

土木工程系统工程

(下册)

成都科技大学水利系施工组

第六章	多级系统的分部最优化	1
第一节	序列系统的初值问题	1
第二节	动态规划	4
第三节	分部优化	6
第四节	终值问题的状态反演	8
第七章	网络计划	23
第一节	网络图的结构	27
第二节	网络计划的时间优化	29
第三节	网络计划的“时间—资源”优化	33
第四节	网络的时间—费用优化	51
第五节	网络进度计划的电算问题	58
第六节	采用电算的计划评核术	69
第七节	随机评核技术	75
第八章	贮存理论	93
第一节	经济贮存模式	93
第二节	经济批量贮存模式	97
第三节	随机需求的贮存理论	98
第四节	用线性规划与动态规划解决生产与贮存问题	105
第九章	队论	111
第一节	概述	111
第二节	电话呼叫理论	113
第三节	随机系统输入的类型和统计平衡方程的证明	115
第四节	随机服务系统的最优化	118

第十章 工程机械设备的管理

132

第一节 概述

132

第二节 按施工对象优化分配机械设备

133

第三节 替换理论

145

第四节 维修问题

150

第五节 机械的备用和维修

159

第六节 装运作业的随机模拟

172

第六章 多级系统的分部最优化

生产系统常不是单一、孤立存在的，往往以序列系统的形式出现。决策在时间和空间上相互联系、制约。任何一个计划和方案，无论其内容如何，总是涉及到许多相互影响的决策。系统越复杂，变量越多，计算工作量越大。要解决复杂系统优化的计算问题，采用先前介绍的方法，计算工作量随其变量的二次以至高次幂的比例而增长，甚至超过了实际可能解决的规模。因此，把一个复杂系统分部、分段优化是必不可少的。分部最优化用于解决序列问题，最常见的一种就是贝尔曼 (Bellman) 提出的“动态规划”。所谓“动态”系指对复杂系统逐段依次进行优化，同时考虑到相邻段的联系和相互影响，最后达到整个系统的优化。

状态变量和决策变量之间的区别，在所述的一些方法中带有一定的随意性；然而在多级序列系统分部优化中其区别最明显。一个状态变量既是后一级的输入，又是前一级的输出。它在各级各段中起到传递信息的作用。决策变量只是指那些可以直接操作调节的变量。每级分部最优化就是找出其输入变量中所有可能值，并寻求这一级决策所对应的最优输入值。

第一节 序列系统的初值问题

一个序列多级系统涉及一系列决策，其中一级的输出就是相邻的下一级的输入，从而每一级的决策影响到它以后所有各级的状态输入，即起始条件影响着最优决策方案。因此，对初值问题的研究是十分必要的。

一、多级系统的形式及其组成

序列多级系统的一般形式，如图 6-1，其中，用按顺序编号的方框表示级，箭头表示各级的输入和输出。和第 i 级相联系的一个输出量 r_i

称为级收益，它是级输入的函数。

其他不是收益的输出被称为状态变量，以 $\bar{s}_i$ 表示， i 是产生这种状态输入变量的

的下标，波号 $\sim$ 是输

出的标志。状态变量 $\bar{s}_i$ 当作为其输出的变换称为传递函数，以 T_i 表示。许多状态变量也作为输入，作为第 i 级输入的表示为 s_i 。所有不是状态的输入就称为决策变量，表示为 d_i 。在这里 i 既是收益的下标，又是以 d_i 为输入之一的传递函数的下标，标志第 i 级。它可视为带有同一下标 i 的所有变换的集合。而全部级的集合称为系统。

图 6-1 序列多级系统图

$$\text{段目标函数 (一级收益)} \quad r_i = R_i(d_i, s_i) \quad (6-1)$$

$$\text{传递函数} \quad \bar{s}_i = T_i(d_i, s_i) \quad (6-2)$$

由于一个状态变量往往是 i 级的输出，而又是 j 级的输入，可表示为 $\bar{s}_i$ 或 s_j 。多个符号的重合 ($\bar{s}_i = s_j$) 确切地表征了第 i 级和第 j 级间的相互联系。这一联系称之为关联恒等。一个系统由它内部的级和关联恒等完全确定。图 6-1 序列多级系统的关联恒等式是

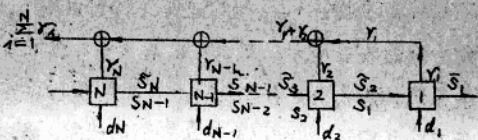
$$\bar{s}_{i+1} = s_i \quad i=1, 2, \dots, N-1 \quad (6-3)$$

图 6-1 上编号的顺序与信息流箭头方向相反，其优点在于使证明的标记简化。

二、初值问题

在初值问题中，初态 s_N 就是全系统给定的输入。多级系统决策问题就是要找出最优序列 $d_1^*(s_N), d_2^*(s_N) \dots d_N^*(s_N)$ 使总收益 R 为最大。总收益可表示为

$$R = \sum_{i=1}^N R_i(d_i, s_i) \quad (6-4)$$



式(6-1)和(6-2)说明对于给定的输入 s_i , 决策变量 d_i 的选取, 不仅确定了收益 r_i , 同时决定了传递函数 T_i 值。一个决策变量 d_i 可使 i 级的收益增大, 但也可能使 $i+1$ 级起的各级输入产生不良后果, 使系统的总收益 R 并非最优。一个最优的决策方案, 记为 $\{d_i^*(s_N)\}$ 只有在考虑级间联系的传递函数的情况才能找到。

将式(6-1)至(6-4)组合起来, 把总收益 R 表示为各个输入的函数为

$$R = \sum_{i=1}^N R_i(T_{i+1}(T_{i+2} \cdots (T_N(s_N, d_N), d_{N-1}), \cdots), d_i)$$

(6-5)

故对初态 s_N 的一个给定值, R 是决策 d_i 的函数

$$R = R(d_i, s_N)$$

(6-6)

研究初值问题的最大收益函数 $R^*(s_N)$ 对 $d_1, d_2, \dots, d_N$ 所有值以及 s_N 的任一特定值, 可建立如下关系

$$R^*(s_N) = \max_{d_i} \{R(d_i, s_N)\}$$

(6-7)

$d_i^*(s_N)$ 函数构成初值问题的最优决策方案, 由于这样的最优决策方案决定了单个状态变量 s_N 的 N 个函数, 所以这一类型的问题就称为 N -决策、单状态最优化问题。

严格地说, s_N 并不是任何一级的输出, 好象应叫做决策变量而不是状态变量。倘在 s_N 中的许多可能值中自由选取, 则将 s_N 叫做一个选择变量, 并以 c_N 取代 s_N 。这一符号上的差别很有用处。

多重决策或多重状态变量可以添加第二个下标(d_{i_1}, d_{i_2})以示区别, 一级(*grade*)可以有几个传递函数, 可用双下标表示, 以防混淆。每一级只有一个收益函数 $R(s_N)$, 且总是标量, 不是向量。但为了简便起见, 常将每一决策和状态均作为单一变量处理, 对下面讨论的一些情

况下, 导出的关系式, 对向量形式的变量也是成立的。

第 二 节 动 态 规 划

一个包括许多变量的复杂系统往往可以分解为一连串互相关联的分段子系统, 简称为序列系统。一个序列系统的优化问题, 可以分解为一连串相互关联的子系统的优化问题。即用 N 个单决策、单状态问题的组合来取代 N -决策、单状态的初值最优化问题。这就是动态规划的实质。这样一个转换使复杂系统的优化问题大为简化。

设 S_N 为 i 级收益的总和 ($i=1, 2, \dots, n$)

$$S_n = \sum_{i=1}^n R_i(d_i, S_i), \quad n=1, 2, \dots, N, \quad (6-8)$$

$$S_n = S_n(d_1, d_2, \dots, d_n, S_n), \quad n=1, 2, \dots, N \quad (6-9)$$

设状态 S_n 被当作参变量处理, 而令 $f_n(S_n)$ 为使

$$f_n(S_n) \geq S_n(d_1, d_2, \dots, d_n, S_n) \quad (6-10)$$

对所有 $d_1, d_2, \dots, d_n$ ($n=1, 2, \dots, N$) 成立的函数, 且在每一级它至少对一组决策值成立等式。这个 n 级最大收益函数 $f_n(S_n)$ 可以使其依赖前一级, 即 $n+1$ 级的输入和决策, 即用传递函数 T_{n+1} 代替 S_n 有

$$f_n(S_n) = f_n(T_{n+1}(d_{n+1}, S_{n+1})) = f_n(d_{n+1}, S_{n+1})$$

$$n=1, 2, \dots, N-1, \quad (6-11)$$

其中状态 S_{n+1} 作为参数, 在不等式 (6-10) 的两端加以由第 $n+1$ 级产生的收益 r_{n+1} , 由式 (6-8) 和 (6-11) 针对所有的决策变量 d_n ($n=1, 2, \dots, N-1$), 从而有

$$R_{n+1}(d_{n+1}, S_{n+1}) + f_n(d_{n+1}, S_{n+1})$$

$$\geq S_{n+1}(d_1, d_2, \dots, d_{n+1}, S_{n+1}) \quad (6-12)$$

由式 (6-12) 可见总收益的上界是对最后 n 个决策成立的, 换言之, 这

个上界仅取决于独立的决策变量 d_{n+1} 和状态参数 s_{n+1} 。这样就成为仅有单决策、单状态的最优化问题。就是寻求函数 $U_{n+1}(s_{n+1})$ ，对全部 d_{n+1} ($n=1, 2, \dots, N-1$) 定义为

$$U_{n+1}(s_{n+1}) \geq R_{n+1}(d_{n+1}, s_{n+1}) + f_n(d_{n+1}, s_{n+1}) \quad (6-13)$$

且在每级至少对一组决策成立等式，(6-12)和(6-13)不等式一同确定 $U_{n+1}(s_{n+1})$ 为第 $n+1$ 级收益 r_{n+1} 和 s_{n+1} 对所有的最后 $n+1$ 个决策的一个最小上界，则对所有的 $d_1, d_2, \dots, d_{n+1}$ ($n=1, 2, \dots, N-1$)

$$U_{n+1}(s_{n+1}) \geq R_{n+1}(d_1, \dots, d_{n+1}, s_{n+1}) \quad (6-14)$$

所以，由式(6-10)的定义， $U_{n+1}(s_{n+1})$ 必是 $n+1$ 级最大收益函数 $f_{n+1}(s_{n+1})$ 。它若存在则有

$$U_{n+1}(s_{n+1}) = f_{n+1}(s_{n+1}), \quad n=1, 2, \dots, N-1 \quad (6-15)$$

故可以从 f_n 求出 f_{n+1} ，只要确立单参数的决策函数 $d_{n+1}^*(s_{n+1})$ 对 s_{n+1} 的任一值，成立下式的关系

$$\begin{aligned} f_{n+1}(s_{n+1}) &= R_{n+1}(d_{n+1}^*(s_{n+1}), s_{n+1}) + \\ &+ f_n(d_{n+1}^*(s_{n+1}), s_{n+1}) \\ n &= 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (6-16)$$

贝尔曼对序列多级系统的最优性原理，在(6-16)式的基础上作如下数学描述

$$\begin{aligned} f_{n+1}(s_{n+1}) &= \max_{d_{n+1}} \{ R_{n+1}(d_{n+1}, s_{n+1}) + \\ &+ f_n(d_{n+1}, s_{n+1}) \}. \quad n=1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (6-17)$$

这里收益 $R_1(d_1, s_1)$ 只取决于一个决策变量，所以 $f_1(s_1)$ 是一个单决策、单状态的最优化问题。当已知 $f_1(s_1)$ 之后，便可根据对 $n=1$ 的(6-16)式解决另一个单决策、单状态的最优化问题而求得 $f_2(s_2)$ 。

和 $d_1^*(s)$, 在进行 N 次这样的分级最优化之后, 就得到 N 个决策函数 $d_1^*(s_1)$, $d_2^*(s_2) \dots, d_N^*(s_N)$ 以及 N 级的最大收益 $f_N(s_N)$ 。

贝尔曼对序列多级系统的最优性原理认为: 对一个 N 级系统的最优决策方案 $d_N^*(s_N), d_{N-1}^*(s_{N-1}) \dots, d_1^*(s_1)$, 必须使决策函数的子集 $d_n^*(s_n), d_{n-1}^*(s_{n-1}) \dots, d_1^*(s_1) (n=1, 2, \dots, N)$ 对最后 n 级子系统当输入 s_n 取任一值时为最优, 从 $d_N^*(s_N)$ 出发, 递归地将 $d_n^*(s_n)$ 代入 (6-2) 式的传递函数, 就产生最优的输入函数 $s_{n-1}(s_n)$, 它又被代入函数 $d_{n-1}^*(s_{n-1})$ 从而给出 $d_{n-1}^*(s_n)$, 如此进行最后就得到初值问题的整个最优决策方案。这个过程相似对系统决策的逆向扫描, 子系统仿佛为光点, 扫描完毕构成整个“图象”。

事实上一般将 s_n 规定为一特殊常量 s_N , 或可满意选取, 从而使 s_n 成为可用搜索法选择的变量 c_N 。由于 c_N 是 N 级的选择变量, 它和一个决策变量 d_N 作为输入, 最优收益 R^* 就是双决策、无状态最优化问题求解的结果。

$$R^* = \max_{d_N, c_N} \{R_N(d_N, c_N) + f_{N-1}(d_N, c_N)\} \quad (6-18)$$

第 三 节 分 部 最 优 化

设具有两个变量 s_n (状态变量) 和 d_n (决策变量) 的一个目标函数为一待求最大式

$$M_n = M_n(s_n, d_n) = R_n(s_n, d_n) + f_{n+1}(T_n(s_n, d_n))$$

$$n=1, 2, \dots, N \quad (6-19)$$

图 6-2 绘出了一个具有代表性的待求最大的等高线。

设计时每个可能的状态输入 s_n , 要求的决策 $d_n^*(s)$ 是使 M_n 为最大, 这就是

$$M_n(s_n, d_n^*(s_n)) \geq M_n(s_n, d_n) \quad (6-20)$$

对每一 s_n 成立, 式 (6-20) 左端仅决定于输入状态 s_n , 记为

$$M_n^*(s_n) = M(s_n, d^*(s_n)) \quad (6-21)$$

于是把寻求 $d_n^*(s_n)$ 和 $M_n^*(s_n)$ 的过程, 称为“关于 d_n 的分部最优优化”。

由图 6-2 可见, 寻求 $d_n^*(s_n)$ 相当于待求最大式 $M_n^*(s_n)$ 的等高线的切线平行于 d_n 轴的那些点的轨迹。由于如此分部优化, 使为变量的函数 $d^*(s_n)$, 无异乎减少了一个自由度, 所以只要有一个输入状

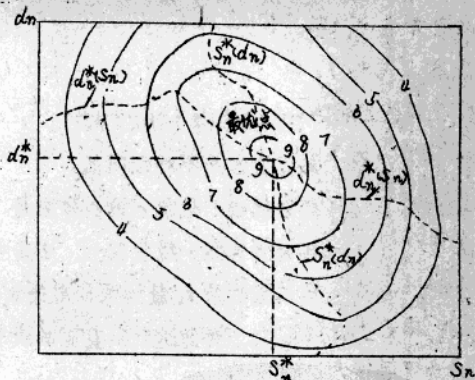


图 6-2 待求最大式等高线图

态 s_n 就能完全确定 M_n 值。故决策 d_n 的优化可视为 d_n 与 s_n 的二维集合到可取的 s_n 值的一维集合的算子映射 M_n 。若处理最大化问题, 可表示为

$$\max_{d_n} \{M_n(s_n, d_n)\} = M_n^*(s_n) \quad (6-22)$$

$M_n^*(s_n)$ 关于所余的变量 s_n 的最大化给出最优收益 M_n^* 。对所有的 s_n 是一个定值 (常数)。

$$\max_{s_n} \{M_n^*(s_n)\} = M_n^* \geq M_n^*(s_n) \quad (6-24)$$

最优输入状态 s_n^* 定义为

$$M_n^* = M_n^*(s_n^*) \quad (6-25)$$

最优决策, 由 s_n^* 代入 $d^*(s_n)$ 可得

$$d_n^* = d_n^*(s_n^*) \quad (6-26)$$

由图 0-2 可见 $s_n^*(d_n)$ 与 $d_n^*(s_n)$ 两条曲线在待求最大式的最值所在点 (d_n^*, s_n^*) 处相交, 也就是说在这一点 $M_n^*(d_n^*)$ 和 $M_n^*(s_n)$ 是相等的, 可互换的。其数学模式可表示为

$$\max_{d_n} \{ \max_{s_n} [M_n(s_n, d_n)] \} = \max_{s_n} \{ \max_{d_n} [M_n(s_n, d_n)] \} \quad (6-27)$$

即 $M_n^*(d_n^*) = M_n^*(s_n^*)$

这一分部优化的互换性是不难证明的。

在序列多级系统中, 最优化的步骤应是: 第一, 使第一级中的决策 d_1 优化, 待求最大式为第一级收益 r_1 , 于是得到 $d_1^*(s_1)$ 与 $f_1(s_1)$, 由 $f_1(s_1)$ 加上第二级收益 r_2 就构成待求最大式 $M_2(s_2, d_2)$, 相继可得 $d_2^*(s_2)$ 和 $f_2(s_2)$, 如此迭代到直至 N 级为止, 即可求出整个系统的最优值。

第四节 终值问题的状态反演

豪恩 (Horn) 建议用间接的状态反演来解决终值问题。如图 6-3a 的终值问题。设存在 N 个逆传递函数

$$s_i = \widetilde{T}_i(s_i, d_i), \quad i=1, \dots, N \quad (6-28)$$

现将 i 阶段的输入状态变量表示成其输出状态变量和决策变量的函数。输入与输出状态变量作用的互换就称作状态反演。

通过状态反演, 每个收益函数也可用决策变量和输出变量加以表示为

$$R_i(s_i, d_i) = R_i[\widetilde{T}_i(s_i, d_i), d_i] = \widetilde{R}_i(s_i, d_i) \quad (6-29)$$

$$i=1, 2, \dots, N$$

而将最优化问题归结为去求使总收益最优的决策变量 $d_i^*(s_i)$ 的集合

$$\widetilde{R}^* [\widetilde{S}_i, d_i^* (\widetilde{S}_i)] = \sum_{i=1}^N \widetilde{R}_i (\widetilde{S}_i, d_i) \quad (6-30)$$

状态反演颠倒了通过状态变量的信息流向，这样，最优化的过程，把终值问题变换成了一个初值问题。把系统内各阶段信息流向颠倒后，再反向对各阶段编号，如图 6-3b，其区别还在于，在改变信息流向和重新编过号的新系统中波浪号（~）用的方法不同。以 $\widetilde{S}_i$ 表示输入状态变量，以 S_i 表示输出状态变量。问题转换为一个 N - 决策单状态的初值问题，其优化问题可分阶段（或系统）进行。这就是多级序列系统的状态反演。

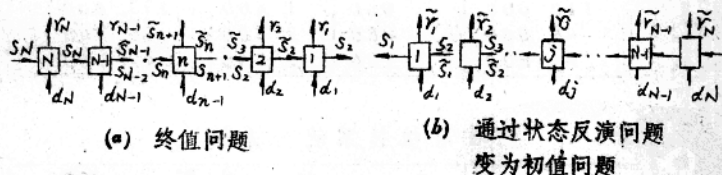


图 6-3 终值问题的状态反演

例 6-1 某站台高 12 米由 4 根立柱支撑，台顶长 10 米，宽 6 米，要求能承受 1000 公斤/米² 的垂直荷载。工程要求设计一座安全而造价最低的站台。由于输入荷载强度为 1000 公斤/米²，故总荷载为 6×10×1000=60000 公斤，故初值是给定的是初值问题。站台结构由台顶、立柱和拉杆、基础三部分结构组成，即对站台这个多级系统中有三个分系统，其编号为逆序编号：台顶为分系统 3，立柱与拉杆为分系统 2，基础为分系统 1。

对于各分系统，通过结构设计，对于不同的结构材料所得成果如下表。（表 6-1，表 6-2，表 6-3）

由图 6-4 可见，我们可将站台结构序列系统，分为基础、立柱及

表 6-1. 基础 — 分系统 1

型 式	S_1 (荷载) 公斤	r_1 (造价) 元	重量(公斤)	$\bar{S}_1 = S_1 + \text{重量(公斤)}$
a. 扩展 基础	165,000	1,800	60,000	225,000
	135,000	1,400	45,000	180,000
	119,000	1,000	33,000	143,000
	95,000	750	25,000	120,000
	75,000	500	17,000	92,000
b. 给管 柱	165,000	1,650	52,500	217,500
	135,000	1,350	44,000	179,000
	110,000	1,100	36,000	146,000
	95,000	950	31,000	126,000
	75,000	750	24,500	99,500
c. 打钢 板桩	165,000	1,400	5,000	170,000
	135,000	1,150	4,100	139,100
	110,000	960	3,400	113,400
	95,000	880	3,100	98,100
	75,000	780	2,750	77,750

表 6-2. 立柱与拉杆系统 — 系统 2

型 式	S_1 (荷载) 公斤	r_1 (造价) 元	重 量 (公斤)	$\bar{S}_1 = S_1 + \text{重量} =$ S_1 (公斤)
a. 有系杆 的给立柱	100,000	3,300	67,500	167,500
	85,000	2,500	50,000	135,000
	75,000	1,900	37,500	112,500
	65,000	1,400	30,000	95,000
b. 螺旋形 的给立柱	100,000	3,900	57,500	157,500
	85,000	3,000	42,500	127,500
	75,000	2,200	32,000	107,000
	65,000	1,400	25,000	90,000
c. 钢结构	100,000	6,000	13,500	113,500
	85,000	5,200	11,500	96,500
	75,000	4,500	10,000	85,000
	65,000	4,000	9,000	74,000

表 6-3

台顶——分系统 3

型 式	S_3 (荷载) (公斤)	r_3 (造价) (元)	重 量 (公斤)	$\bar{S}_3 = S_3 + \text{重量} =$ S_3 (公斤)
a. 单向混凝土板系	60,000	1,100	37,500	97,500
b. 单向混凝土工字梁系	60,000	1,650	18,500	78,500
c. 整体双向混凝土板系	60,000	1,300	24,500	84,500
d. 混凝土格栅结构板	60,000	1,800	14,000	74,000
e. 钢梁与长跨钢板	60,000	3,000	6,000	66,000
f. 钢工字梁系	60,000	2,600	7,000	67,000
g. 钢梁与组合砼面板	60,000	2,000	15,000	75,000

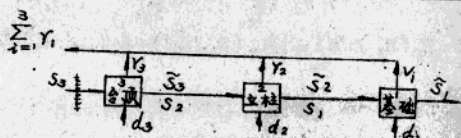
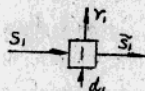


图 6-4 站台结构系统图

拉杆、台顶三个分系统，首先解决分系统的局部优化，然后以此解决台整体结构的优化。唯须注意的是这里的优化问题是求极小值的问题。

图 6-5 基础结构一分系统 1 的局部优化。



$$f_1(S_1) = \min_{d_1} [R_1(S_1, d_1)]$$

图 6-5 分系统 1 的局部优化

结合考虑到输入 5 组状态变量 S_1 ，利用设计分系统 1 的计算成果表 6-1，可得基础部分的综合表 6-4。

表 6-4

局部优化 d_1	型 式	荷载 (公斤)	$f_1(s_1)$ 元	$\bar{s}_1$ 公 斤
c	打钢板桩	165,000	1,400	170,000
c		135,000	1,150	139,000
c		110,000	960	113,000
a	扩展基础	95,000	750	120,000
a		75,000	500	92,000

图 6-6 立柱和基础结构一分系统 2 和 1 的局部优化

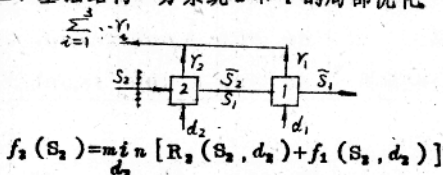


图 6-6 分系统 2 和 1 的局部优化

这部分要输入 4 组状态变量 s_2 ，由于组数不多，且不要求输出的状态变量 $\bar{s}_2$ 与分系统的输入状态变量 s_2 在表中的数值完全吻合。采用数字计算机，依照线性关系确定插入值是很方便的。对分系统 2 和 1 计算可得表 6-5。

表 6-5 中 $r_2 + f_1(s_2)$ 栏中箭头所指的是各组输入状态变量时的最优解。由此得到分系统 2 和 1 的综合表 6-6。

台顶、立柱和基础一分系统 3、2 和 1 的优化，如图 6-7。

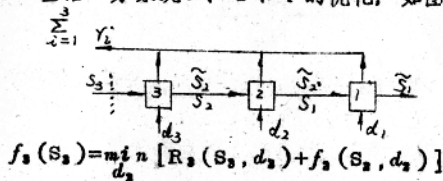


图 6-7 分系统 3、2 和 1 的优化

表 6-5

s_2 公斤	d_2	r_2 元	$\bar{s}_2 = s_1$ 公斤	d_1^*	$f_1(s_1)$ 元	$r_2 + f_1(s_1)$ 元
100,000	a	3,300	167,500	c	1,420	4, 720 ←
100,000	b	3,900	157,500	c	1,340	5, 240
100,000	c	6,000	113,500	c	990	6, 990
85,000	a	2,500	113,500	c	1,150	3, 650 ←
85,000	b	3,000	127,500	c	1,090	4, 090
85,000	c	5,200	96,500	a	770	5, 970
75,000	a	1,900	112,500	c	980	2, 880 ←
75,000	b	2,200	107,000	c	920	3, 120
75,000	c	4,500	85,000	a	625	5, 125
65,000	a	1,400	95,000	a	750	2, 150
65,000	b	1,400	90,000	a	690	2, 090 ←
65,000	c	4,000	74,000	a	490	4, 490

表 6-6

分系统 2、1 最优决策 d_2^*	型 式	s_2 公斤	$f_2(s_2)$ 元	$\bar{s}_2$ 公斤
a	有系杆的	100,000	4,720	167,500
a	钢筋混凝	85,000	3,650	135,000
a	土柱	75,000	2,880	112,500
b	螺旋形铰	65,000	2,090	90,000

根据台顶设计成果表和分系统 2 和 1 的综合表得到的信息, 可得表 6-7。

由表 6-7 $r_2 + f_2(s_2)$ 栏中箭头所指的是各组输入状态变量时的最优解, 因此, 得分系统 3、2、1 的综合表 6-8。

归纳这三步的综合表, 对整个系统决策的集合 $d_i^* (i=1, 2, 3)$ 得到站台结构的最优方案为

$d_3^* = d$ 即混凝土格栅结构板的台顶

表 6-2

S_2 公斤	d_2	r_2 元	$\bar{S}_2 = S$	d_2^*	$f_2(S_2)$ 元	$r_2 + f_2(S_2)$ 元
60,000	a	1,100	97,500	a	4,540	5,640
60,000	b	1,650	78,500	a	3,150	4,800
60,000	c	1,300	84,500	a	3,610	4,100
60,000	d	1,800	74,000	a	2,800	4,600 ←
60,000	e	3,800	66,000	b	2,170	5,170
60,000	f	2,400	67,000	b	2,250	4,650
60,000	g	2,000	75,000	a	2,880	4,880

表 6-3

最优决策 d_2^*	型 式	荷载 S_2 公斤	$f_2(S_2)$ 元	$\bar{S}_2$ 公 斤
d	砼格栅结构板	60,000	4,600	74,000

$d_2^* = a$ 即有系杆的给立柱

$d_2^* = c$ 即打设钢板桩的基础

这种站台结构的最低造价是 4600 元。

例 6-2 某工地有 4 套相同的碎石筛分装置和 4 个料场。由于各个料场的石料特性，开采工作面及场地条件都不相同，所以每套装置在不同料场的生产率是不同的。而几套装置同时设在不同的料场时，其生产率既不是成倍增长，各自增长的比例也是不相同的。其生产率的矩阵如表 6-9 所示。试确定每个料场安设几套装置可使系统总的生产率最高？

表 6-9

各料场分配 装置的套数	料 场		编 号	
	A	B	C	D
1	47	39	24	35
2	81	62	47	51
3	105	84	72	61
4	132	91	87	68