列，可利用图象的直观性来研究数列的性质，这体现了数列结合思想及函数思想.
3. 判定或证明数列的单调性，常用比较法、图象法或基本函数性质.

(1)用比较法，一般是比较 a_{n+1} 与 a_n 的大小，可用作差法或作商法.

(2)用图象法，一般是根据数列通项公式画出数列的图象. 借助于图象的直观性、分析、证明数列的单调性.

§ 2.1 等差数列

整合探究

◇基础整合

1. 等差数列是第二项开始,每一项与它前一项的差为常数 d 的特殊数列.其通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 中含 n、d、a_1、a_n 四个量,可以知三求其一.
2. 等差数列 $\{a_n\}$ 如下的性质:
   (1) $d=a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\cdots=a_n-a_{n-1}$;
   (2) $a_n=a_1+(n-1)d=a_m+(n-m)d$;
   (3) $\{ka_n+b\}$ 也是等差数列,公差为 kd;
   (4) 若下标和相等,则项的和也相等,即若 $p+k=m+n\Leftrightarrow a_p+a_k=a_m+a_n$.
3. 判断等差数列常用方法是:
   (1) 定义法:$n\geqslant 2$ 时,$a_n-a_{n-1}=d$(常数)恒成立,则 $\{a_n\}$ 是等差数列;
   (2) 中项法:$n\geqslant 2$ 时,$a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ 恒成立,则 $\{a_n\}$ 是等差数列.

◇自主探究

1. 一般地,如果一个数列从______、______起,每一项与它前一项的______都等于__________,那么这个数列叫等差数列.这个常数叫等差数列的________,用字母______表示.
2. $d=$________$=$________$=$________$=\cdots=$________.把各项相加得到 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=$________.
3. 等差数列 $\{a_n\}$ 中当________时,数列是递增数列;当________时,数列为递减数列,当________时,数列为常数列.
4. 等差数列的通项公式________是关于 n 的________,其图象是____________上的等间隔点,且这些点的横坐标为正整数.
5. 如果 a、A、b 成等差数列,那么 A 叫 a 与 b 的________,其中 $A=$________.
6. 判断一个数列是否为等差数列的方法常有两种,即若____________对任意正整数 n 均成立,则 $\{a_n\}$ 为等差数列;或若________________对于任意正整数 n 均成立,则 $\{a_n\}$ 为等差数列.

课堂互动

【例 1】已知等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_{10}=5$,$a_{13}=20$,求 a_{50}.

【思路点拨】把 a_{10}、a_{13} 均用 a_1,d 来表示,然后利用方程组解出 a_1,d 并求出 a_{50} 即可.也可利用 $a_{13}=a_{10}+3d$ 求 d 然后求 a_{50}.

解法一:设数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1,公差为 d,则有

$$\begin{cases}a_1+9d=5\\a_1+12d=20\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a_1=-40\\d=5\end{cases}$$

故 $a_{50}=a_1+49d=-40+49\times5=205$.

解法二:因为 $a_{13}=a_{10}+3d$,$d=\dfrac{a_{13}-a_{10}}{3}=\dfrac{20-5}{3}=5$.

又 $a_{50}=a_{10}+40d=5+200=205$.

解法三:令 $a_n=pn+q$,$\begin{cases}5=10p+q\\20=13p+q\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=5\\q=-45\end{cases}$

故 $a_{50}=5\times50-45=205$.

【方法延伸】求等差数列中的项,可以利用通项公式,把有关项均用首项 a_1 与公差 d 表示出来,利用方程组来求出 a_1 及 d.这就是基本量方法.但若能灵活运用等差数列的特殊性质,可以帮助减少运算量.当然研究数列还可以借用函数方法,也常能化繁为简.

【变式跟踪】1. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列且 $a_5=11$,$a_8=5$,则 $a_n=$__________.

【例 2】等差数列 $\{a_n\}$ 中,若 $p+q=k+n$(p、q、k、$n\in\mathbf{N}^*$),求证 $a_p+a_q=a_k+a_n$.

【思路点拨】可以把 a_p、a_q、a_n、a_k 均用 a_1,d 来表示.

【证明】$a_p+a_q=a_1+(p-1)d+a_1+(q-1)d=2a_1+(p+q-2)d$,

$a_k+a_n=a_1+(k-1)d+a_1+(n-1)d=2a_1+(k+n-2)d$.

由于 $p+q=k+n$,

故 $a_p+a_q=a_k+a_n$.

【方法延伸】本题仍然体现了基本量方法,可见这种方法是非常基本的、通用的方法,应加强领会、运用.另外本题结论可作为等差数列的一个性质使用.

【变式跟踪】2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,

(1) 已知 $a_2+a_3+a_{23}+a_{24}=48$,求 a_{13} 的值.

(2) 已知 $a_1+a_4+a_7=39$,$a_2+a_5+a_8=33$,求 $a_3+a_6+a_9$ 的值.

【例3】已知5个数成等差数列，它们的和为5，平方和为$\frac{85}{9}$，求这5个数.

【思路点拨】方法1采用基本量法，利用已知条件列出关于a_1和d的方程组，求出a_1和d的值.

方法2可根据等差数列定义，设成对称形式：如三个数成等差可设成$a-d$、a、$a+d$；五个数成等差可设成$a-2d$、$a-d$、a、$a+d$、$a+2d$，可简化运算量.

解法一：设此数列首项为a_1，公差为d，由已知条件得

$$\begin{cases}a_1+a_1+d+a_1+2d+a_1+3d+a_1+4d=5\\a_1^2+(a_1+d)^2+(a_1+2d)^2+(a_1+3d)^2+(a_1+4d)^2=\frac{85}{9}\end{cases}$$

整理得$\begin{cases}5a_1+10d=5\\5a_1^2+20a_1d+30d^2=\frac{85}{9}\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-\frac{1}{3}\\d=\frac{2}{3}\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=\frac{7}{3}\\d=-\frac{2}{3}\end{cases}$

故所求的五个数为$-\frac{1}{3}$、$\frac{1}{3}$、1、$\frac{5}{3}$、$\frac{7}{3}$或$\frac{7}{3}$、$\frac{5}{3}$、1、$\frac{1}{3}$、$-\frac{1}{3}$.

解法二：

设五个数分别为$a-2d$、$a-d$、a、$a+d$、$a+2d$.

由题意可知

$$\begin{cases}5a=5\\(a-2d)^2+(a+2d)^2+(a-d)^2+(a+d)^2+a^2=\frac{85}{9}\end{cases}$$

$\begin{cases}5a=5\\5a^2+10d^2=\frac{85}{9}\end{cases}$　得$\begin{cases}a=1\\d=\pm\frac{2}{3}\end{cases}$

当$d=\frac{2}{3}$时五个数分别为$-\frac{1}{3}$、$\frac{1}{3}$、1、$\frac{5}{3}$、$\frac{7}{3}$；

当$d=-\frac{2}{3}$时五个数分别为$\frac{7}{3}$、$\frac{5}{3}$、1、$\frac{1}{3}$、$-\frac{1}{3}$.

【方法延伸】利用基本量法（求a_1，d）是解数列问题的通法，但有时显得繁琐，若能灵活运用它的特性，如对称地设出各项$a-d$、a、$a+d$等，可以简化运算.

【变式跟踪】3. 已知4个数成等差数列，它们的和为26，中间两项的积为40，求这四个数.

【例4】已知数列$\{a_n\}$是等差数列，$b_n=a_{n+1}^2-a_n^2$，求证：数列$\{b_n\}$也是等差数列.

【思路点拨】要证明$\{b_n\}$是等差数列，可以证明$b_n-b_{n-1}=$常数.

【证明】$a_{n+1}=a_n+d$，　$a_{n+2}=a_{n+1}+d$.

$$\begin{aligned}b_{n+1}-b_n&=(a_{n+2}^2-a_{n+1}^2)-(a_{n+1}^2-a_n^2)\\&=(a_{n+1}+d)^2-a_{n+1}^2-(a_n+d)^2+a_n^2\\&=d^2+2a_{n+1}d-d^2-2a_nd\\&=2d(a_{n+1}-a_n)=2d^2=\text{常数}.(n\geq1,n\in\mathbf{N}^*)\end{aligned}$$

故数列$\{b_n\}$为等差数列.

【方法延伸】证明一个数列为等差数列，常见方法有(1)定义法，即证$a_{n+1}-a_n=$常数；(2)中项法：$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$，但在证明时特别注意首项，千万别漏了对首项的检验.

【变式跟踪】4. 已知a,b,c成等差数列，求证数列$a^2(b+c)$，$b^2(c+a)$，$c^2(a+b)$也成等差数列.

【例5】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=4$，$a_n=4-\frac{4}{a_{n-1}}(n\geq2)$，

令$b_n=\frac{1}{a_n-2}$.

(1)求证数列$\{b_n\}$是等差数列.

(2)求数列$\{b_n\}$、$\{a_n\}$的通项公式.

【思路点拨】要证$\{b_n\}$是等差数列，只需证明$b_{n+1}-b_n$是常数，即证$\frac{1}{a_{n+1}-2}-\frac{1}{a_n-2}$是常数.

【证明】$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{a_{n+1}-2}-\frac{1}{a_n-2}=\frac{1}{4-\frac{4}{a_n}-2}-\frac{1}{a_n-2}$

$$=\frac{a_n}{2a_n-4}-\frac{1}{a_n-2}=\frac{a_n-2}{2(a_n-2)}=\frac{1}{2}(\text{常数}).$$

$n\in\mathbf{N}^*$时$\{b_n\}$均为等差数列.

(2)由(1)可知$\{b_n\}$是$b_1=\frac{1}{2}$，公差为$\frac{1}{2}$的等差数列，即

$b_n=\frac{1}{2}+(n-1)\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$，

$a_n-2=\frac{2}{n}$，　$a_n=2+\frac{2}{n}$.

即$\{a_n\}\{b_n\}$的通项公式分别为$b_n=\frac{n}{2}$，$a_n=2+\frac{2}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

【方法延伸】递推公式也是给出数列的一种常见方法，本题实质是由数列$\{a_n\}$构造了一个等差数列$\{\frac{1}{a_n-2}\}$，通过等差数列的通项公式，来求解数列$\{a_n\}$的通项公式. 在求递推数列的通项公式时，应特别注意把握递推公式的结构特点，对递推公式进行适当变形、转化，构造出等差或等比数列来进行求解.

【变式跟踪】5. 数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且满足$a_{n+1}=a_n+2\sqrt{a_n}+1$，$a_1=2$，求$a_n$.

思路方法小结

1. 等差数列的通项公式涉及四个量：a_n,a_1,n,d，其中有关量的计算问题，一般利用方程思想，列方程或方程组进行求解.
2. 等差数列具有许多特殊性质，若能灵活运用这些性质，可简化运算. 如与首末两项等距离的两项之和总相等，即 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}\cdots=a_k+a_{n-k+1}$.
3. 等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 是关于 n 的一次函数，数列$\{a_n\}$表示的点均在一条直线上，故经常利用一次函数的单调性解决有关问题.
4. 等差数列$\{a_n\}$中提取某些特定项构成新数列时，若项数成等差数列，则新数列也成等差数列.

§ 2.2 等差数列的前 n 项和

整合探究

◇基础整合

1. $a_n=\begin{cases}S_1(n=1)\\S_n=S_{n-1}(n\geqslant 2)\end{cases}$.
2. 等差数列

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(a_k+a_{n-k+1})}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

3. 等差数列的前 n 项和 $S_n=An^2+Bn$ 是过原点的抛物线的孤立点.
4. 若数列$\{a_n\}$为等差数列，S_n 为其前 n 项和，则数列 $S_k,S_{2k}-S_k,S_{3k}-S_{2k},\cdots(k\in\mathbf{N}^*)$也是等差数列.
5. 等差数列$\{a_n\}$中，
$S_{2n-1}=(2n-1)a_n$.

◇自主探究

1. 若定义把 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 叫做数列$\{a_n\}$的前 n 项和并记作 S_n，则有：$S_{n-1}=$________，即有________$(n\geqslant 2)$或________$(n\geqslant 2)$（把 S_n，S_{n-1}，a_n 表示出来）. 当 $n=1$ 时，________.
2. 等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=$________$=$________.
3. 等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式的推导所用的方法是________.
4. $f(n)=an^2+bn+c$ 表示某等差数列前 n 项和的充要条件是________.
5. 高斯 10 岁时就能神速的算出 $1+2+3+\cdots+100=5050$.
(1)我们回顾他是如何快速求和的，他抓住了问题的什么特征？
(2)如果换成 $1+2+3+\cdots+200=$？能否快速求和？
6. 在等差数列$\{a_n\}$中，________$=$________$=$________$=\cdots=a_n+a_1$，故 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=\cdots=\frac{n(a_k+a_{n-k+1})}{2}$.
7. 数列$\{a_n\}$为等差数列，若 n 为奇数，则 S_n 与 $a_{\frac{n+1}{2}}$ 的关系是________.
8. 若$\{a_n\}$为等差数列，S_n 为前 n 项和，则 $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$ 成________数列.

课堂互动

【例 1】设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项的和，已知 $S_9=18$，$S_n=240$，$a_{n-4}=30(n>9)$，求 n.

【思路点拨】利用列方程组的方法，列出关于 a_1,n,d 的三个方程，求出 a_1,d,n 的值.

解法一：设数列的首项为 a_1，公差为 d，则有

$$\begin{cases}9a_1+\frac{9\times 8}{2}d=18\\na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=240\\a_1+(n-5)d=30\end{cases}$$

即$\begin{cases}a_1+4d=2\\2na_1+n(n-1)d=480\\a_1+(n-1)d-4d=30\end{cases}$

解得 $n=15$.

解法二：因为 $S_9=9a_5=18$，故 $a_5=2$.

又因为 $a_1+a_n=a_5+a_{n-4}=32$，故 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n}{2}\cdot 32=240$，故 $n=15$.

【方法延伸】用方程思想来解决等差数列的计算问题是基本解法. 灵活地运用性质 $a_p+a_q=a_{p-k}+a_{q+k}$ 及求和公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 可以使问题的解答变得简单、快捷.

【变式跟踪】1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中.

(1) 若 $a_1=\frac{5}{6}$，公差 $d=-\frac{1}{6}$，$S_n=-5$，求 n 和 a_n.

(2) 若 $a_1=4$，$S_8=172$，求 a_8 和 d.

【例 2】(1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1-a_4-a_8-a_{12}+a_{15}=2$，求 a_3+a_{13} 及 S_{15}.

(2) 一个有 n 项的等差数列中，前 4 项的和为 26，末四项的和为 110. 所有项的和为 187，求项数 n.

【思路点拨】(1) 因为 $a_3+a_{13}=a_1+a_{15}=a_4+a_{12}=2a_8$，故可直接求出 a_3+a_{13} 的值.

(2) 因为 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}=4(a_1+a_n)$，故可以灵活运用求和公式.

(1) 因为 $a_3+a_{13}=a_1+a_{15}=a_4+a_{12}=2a_8$，故有 $a_8=-2$，$a_3+a_{13}=-4$，

$S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=\frac{15(-4)}{2}=-30$.

(2) 因为 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}=4(a_1+a_n)$，

$4(a_1+a_n)=136$，故 $a_1+a_n=34$，

$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，即 $187=\frac{n\times 34}{2}$，$n=11$.

【方法延伸】灵活运用等差数列的性质 $m+n=p+q$，则有 $a_m+a_n=a_p+a_q$ 及 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n}{2}(a_2+a_{n-1})=\cdots=\frac{n}{2}(a_k+a_{n-k+1})$ 是简化运算的最佳途径.

【变式跟踪】2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中.

(1) 若 $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=34$，则 $S_{20}=$________.

(2) 前 12 项和 $S_{12}=354$，且前 12 项中偶数项的和为奇数项的和的比为 32∶27，求公差 d.

【例 3】已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-60$，$a_{17}=-12$，求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 S'_n.

【思路点拨】求数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的绝对值之和，我们应分清楚数列中哪些项是正的，哪些项是负的，然后分段求出等差数列的和.

设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $d=\frac{a_{17}-a_1}{17-1}=3$.

又 $a_n=a_1+(n-1)d=-60+3(n-1)=3n-63$.

故 $\{a_n\}$ 中前 20 项均为负数，$a_{21}=0$，第 21 项之后的数均为正数.

(1) 于是当 $n\leqslant 20$ 时，$S'_n=-S_n=-[na_1+\frac{n(n-1)}{2}d]$，

$S'_n=-[-60n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 3]=-\frac{3}{2}n^2+\frac{123}{2}n$.

(2) 当 $n\geqslant 21$ 时，$S'_n=-S_{20}+(S_n-S_{20})=S_n-2S_{20}$

$=-60n+\frac{n(n-1)}{2}\times 3-2(-60\times 20+\frac{20\times 19}{2}\times 3)$

$=\frac{3}{2}n^2+\frac{123}{2}n+1260$.

故数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 $S'_n=$

$$\begin{cases}-\frac{3}{2}n^2+\frac{123}{2}n\ (n\leqslant 20)\\ \frac{3}{2}n^2-\frac{123}{2}n+1260\ (n\geqslant 21)\end{cases}$$

【方法延伸】本题是绝对值数列求和问题的典型例题，类似问题就可以如此处理. 其解题关键一步是判定数列中哪些项为正，哪些项为负数，从而依绝对值的意义去绝对值符号.

【变式跟踪】3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n$，求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 T_n.

【例 4】已知在公差 $d<0$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 中，$S_9=S_{17}$，问数列前多少项和最大？

【思路点拨】S_n 是关于 n 的二次函数，因为 $d<0$，所以 S_n 有最大值. 可以从函数的最值入手，也可以从抛物线的特点入手.

解法一：$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$.

因为 $S_9=S_{17}$，$9a_1+\frac{9\times 8}{2}d=17a_1+\frac{17\times 16}{2}d$，得 $a_1=-\frac{25}{2}d$.

$S_n=\frac{d}{2}n^2-\frac{26}{2}dn=\frac{d}{2}(n^2-26n)=\frac{d}{2}(n-13)^2-\frac{169}{2}d$.

$d<0$，故 S_n 有最大值，当 $n=13$ 时最大值为 $-\frac{169}{2}d$.

解法二：$S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$ 是一条开口向下且过原点的抛物线，$S_9=S_{17}$，其对称轴是 $n=13$，故当 $n=13$ 时，S_n 有最大值 S_{13}.

解法三：因为 $S_9=S_{17}$，所以有 $a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots a_{17}=0$，即 $a_{13}+a_{14}=0$，又因为 $d<0$，所以数列 $\{a_n\}$ 单调递减，

故 $a_{13}>0$，$a_{14}<0$，从而 S_{13} 最大.

【方法延伸】1. 当公差 $d\neq0$ 时，等差数列前 n 项和 S_n 是关于 n 的二次函数，一般地，当 n 取距离对称轴最近的正整数时 S_n 取得最大(最小)值.

2. 等差数列 $d\neq0$ 时，数列通项 $a_n=a_1+(n-1)d$ 是关于 n 的一次函数即是单调的，当 $d<0$ 时单调递减，当前 k 项都大于 0，而 $a_{k+1},a_{k+2},\cdots$ 都小于 0 或 $a_{k+1}=0$，故 $S_n=S_k$ 时，取得最大，即 $\begin{cases}a_k\geqslant0\\a_{k+1}<0\end{cases}$ 时，S_k 取到最大.

当 $d>0$ 时，可作类似的分析得到 $\begin{cases}a_k\leqslant0\\a_{k+1}>0\end{cases}$ 时，S_k 最小.

【变式跟踪】4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$|a_5|=|a_9|$，公差 $d>0$，则使得前 n 项和 S_n 取得最小值时的正整数 n 的值是 ( )

A. 4 和 5 B. 5 和 6 C. 6 和 7 D. 7 和 8

【例 5】已知各项均不为零的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_n+3S_nS_{n-1}=0(n\geqslant2)$，$a_1=\frac{1}{3}$，

(1) 求证 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 是等差数列.

(2) 求 a_n 的表达式.

【思路点拨】由已知条件中 a_n 和 S_n 的关系式，联想到 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 从而消去 a_n 得到 S_n 与 S_{n-1} 的关系.

证明：(1) 因为 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant2)$，所以 $S_n-S_{n-1}+3SnS_{n-1}=0(n\geqslant2)$.

因为 $a_n=-3S_nS_{n-1}\neq0$，故 $S_n\neq0$，$S_{n-1}\neq0$，于是有

$S_{n-1}-S_n=3S_nS_{n-1}$，得 $\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=3$(常数).

$\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=3$ 且 $\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_1}=3$.

$\therefore\{\frac{1}{S_n}\}$ 是以 3 为首项，3 为公差的等差数列.

(2) 由(1)可知 $\frac{1}{S_n}=3+(n-1)3=3n$，即 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{3n}$.

$n=1$ 时，$S_1=a_1=\frac{1}{3}$；

$n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{3n}-\frac{1}{3(n-1)}=-\frac{1}{3n(n-1)}$.

即 $a_n=\begin{cases}\frac{1}{3} & (n=1)\\-\frac{1}{3n(n-1)} & (n\geqslant2)\end{cases}$.

【方法延伸】1. 数列 $\{a_n\}$ 可能不是等差数列，但 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 或其变式有可能是等差数列.

2. 在用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant2)$ 时特别不要忘了 $n=1$ 时的值.

3. 证明等差数列常用定义法.

【变式跟踪】5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，其前 n 项和 S_n 与 a_n 之间满足 $a_n=\frac{2S_n^2}{2S_{n-1}}(n\geqslant2)$.

(1) 求证数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 为等差数列；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

思想方法小结

1. 等差数列前 n 项和公式是利用倒序相加推导出来的，由于等差数列中若 $m+n=p+q$，则有 $a_m+a_n=a_p+a_q$，故前 n 项和公式可以作灵活的变形运用. 即 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=\cdots=\frac{n(a_k+a_{n-k+1})}{2}$，当次数为奇数时，$S_{2n-1}=(2n-1)a_n$($a_n$ 为中间项).

2. 等差数列前 n 项和公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$，即 $S_n=An^2+Bn$ 从函数观点来看它是一个二次函数，其图象是过原点的抛物线. 经常结合它的通项 $a_n=an+b$，一起利用函数的观点来解决有关最值等问题.

3. 由于等差数列中的五个量 a_1,d,a_n,S_n,n 之间关系密切，故常利用方程的思想解决知三求二的问题.

4. a_n 与 S_n 之间的关系式 $a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\S_n-S_{n-1} & (n\geqslant2)\end{cases}$ 沟通了数列中 a_n 与 S_n 的关系. 由此可以把 a_n 与 S_n 相互转化，这是解决有些问题的关键，但必须注意条件，验证 $n=1$ 时是否适合.

§3.1 等比数列

整合探究

◇基础整合

1. 等比数列的判定方法.

(1)若 $a_n=a_{n-1}\cdot q$(其中 q 是不为 0 的常数，$n\geqslant 2$)，则$\{a_n\}$是等比数列；

(2)若 $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}(n\geqslant 2,a_n\neq 0)$，则$\{a_n\}$是等比数列；

(3)若 $a_n=cq^n$(q,c 均为非零常数)，则$\{a_n\}$是等比数列.

2. 公比为 q 的等比数列$\{a_n\}$中，$a_n=a_1q^{n-1}=a_mq^{n-m}(m,n\in \mathbf{N}^*)$.

3. 等比数列$\{a_n\}$中，当 $m+n=p+q(m,n,p,g\in\mathbf{N}^+)$，则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$.

4. 等比数列的通项公式与指数函数密切相关.

当 $q>1,a_1>0$ 或 $0<q<1,a_1<0$ 时，$\{a_n\}$是递增数列；

当 $q>1,a_1<0$ 或 $0<q<1,a_1>0$ 时，$\{a_n\}$是递减数列；

当 $q=1$ 时，$\{a_n\}$为常数列，$q<0$ 时，$\{a_n\}$是摆动数列.

◇自主探究

1. 一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的______都等于____________，那么这个数列叫作____________，这个常数叫做等比数列的________，常用字母____表示($q\neq 0$).

2. 公比 $q=$__________$=$__________$=$__________$=\cdots=$__________，通项公式 $a_n=$__________. 课本上是用________得到的. 你还能用其它方法得到吗？

______________________________.

3. 等比数列中的项 a_n 及公比 q 可以为零吗？是否存在既成等差数列又成等比数列的数列？

4. 等比数列的通项公式与指数函数有何联系？

5. 若 a,G,b 成等比数列，那么 G 叫 a 与 b 的__________且________，反之如果 $a_n\neq 0$ 且 $a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}$，对任意 $n\in \mathbf{N}^*$ 都成立，则数列$\{a_n\}$是__________.

6. 2 与 4 的等比中项是__________，-2 与 4 的等比中项________.

课堂互动

【例 1】已知无穷数列 $1,10^{\frac{1}{5}},10^{\frac{2}{5}}\cdots10^{\frac{n-1}{5}}\cdots$，求证：

(1)这个数列是等比数列；

(2)这个数列中的任意一项是其后第 5 项的$\frac{1}{10}$倍；

(3)数列中任意两项之积仍为数列中的项.

【思路点拨】利用等比数列的定义$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$(常数)，然后再利用通项公式进行判定.

(1)任取数列中的相邻两项

$a_n=10^{\frac{n-1}{5}},a_{n+1}=10^{\frac{n}{5}},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{10^{\frac{n}{5}}}{10^{\frac{n-1}{5}}}=10^{\frac{1}{5}}$.

由等比数列定义可知$\{a_n\}$是以首项 $a_1=1$，公比 $q=10^{\frac{1}{5}}$ 的等比数列.

(2)任取数列中的一项 $a_m=10^{\frac{m-1}{5}}$，其后第 5 项 $a_{m+5}=10^{\frac{m+4}{5}}$，

则$\frac{a_m}{a_{m+5}}=\frac{10^{\frac{m-1}{5}}}{10^{\frac{m+4}{5}}}=10^{-1}=\frac{1}{10}$得证.

(3)任取数列中的任意两项第 n_1,n_2 项，且 $n_1\neq n_2$，

$a_{n_1}=10^{\frac{n_1-1}{5}},a_{n_2}=10\,\frac{n_2-1}{5}$，

$a_{n1}\cdot a_{n2}=10^{\frac{n_1-1}{5}}\cdot 10^{\frac{n_2-1}{5}}=10^{\frac{n_1+n_2-2}{5}}=10^{\frac{(n_1+n_2-1)-1}{5}}$.

因为 $n_1\geqslant 1,n_2\geqslant 1,n_1,n_2\in\mathbf{N}_+,n_1\neq n_2$.

故 $n_1+n_2-2>0$，且 $n_1+n_2-2\in\mathbf{N}^*$.

即 $a_{n1}\cdot a_{n2}$ 是该数列中第 n_1+n_2-1 项.

【方法延伸】证明数列为等比数列，通常用定义证明，即证$\frac{a_{n+1}}{a_n}=$常数，对 $n\in\mathbf{N}_+$ 恒成立.

【变式跟踪】1. 已知数列$\{a_n\}$是等比数列且 $a_1=a,a_2=2a+2,a_3=3a+3$，试问$-13\frac{1}{2}$是否为这个数列中的项？若是，它是第几项？若不是，说明理由.