变分法及有限元讲义

钱伟长编著

（第四章）

山东工學院

1978

第　四　章

泛函变分的几种近似计算法

§4—1　泛函极值的近似和极值函数的近似

(1)　极小化(极大化)序列

如果从一切满足边界条件和一定的连续条件的函数中寻找使泛函达到极值的函数，则这个数值函数一定满足欧拉方程。我们的问题就是怎样求解欧拉方程来决定这个函数了，但在不少问题里求欧拉方程的精确解并不容易，人们只能借助于各种近似解，其中最有效的近似解常是直接从泛函的变分问题中找到的。这类近似解法通称泛函变分近似解。第二章中提到的瑞利立兹法求解特征值问题就是比较有名的例子。

人们很容易理解到，如果不从一切函数中寻找使泛函达到极值的函数，而只从有限个函数中寻找使泛函达到极值的函数，则这样缩小了函数寻找范围找到的极值(譬如说是最小值)一定比应有的极值大(即大于真正的最小值)，或至少相等。如果我们把函数寻找范围逐步扩大，则所得数值(即最小值)逐步减少，逐步向真正的数值靠近，从理论上讲，只有当人们把函数寻找范围扩大到包括一切满足边界条件和一定的连续条件的函数时，才能使泛函达到真正的极值，其它逐级找到的极值都是近似值。

人们除了通过欧拉方程求精确解外，事实上很少能把寻找函数的范围真正扩大到包括一切函数的。人们的实践证明，如果在既满足边界条件又满足一定的连续条件的一个系列的函数中逐步扩大寻找范围，也能逐步接近真正的极值；如果极值是最小值，则从较大的一侧向最小值接近，亦即提供最小值的上限。如果极值是最大值，则从较小的一侧向最大值接近，亦即提供最大值的下限。

设有一系列既满足边界条件又满足一定的连续条件的函数 $g_0(x)$，$g_1(x)$，$g_2(x)\cdots\cdots g_n(x)$，……。用这些函数来构成一系列提供选择极值的各级近似函数。

$$
\left.
\begin{aligned}
f_0(x) &= a_{00}g_0(x) \\
f_1(x) &= a_{10}g_0(x)+a_{11}g_1(x) \\
f_2(x) &= a_{20}g_0(x)+a_{21}g_1(x)+a_{22}g_2(x) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_n(x) &= a_{n0}g_0(x)+a_{n1}g_1(x)+a_{n2}g_2(x)+\cdots\cdots a_{nn}g_n(x)
\end{aligned}
\right\} \quad (4.1)
$$

a_{ij}为待定系数，在变分时，调整a_{ij}使泛函达到在各项近似的极值。用$f_0(x)$作为近似函数时，泛函达到的极值为V_0，用$f_1(x)$作为近似函数时，泛函达到的极值为V_1，因为$f_1(x)$比$f_0(x)$的选择范围扩大了，而且是包括了$f_0(x)$的选择范围，所以$V_0 \geq V_1$（设本题为极小值问题），同样$f_2(x)$的极值V_2必小于V_1（至多等于V_1），亦即$V_0 \geq V_1 \geq V_2$，依此类推　在各级近似下，得

$$V_0 \geq V_1 \geq V_2 \geq \cdots\cdots \geq V_n \geq \cdots\cdots \geq V \text{（极小值）} \qquad (4-2)$$

V为本题真正的极值。

凡能使各级近似的极值像（4－2）这样逐步接近真正的极小值的这一系列近似函数（如$f_n(x)$）称为极小化序列。极小化序列提供极小值的上限。

同样，对于极大值问题而言，如果有一序列函数$f_0(x)$，$f_1(x)$，……$f_n(x)$……能使近似的各级极值按

$$V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \cdots\cdots \leq V_n \leq \cdots\cdots \leq V \text{（极大值）} \qquad (4-3)$$

这样从下面逐步接近真正的极大值V，称为极大化序列。极大化序列提供极大值的下限。

我们的问题是：即使各级近似极值的极限确为真正的数值。

即：

$$\lim_{n\to\infty} V_n = V \qquad (4-4)$$

极小化序列（或极大化序列）的极限是不是真正的极限函数呢？即下式是不是成立呢？

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = y(x) \qquad (4-5)$$

我们的答案是有条件的，也即是说：极小化序列（极大化序列）的极限并不无条件地是真正的极限函数。这样的结论是维尔斯特拉斯（K·Wellsdrass，1870）首先用一个特例来指出的。注

（注）在维尔斯特拉斯的短文（1870）发表以前，人们包括黎曼（Riemann）在内，都没有对这个问题提出过怀疑，都认为极小化序列的极限必然给出真正的极限函数。（这篇短文放在维尔斯特拉斯全集第二卷49－53页），维尔斯特拉斯用一个特例否定了当时为大家所公认的所谓"狄利克雷原理"。震动了当时数学界和理论物理学界，使黎曼，汤姆逊，狄利克等有关工作部失去了理论根据。

2、<u>得不到正确极值函数的极小化序列反例</u>

现在让我们用一两个简单反例来说明这个问题。

研究通过 $x^2+y^2=1$（以园点为中心的园）的最小曲面。泛函为

$$I(z)=\iint_S\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \qquad (4-6)$$

S的边界C为 $x^2+y^2=1$ 的这园，亦即

$$z(x,y)\Big|_{x^2+y^2=1}=0 \qquad (4-7)$$

我们要求在条件（4－7）下，求 $I(z)$ 的最小值。我们从物理上很易看到，其极值曲面是以 $x^2+y^2=1$ 为边界的一个园。即 $z=0$，其最小的面积为 π，亦即对其他曲面而言。

$$I(z)\geq\pi \qquad (4-8)$$

但是，对这个简单的题而言，我们可以找到一个极小化序列：设 $z_n(x,y)$ 为

$$z_n(x,y)=\begin{cases}0 & \text{在 } 1\geq x^2+y^2\geq\dfrac{1}{n^2}\text{ 中的任意 } x,y\\[2ex] \dfrac{A}{2}\cos n\pi\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{A}{2} & \text{在 } \dfrac{1}{n^2}>x^2+y^2\geq 0\end{cases}$$

中的任意 x,y (4－9)

其中A为一常量。$z_n(x,y)$ 的几何形状见图4－1。这些函数是连续的，到处有连续导数，同时也满足（4－7）式的边界条件。如果用极坐标，$I(z_n)$ 可以写成

$$I(z_n)=\iint\limits_{\frac{1}{n^2}\leq x^2+y^2\leq 1}dx\,dy+\iint\limits_{0\leq x^2+y^2\leq\frac{1}{n^2}}\sqrt{1+A^2\frac{n^2\pi^2}{4}\sin^2 n\pi\sqrt{x^2+y^2}}\;dx\,dy$$

$$=\pi-\frac{\pi}{n^2}+\int_0^{2\pi}\int_0^{1/n}\sqrt{1+A^2\frac{n^2\pi^2}{4}\sin^2 n\pi r}\;r\,dr\,d\theta$$

(4－10)

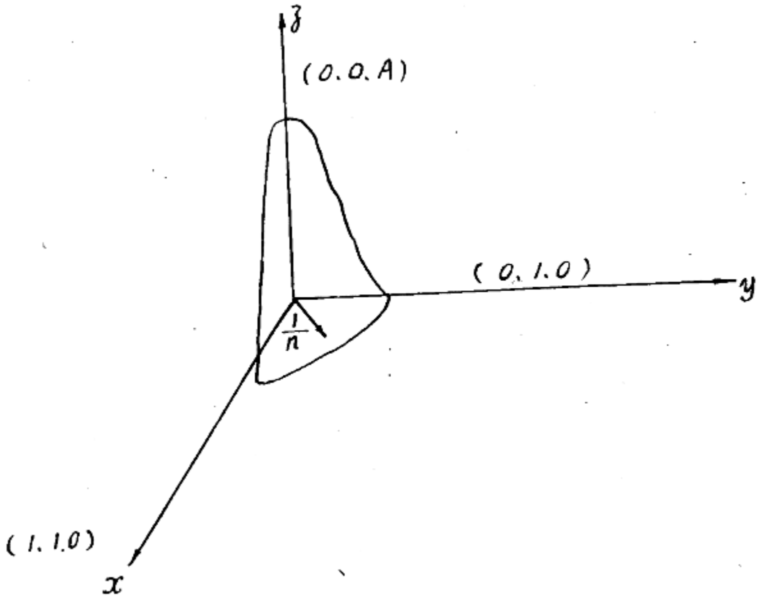

图 4－1　（4－9）式的曲面形状

但是，对于任意n而言

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1/n}\sqrt{1+A^2\frac{n^2\pi^2}{4}\sin^2 n\pi r}\quad r\,dr\,d\theta$$

$$\leq\int_0^{2\pi}\int_0^{1/n}\sqrt{1+A\frac{n^2\pi^2}{4}}\,r\,dr\,d\theta=\frac{\pi^2}{2n}\sqrt{A^2+\frac{4}{n^2\pi^2}} \tag{4-11}$$

于是

$$I(z_n)\leq\pi-\frac{\pi}{n^2}+\frac{\pi^2}{2n}\sqrt{A^2+\frac{4}{n^2\pi^2}} \tag{4-12}$$

当$n\longrightarrow\infty$时，有极限

$$\lim_{n\to\infty} I(z_n)=\pi \tag{4-13}$$

所以，这个极小化序例的泛函极值，确为最小面积π，但$n\to\infty$时的极限函数则不是$z=0$这个极限园，而是，从，（4－9）

$$\lim_{n\to\infty} z_n(x,y)=\begin{cases}0\text{ 当 }(x,y)\neq(0,0)\\ A\text{ 当 }(x,y)=(0,0)\end{cases} \tag{4-14}$$

所以，在这个问题上，我们找到了一个极小化序例，其泛函的极值为本题的最小值，但序例的极限函数不是真正的极限函数。

另一个例子是有名的狄利克雷问题，求泛函：

$$V(f)=\iint_D(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\,dx\,dy \tag{4-15}$$

的极小值，设D的边界为C。$\varphi(x,y)$通过C。亦即在C上，$\varphi(x,y)=0$。所有容许曲线在D中是连续的，而且是逐段地光滑的。这个极值函数很明显是$\varphi(x,y)=0$。因为$\varphi_x^2+\varphi_y^2$永远是正的，只要$\varphi(x,y)$在那一点不等于0，而且在这一点附近有一个区域内φ_x，φ_y存在，则$\varphi_x^2+\varphi_y^2$在那个区域内都不等于零，而V(φ)就比零大。所以，这个问题的极值函数为$\varphi(x,y)$到处等于零，而极值$V(\varphi)=V(0)=0$。

现在我们对这个问题可以找到一个极小化序例，设在边界C内有一个园，其半径为a，其园心为坐标原点。设在园a和边界C之间的区域内，$\varphi(x,y)$到处是零。设有另一个园，其半径为a^2，设$a<1$，则园a^2必在园a之内，在园a^2和园a之间的区域内，$\varphi(x,y)=A\ell n(r/a)/\ell n a$。这里采用了极坐标$(r,\theta)$，坐标原点即为极点。又设在园$A^2$之内，$\varphi=A$。亦即

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}0 & \text{在边界之内和园 } r=a \text{ 之间}\\[4pt] \dfrac{A\ell n\dfrac{r}{a}}{\ell n a} & a^2\le r\le a \quad (a<1)\\[4pt] A & 0\le r\le a^2\end{cases} \tag{4-16}$$

这个函数本身是连续的，而且是逐段光滑的。如果把（4—16）代入（4—5），在$r=a$之外，$\varphi_x^2+\varphi_y^2$恒等于零，所以（4—15）式可以用极坐标表示为

$$V(\varphi a)=\frac{A^2}{(\ell n a)^2}\int_{a^2}^{a}\left(\frac{1}{r^2}\right)2\pi r\,dr=-\frac{2\pi}{\ell n a}A^2 \tag{4-17}$$

我们可以看到当我们使a的值逐步降低时，得到一个极小化序列（4—16）其极限为：

$$\lim_{a\to 0}V(\varphi a)=0 \tag{4-18}$$

它是本题的真正极小值，但是$a\to 0$时，（4—16）式的函数极值並不

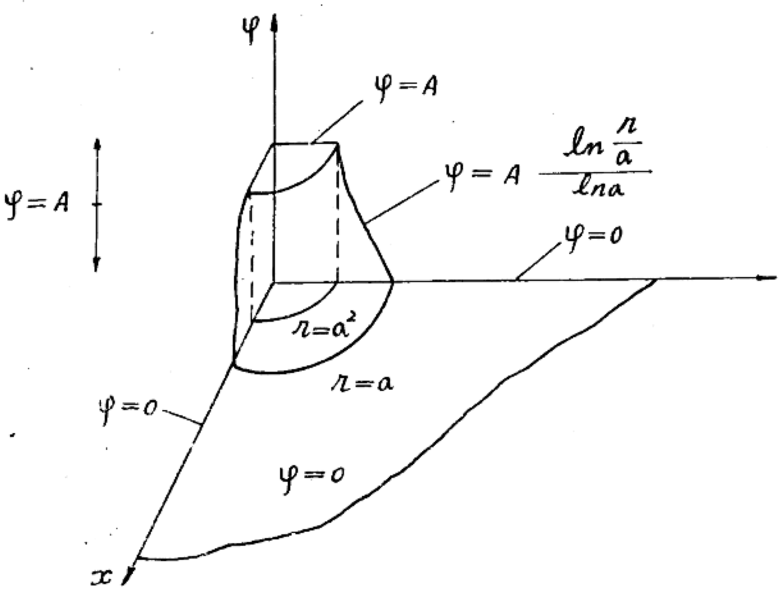

图 4—2　(4—16)的曲面

是真正的极限函数（即 φ 到处为零，或 $\varphi(x,y)\equiv 0$）而是

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}0 & r\neq 0 \text{ 的其它各点}\\ A & r=0\end{cases}\tag{4-19}$$

即，当 $a\to 0$ 时，我们并不能从极小化序列中求得真正的极限函数 $\varphi(x,y)\equiv 0$。

所以，一般讲来，极小化（或极大化）序列并不一定能给出问题的极值函数。换句话说极小化（或极大化）序列只是在一定的条件下才能收敛到使泛函达到极小（或极大）的极值函数。

3、弗立德里斯条件

人们经过了长期的努力，研究这些条件，得到了部分的解决，其中最有实用价值的而又最有成效的是弗立德里斯（K：Friedrichs）。

1934年）完成的〔注〕。我们在这里不准备详细叙述弗立德里斯的理论证明，但将简单地引用他的结论，弗立德里斯研究的问题都是有关以线性微分方程为欧拉方程的泛函。例如：

（A）斯脱姆一刘维耳型的二阶当微分方程

$$Ay=\frac{-d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+\psi(x)y=f(x) \qquad (4-20)$$

的泛函

$$V(y)=(Ay、y)-2(f、y) \qquad (4-21)$$

其中A为算子，$(Ay、y)$，$(f、y)$分别为Ay，y及f，y的内积

$$A=\frac{-d}{dx}\,p(x)\frac{d}{dx}+\psi(x) \qquad (4-22A)$$

$$(Ay,y)=\int_{x_1}^{x_2}(Ay)y\,dx=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left\{-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+\right.$$

$$\left.+\psi(x)y\right\}y\,dx \qquad (4-22B)$$

$$(f,y)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)y\,dx \qquad (4-22C)$$

这里的$p(x)$，$\psi(x)$在$x_1\leq x\leq x_2$中都是正 的，而且是连续的。

〔注〕弗立德里斯的工作发表在柏林的数学年报（Mathe－matiShe，Annalen，Berlin）109卷（1934），其后，又在美国的数学月报（Amcrican JOurnal of matematicS）。68卷第4期（1946年）和数学年报（Annals，Ofmathematics）第48卷第二期（1947年）发表了有关这个问题在弹性力学和势函数方面的应用。

（B） 斯脱姆—刘维耳型的 $2k$ 阶常微分方程

$$Ay=\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\frac{d^j}{dx^j}\left[p_j(x)\frac{d^jy}{dx^j}\right]+q(x)y$$

$$=f(x) \tag{4-23}$$

的泛函也可以写成（4－21）的形式，但算子 A，和积分（Ay，y）的内容不同，它们是：

$$A=\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\frac{d^j}{dx^j}\left[p_j(x)\frac{d^j}{dx^j}\right]+q(x) \tag{4-24A}$$

$$(Ay,y)=\int_{x_1}^{x_2}(Ay)y\,dx$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\frac{d^j}{dx^j}\left[p_j(x)\frac{d^jy}{dx^j}\right]+\right.$$

$$\left.+q(x)y\right\}y\,dx \tag{4-24B}$$

$$(f,y)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)y\,dx \tag{4-24C}$$

这里的 $p_j(x)$，$q(x)$ 在 $x_1\leq x\leq x_2$ 中都是正的，而且是连续的。

（C） 泊松方程和拉普拉斯方程

$$Au=-\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)=f(x,y) \tag{4-25}$$

的泛函也可以写成（4－21）的形式，或为

$$V(u)=(Au,u)-2(f,u) \tag{4-26}$$

其中

$$A=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{4-27A}$$

$$(Au,u)=-\iint_D\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)u\,dx\,dy \tag{4-27B}$$

$$(f,u)=\iint_D f(x,y)u\,dx\,dy \qquad (4\cdot27C)$$

或者，三维的泊桑方程

$$Au=-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=f(x,y,z) \qquad (4\cdot28)$$

的泛函和（4·26）式形式相同，但

$$A=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \qquad (4\cdot29A)$$

$$(Au,u)=-\iiint_\tau\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)u\,dx\,dy\,dz \qquad (4\cdot29B)$$

$$(f,u)=\iiint_\tau f(x,y,z)u\,dx\,dy\,dz \qquad (4\cdot29C)$$

（D）一般的二阶椭园型微分方程

$$Au=\sum_{j,k=1}^{m}\frac{\partial}{2x_j}\left(p_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=f(x_1,x_2\cdots x_m) \qquad (4\cdot30)$$

的泛函也可以写成（4·26）的形式，但

$$A=-\sum_{j,k=1}^{m}p_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k} \qquad (4\cdot30A)$$

$$(Au,u)=\iint\cdots\int_\tau\left\{\sum_{j,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(P_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)u\,dx_1\,dx_2\cdots dx_m\right. \qquad (4\cdot30B)$$

$$(f,u)=\iint\cdots\int_\tau f(x_1,x_2\cdots x_m)u\,dx_1\,dx_2\cdots dx_m \qquad (4\cdot30\ \ )$$

$$(f,u)=\iint\cdots\int_\tau f(x_1,x_2\cdots x_m)u\,dx_1\,dx_2\cdots dx_m \qquad (4\cdot30\ \ )$$

（E）平板弯曲的平衡方程

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=f(x,y) \qquad (4\cdot31)$$

的泛函 $V(w)=(Aw,w)-2(f,w)$ （4·32）

其中

$$A=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}=\nabla^4 \qquad (4\cdot33A)$$

$$(Aw,w)=\iint_D(Aw)w\,dx\,dy=\iint_D w\nabla^4 w\,dx\,dy \qquad (4\cdot33B)$$

$$(f,w)=\iint_D f(x,y)w\,dx\,dy \qquad (4\cdot33C)$$

当然在固定或简支或自由边（自然边界）的边界条件下，我们可以象§1·5节这样证明

$$(Aw,w)=\iint_D\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\sigma)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dx\,dy \qquad (4\cdot34)$$

（F）弹性力学的平衡方程的有关问题也可以写成上面的形式。设（u_1，u_2，u_3）为（x_1，x_2，x_3）轴向的位移，（f_1，f_2，f_3）为（x_1，x_2，x_3）轴向的体积力，应力分量为σij（σ_{11}、σ_{22}、σ_{33}、σ_{12}、σ_{23}、σ_{31}）应变分量为（e_{11}、e_{22}、e_{33}、e_{12}、e_{23}、e_{31}）$\lambda\mu$分别为拉梅弹性常数，则应力应变位移关系为：

$$\left.\begin{array}{l}\sigma ij=\lambda\theta\delta ij+2\mu e ij\\ e ij=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x j}+\frac{\partial u j}{\partial x i}\right),\ \theta=\sum_{i=1}^{3}\theta ii=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x i}\right)\end{array}\right\}\ ij=1,2,3$$

$$\delta ij=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \qquad (4\cdot35)$$

弹性体的平衡方程为

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma ij}{\partial x j}+fi=0 \qquad (i=1,2,3) \qquad (4\cdot36)$$

或可写成

$$Au=\sum_{j=1}^{3} A_{ij}\, u_j = -\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu\nabla^2 u_i \right]=f_i$$

$$(i=1,2,3) \quad (4\cdot36A)$$

其中：$\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ 而算子 A 的九个分量为

$$A=-(A_{ij})=\begin{pmatrix} (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\mu\nabla^2, & (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}, & (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}, & (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\mu\nabla^2, & (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}, & (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}, & (\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\mu\nabla^2 \end{pmatrix}$$

$$(4\cdot36B)$$

在这个问题里，我们可以把边界分为两部份，即边界固定的部份 s_1，在那里位移为零，另一部是自由边界 s_2，在那里边界外力为零（即自然边界条件）。亦即

$$u_i(s)=0 \quad (s=s_1) \quad i=1,2,3 \qquad (4\cdot37A)$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}\,\ell_j\Big|_s=0 \quad (s=s_2,\ i=1,2,3) \qquad (4\cdot37B)$$

其中 (ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3) 为弹性体表面的外法线方向余弦。于是，本题的泛函可以写成

$$V(u)=(Au,u)-2(f,u) \qquad (4\cdot38)$$

其中

$$(Au,u)=\iiint_\tau \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\, u_i\, u_j\, d\tau$$

$$=-\iiint_\tau \sum_{i=1}^{3}\left\{ (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+\mu\nabla^2 u_i \right\} u_i\, d\tau \qquad (4\cdot38A)$$

$$(f,u)=\iiint_{\tau}\sum_{i=1}^{3} f_i u_i d\tau \tag{4·38B}$$

其中：τ为弹性体的整个体积，$d\tau$为其微元，利用三维的格林公式（1·180d）或

$$\iiint_{\tau}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial p_i}{\partial x_i}d\tau=\iint_{s}\sum_{i=1}^{3}p_i l_i ds \tag{4·39}$$

其中$p=p(x_1,x_2,x_3)$，l_i为表面的外法綫方向余弦，我们可以将（4·38A）式简化：

$$(Au,u)=-\iiint_{\tau}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\lambda+\mu)u_i\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+\mu\sum_{j=1}^{3}u_j\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]d\tau$$

$$+\iiint_{\tau}\sum_{i=1}^{3}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+\mu\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]d\tau$$

$$=+\iiint_{\tau}\left[(\lambda+\mu)\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2+\mu\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\right]d\tau-$$

$$-\iint_{s}\sum_{i=1}^{3}\left[(\lambda+\mu)u_i\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+\mu\sum_{j=1}^{3}u_j\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]l_i\,ds \tag{4·40A}$$

但是，由于

$$\sum_{i,j=1}^{3}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial u_j}\right]$$

$$=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-u_i\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right] \tag{4·40B}$$

在利用了三维格林公式以后：

$$\mu\iiint_{\tau}\sum_{i,j=1}^{3}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right]d\tau-\mu\iint_{s}\sum_{i,j=1}^{3}$$

$$\left[u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right]\ell_i\,ds=0 \tag{4·40C}$$

把（4·40C）的左端诸项加入（4·40A）式的右端诸项后，（Au,u）的值不变。即

$$(Au,u)=\iiint_\tau\left[\lambda\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2+\mu\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\right]$$

$$d\tau-\iint_s\sum_{i=1}^{3}\left[\lambda u_i\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+\mu\sum_{j=1}^{3}u_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{x_i}\right)\right]\ell_i\,ds$$

因为： (4·40D)

$$\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial u_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 \tag{4·40E}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda u_i\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=\sum_{i,j=1}^{3}\lambda\delta_{ij}u_j\sum_{\lambda=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{4·40F}$$

所以（4·40D）可以写成

$$(Au,u)=\iiint_\tau\left[\lambda\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2+\frac{1}{2}\mu\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\right]d\tau$$

$$-\iint_s\sum_{i,j=1}^{3}\left[\lambda\delta_{ij}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)+\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\right]u_j\ell_i\,ds \tag{4·40G}$$

对于固定边界部分（s_1），$u_j=0$，所以（4·40G）的边界积分那一部分等于零。对于自由边界部分（s_2）

$$\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ij}\ell_i=\sum_{i=1}^{3}\left[\lambda\delta_{ij}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)+\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\right]\ell_i=0$$

$$(s=s_2) \tag{4·40H}$$

因此，（4·40G）中的边界积分恒等于零。这就证明了在边界条件

$$(Au,u)=\iiint_{\tau}\left[\lambda\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2+\frac{1}{2}\mu\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\right]d\tau \tag{4·41}$$

（4·41）很易归纳为

$$(Au,u)=\iiint_{\tau}\left[\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})^2+2\mu\left(e_{11}^2+e_{22}^2+e_{33}^2+2e_{12}^2+2e_{23}^2+2e_{31}^2\right)\right]d\tau \tag{4·42}$$

这就是弹性体内变应能的表达示。

前面（A），（B），（C），（D），（E），（F）这六个问题都是線性的，其泛函都有相同的形式，即（4·21），（4·26），（4·32），（4·38）等。其实，弹性力学平衡问题，只要边界条件是固定的或是自然边界条件，则泛函都能写成这种形式，而且（Au,u）都是正定的。

弗立德里斯指出这些算子A有关的泛函项（Au,u）或（Ay,y）都是正的，而且是正定的（POSITIVE DIFINITE）。所谓正定，即是指（Au,u）对于任意的u（有一些限制，如函数是一个稠密的綫性集合中的成员等，但这些限制在一般有实用意义的问题中都是满足的，所以，在这里将不再研究）而言，满足不等式。

$$(Au,u)\geqq\gamma^2\ (u,u) \tag{4·43}$$

其中γ^2为一正的常数，而且对于$u(x)$而言，

$$(u,u)=\int_{x_1}^{x_2}u^2(x)dx>0 \tag{4·44A}$$

对于两个变量的函数而言

$$(u,u)=\iint_D u^2(x,y)dxdy>0 \tag{4·44B}$$

对于多个函数（u_1,u_2,u_3）的问题而言

$$(u,u)=\iiint(u_1^2+u_2^2+u_3^2)dxdydz>0 \tag{4·44C}$$

对其它情况，依此类推。

弗立德里斯證明了：只要算子A（或泛函（Au,u）是正定的，则每个极小化序数序例，都收斂到使泛函$V(u)=(Au,u)-2(f,u)$为极小的

元素。(这些元素有一些在实际问题中不重要的限制，如它们都是一个稠密的线性函数集合中的成员等)。

我们将不在一般情况下去证明弗立德里斯的定理，但将摘要地在下一节中证明上面所列举的(A)，(B)····(F)等这些泛函都是正定的，其泛函的极值都确定地给出极值函数。

在这里必须指出，如果泛函满足正定条件，如果在极小化函数序列中只取得有限个函数，则泛函V(u)在这个有限个元素中的极值，必然是本问题的近似解，即给出泛函值的近似，也给出极值函数的近似，这就是立兹(Ritz)法的基础。

§4·2 泛函(Au,u)的正定性，泛函的极值和极值函数。

现在让我们逐一检查V(u)的极值

并证明泛函V(u)的极值都给出满足欧拉方程的极值函数。

(1)斯脱姆——刘维耳型的二阶常微分方程

首先研究斯脱姆——刘维耳型的二阶常微分方程。(4·20)的泛函中，(Ay,y)是正定的，我们研究的边界条件为固定边界条件。

$$y(x_1)=y(x_2)=0 \tag{4·45}$$

通过分部积分，并利用边界条件(4·45)，从(4·22B)得

$$\begin{aligned}(Ay,y)&=\int_{x_1}^{x_2}\{-\frac{d}{dx}[P(x)\frac{dy}{dx}]y+q(x)y^2\}dx\\&=\int_{x_1}^{x_2}\{p(x)y'^2+q(x)y^2\}dx\end{aligned} \tag{4·46}$$

设$p(x)$在$x_1\leqq x\leqq x_2$中的最小值为$p_m(>0)$，$q(x)$在$x_1\leqq x\leqq x_2$的最小值为$q_m\geqq 0$，于是有

$$\left.\begin{aligned}&\int_{x_1}^{x_2}(p(x)y'^2dx\geqq p_m\int_{x_1}^{x_2}y'^2dx\\&\int_{x_1}^{x_2}q(x)y^2dx\geqq q_m\int_{x_1}^{x_2}y^2dx\end{aligned}\right\} \tag{4·47}$$

而且，我们有不等式

$$\left(\frac{dy}{dx}-\frac{y}{(x-x_1)}\right)^2\geqq 0$$

或可写成

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{2y}{x-x_1}\frac{dy}{dx}+\frac{y^2}{(x-x_1)^2}\geqq 0 \qquad (4\cdot 49)$$

但是

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{x-x_1}\right)=\frac{2y}{x-x_1}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{y^2}{(x-x_1)^2} \qquad (4\cdot 50)$$

把（4•50）代入（4•49）得

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\geqq\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{x-x_1}\right) \qquad (4\cdot 51)$$

把上式从 $x=x_1$ 起积分、其结果是

$$\int_{x_1}^{x}y'^2dx\geqq\int_{x_1}^{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{x-x_1}\right)dx=\frac{y^2}{x-x_1} \qquad (4\cdot 52)$$

这里业已使用了 $y(x_1)\equiv 0$ （4•52）也可以写成

$$y^2\leqq(x-x_1)\int_{x_1}^{x}y'^2dx\leqq(x-x_1)\int_{x_1}^{x_2}y'^2dx \qquad (4\cdot 53)$$

这是因 y'^2 是正确的，而 $x_1\leqq x\leqq x_2$，把（4•53）从 x_1 到 x_2 积分得

$$\int_{x_1}^{x_2}y^2dx\leqq\frac{1}{2}(x_2-x_1)^2\int_{x_1}^{x_2}y'^2dx \qquad (4\cdot 54)$$

所以不等式（4•47）的第一式也可以写成

$$\int_{x_1}^{x_2}p(x)y'^2dx\geqq\frac{2p_m}{(x_2-x_1)^2}\int_{x_1}^{x_2}y^2dx \qquad (4\cdot 55)$$

把（4•55）和（4•47）第二式代入（4•46），即可证明

$$(Ay,y)\geqq\left\{q_m+\frac{2p_m}{(x_2-x_1)^2}\right\}\int_{x_1}^{x_2}y^2dx \text{ 或}\geqq\gamma^2(y,y) \qquad (4\cdot 56)$$

其中 $\gamma^2=q_m+\dfrac{2p_m}{(x_2-x_1)^2}>0$ （4•57）