运筹学

宋宝琪 主编

武汉水运工程学院

交通系统高等学校内部教材

运 筹 学

宋宝琪 主 编

武汉水运工程学院

前　言

《运筹学》是作者在武汉水运工程学院管理工程系经过多年教学实践的基础上，经集体讨论，分头执笔编写而成的，我们考虑到管理工程专业的特点，在编写过程中，既注意全书内容的逻辑性和系统性，同时又尽可能避免较为高深的数学论证。通过典型的实例，引进基本概念、理论和方法，并说明其实际意义，以便读者通过对本门课的学习，能正确地掌握且能灵活运用所学到的知识。学习本书只需要高等数学，线性代数以及概率论和数理统计等基础知识。

全书共十七章，内容包括线性规划、整数规划、动态规划、图与网络、排队论以及决策分析等六个部分。其中，线性规划部分由宋宝琪编写；整数规划、动态规划、决策分析部分由刘舒燕编写；图与网络、排队论部分由云俊编写。宋宝琪任主编。

本书由湖北大学数学系主任朱忠仁教授审阅，并提出了许多宝贵的意见，书中插图由宋正茂绘制，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，缺点和错误在所难免，恳切希望广大读者给予批评指教。

编　者

1990 年 12 月

目　录

第一部分　线性规划

第二部分 整数规划

第三部分 动态规划

第四部分 图与网络分析

第五部分 排队论

第六部分　决策分析

第一部分　线性规划

线性规划是运筹学的一个分支，它已经有一套较为完整的原理、理论和方法，广泛应用于工农业生产、交通运输、商业、国防建设和经济管理等方面，是运筹学中应用最为广泛的一个分支，运筹学的其他许多分支也经常要用到线性规划的方法来求解。

最早研究线性规划问题的是苏联数学家康脱洛维奇，他在1939年发表的《生产组织与计划中的数学方法》一书，讨论了运输问题、机床负荷问题和下料等问题，但是他没有找到一个统一的求解这类问题的方法，因而在当时没有引起人们足够的重视。1947年，美国数学家丹捷格(G. B. Dantzig)提出了求解线性规划问题的单纯形法以后，线性规划才得到进一步的发展，理论上逐渐趋向于成熟，应用也越来越广泛。

线性规划所研究的问题主要有两类：一类是给定了人力、物力资源，研究如何合理地运用这些资源；另一类是研究如何统筹安排，尽量以最少的人力、物力资源来完成一定的任务。实际上，这两类问题是一个问题的两个方面，都是寻求整个问题的某个整体指标的最优化问题。

第一章　线性规划基础

§1-1　线性规划问题及其数学模型

一、线性规划问题的实例

例1　某企业用A、B、C三种原料生产甲、乙两种产品。已知每生产一件产品甲，需用原料A、B、C分别为1、1、0kg。每生产一件产品乙，需用原料A、B、C分别为1、2、1kg。每生产一件产品甲、乙的利润分别为3、4(万元)。每个计划期内，该企业能得到原料A、B、C的供应量分别为6、8、3kg。试问，该企业应如何制订生产计划，才能使计划期内的总利润达到最大？

为了清楚起见，将上述问题的已知条件列成表格的形式(表1-1)。

表　1-1

产品 / 每件产品所需原料(kg) / 原料	甲	乙	每个计划期内原料供应限量(kg)
A	1	1	6
B	1	2	8
C	0	1	3
每件产品的利润(万元)	3	4	

为了解决上述问题，首先要求把该问题用数学的语言来描述，这个过程叫做建立该问题的数学模型。至于如何求解这个数学模型，将在第二章中加以讨论。建立数学模型，可以按以下三个步骤来进行。

第一步，选取决策变量。

在上述问题中，所谓制订生产计划，就是要作出以下决策：在现有的条件下、每个计划期内，应生产产品甲、乙分别为多少件。

设每个计划期内生产产品甲、乙的件数分别为 x_1、x_2。这里的 x_1 和 x_2，称为决策变量。

第二步，建立目标函数。我们现在追求的目标是计划期内的总利润达到最大。而总利润显然是决策变量 x_1 和 x_2 的函数。

设计划期内的总利润为 z，则：

$$z = 3x_1 + 4x_2$$

称为目标函数。现在要求使目标函数取最大值

第三步，确定约束条件。目标函数中的决策变量 x_1 和 x_2 不能任意取值，而是要受到原料供应限量的制约。

每个计划期内，原料 A 的用量不能超过 6kg，即：

$$x_1 + x_2 \leqslant 6$$

同理，每个计划期内，原料 B 的用量不能超过 8kg，即：

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 8$$

每个计划期内，原料 C 的用量不能超过 $3kg$，即：

$$x_2 \leqslant 3$$

而且，还显然应该有：

$$x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0$$

综合以上所述，这个问题的数学描述可归纳为：

求满足约束条件：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

的 x_1 和 x_2，使目标函数：

$$z = 3x_1 + 4x_2$$

取得最大值。

或简单地表示为：

$$\max z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

上式就是该问题的数学模型。

例 2 某药厂生产 A、B、C 三种药品。有甲、乙、丙、丁四种原料可供选择(原料供应量不限),四种原料的成本分别为每公斤 4 元、7 元、9 元、5 元。每公斤不同的原料能提取各种药品的数量如表 1-2 所示。

表 1-2

每公斤原料提取药品的量(g) 原料 / 药品	甲	乙	丙	丁
A	2	1	3	2
B	6	6	2	5
C	3	2	2	3

该厂要求每天生产药品 A 恰好 115g,药品 B 至少 260g,药品 c 不超过 130g。试确定各种原料的每天需要量,使每天的总成本最小(要求建立该问题的数学模型)?

设该厂每天需要甲、乙、丙、丁四种原料的数量分别为 x_1、x_2、x_3、x_4 公斤,并设每天总成本为 z,要求每天总成本 z 达到最小。而总成本 z 是 x_1、x_2 的函数

$$z = 4x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 5x_4$$

甲、乙、丙、丁四种原料的需要量 x_1、x_2、x_3、x_4 受 A、B、C 三种药品的产量的限制。

要求每天生产药品 A 恰好 $115g$,即:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 115$$

要求每天生产药品 B 至少 $260g$,即:

$$6x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 \geqslant 260$$

要求每天生产药品 C 不超过 $130g$,即:

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leqslant 130$$

同时,还显然要求:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$$

综合以上所述,得该问题的数学模型:

$$\min z = 4x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 5x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 115 \\ 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 \geqslant 260 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leqslant 130 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

例 3 某公司有三个工厂 A_1、A_2、A_3 制造某种产品供应四个销售点 B_1、B_2、B_3、B_4。每个计划期内工厂 A_1、A_2、A_3 的供应量分别为 150 件、200 件、250 件;销售点 B_1、B_2、B_3、B_4 的需求量分别为 120 件、140 件、160 件、180 件。各工厂运送每件产品至各销售点的运价如表 1-3 所示。试制订出总运价最小的调运方案(要求建立数学模型)。

表 1-3

运价(元/件) 工厂 \ 销售点	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	6	8	10
A_2	6	4	10	4
A_3	8	2	4	6

设由工厂 A_i 运往销售点 B_j 的产品的件数为 $x_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$；并设每个计划期内的总运价为 z。显然总运价 z 是 12 个变量 x_{11}、x_{12}、…、x_{34}的函数，再考虑到这 12 个变量的取值要受到三个工厂的供应量和四个销售点的需求量的限制，从而可得到该问题的数学模型：

$$\min z=4x_{11}+6x_{12}+8x_{13}+10x_{14}+6x_{21}+4x_{22}+10x_{23}+4x_{24}+8x_{31}+2x_{32}+4x_{33}+6x_{34}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=150 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=200 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=250 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=120 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=140 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=160 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=180 \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,2,3;j=1,2,3,4) \end{cases}$$

二、线性规划问题的数学模型

从以上两个例子可以看出，线性规划问题具有以下三个特征。

(1) 存在着决策者可以控制的一组决策变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$。决策变量取定一组值就代表一个具体的行动方案。

(2) 决策者要追求一个目标，这个目标是决策变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性函数，称为目标函数。根据各个问题的不同性质和要求，找到最优的决策，使目标函数取得最大值或最小值。

(3)决策变量的取值要受到某些条件的限制，这些条件称为约束条件。线性规划的约束条件可以用一组线性等式或线性不等式来表示。

一般来说，线性规划问题可以用数学语言描述为：

$$\max(\min)z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n * b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n * b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n * b_m \\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0 \end{cases}$$

上式中的“＊”表示可取“＝”、“$\geqslant$”、“$\leqslant$”中之一，

我们把这种数学描述，称为线性规划问题的数学模型。

约束条件中的

$$x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$$

称为非负约束。

§1—2 两个变量的线性规划问题图解法

将一个实际问题归结为线性规划问题的数学模型，仅仅是解决问题的第一个步骤，而我们的主要目的是求解数学模型，通过求解得到实际问题的一个最好的决策。本节介绍用图解法求解，虽然它只适用于两个变量的线性规划问题，但是由此而得出的一些重要结论对于多个变量的线性规划问题也是成立的。另外，图解法还具有直观性强，易于理解和掌握等优点。因此，我们首先介绍图解法，然后在此基础上再进一步介绍一般的解法——单纯形法。

例 4 解线性规划问题：

$$\max z=-x_1+x_2$$

$$\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 5 \\ -2x_1+x_2\leqslant 2 \\ x_1-2x_2\leqslant 2 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解 (1)分析约束条件，作出可行域的图形。

由解析几何知，两个变量的一个线性方程表示平面上的一条直线，两个变量的一个线性不等式表示一个半平面。例如：$x_1+x_2=5$ 表示平面上的一条件直线 RQ(图 1-1)。直线 RQ 将平面划分为上半平面和下半平面两个部分。$x_1+x_2\geqslant 5$ 表示包括直线 RQ 在内的上半平面，$x_1+x_2\leqslant 5$ 表示包括直线 RQ 在内的下半平面。所以，满足不等式 $x_1+x_2\leqslant 5$ 的点，位于直线 RQ 上或它的下方。同理，满足 $-2x_1+x_2\leqslant 2$ 的点，位于直线 SR 上或它的下方；满足 $x_1-2x_2\leqslant 2$ 的点，位于直线 PQ 上或它的上方；满足 $x_1\geqslant 0$ 的点，位于纵坐标轴 ox_2 上或它的右方；满足 $x_2\geqslant 0$ 的点，位于横坐标轴 $0x_1$ 上或它的上方。同时满足所有约束条件的点，位于五边形 $OPQRS$ 的边界上或它的内部。

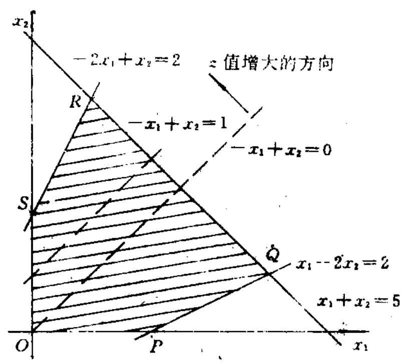

图 1-1

上述五边形 $OPQRS$ 所围成的区域，称为线性规划问题的可行域。可行域上的任意一个点，称为线性规划问题的一个可行解。本题的要求是在可行域上找出一个可行解 (x_1,x_2)，使其对应的目标函数 $z=-x_1+x_2$ 取得最大值。

(2) 考虑目标函数，作出目标函数的等值线。对于给定的 z，$-x_1+x_2=z$ 表示平面上的一条直线。由于该直线上的任意一个点对应的目标函数值都相等，因此，该直线称为目标函数的等值线。例如，给定 $z=0$，直线 $-x_1+x_2=0$ 是一条目标函数的等值线(见图 1-1 中的虚线)。如果把 z 看作参数，则 $-x_1+x_2=z$ 表示一族平行的目标函数的等值线。而且不难看出，随着 z 值的增大，等值线逐渐沿图中箭头方向平行移动。反之，随着 z 值的减小，等值线逐渐沿图中箭头

的反方向平行移动。

(3) 向 z 值增大的方向平行移动等值线。现在我们要求使目标函数取得最大值。因此，我们一方面要使 z 的值尽可能增大，另一方面又要使等值线与可行域相交。由图 1-1 可见，点 R 就是我们要求的点。

解方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

得点 R 的坐标 $x_1=1, x_2=4$，称为线性规划问题的最优解。其对应的目标函数值 $z=-x_1+x_2=-1+4=3$，称为线性规划问题的最优值。

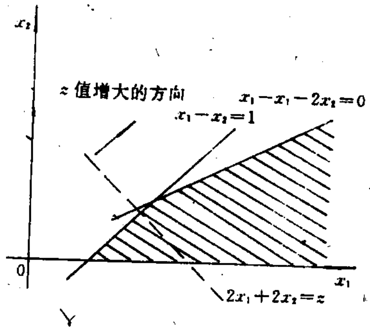

图 1-2

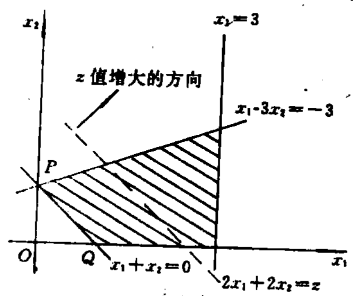

图 1-3

例 5　求解：

$$\max z = 2x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant 1 \\ x_1 - 2x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解　按例 4 的方法，首先由约束条件作出可行域（见图 1-2 中的阴影部分），由图可见，可行域是一个无界的区域。

然后，把 z 看作参数，作目标函数的等值线 $2x_1+2x_2=z$（图 1-2 中的虚线）。不难发现，随着 z 值的增大，等值线逐渐沿图中箭头方向平行移动，始终与可行域相交。故目标函数无最大值，此线性规划问题无最优解。

例 6　求解：

$$\min z = 2x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_1 - 3x_2 \geqslant -3 \\ x_1 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解　作出可行域及目标函数的等值线 $2x_1+2x_2=z$（图 1-3）。值得注意的是：等值线恰好与可行域的一条边界 PQ 平行。

为了求目标函数的最小值，将等值线逐渐沿图中箭头的反方向平行移动，当其经过 PQ 时，对应的目标函数取得最小值。此时由于等值线与可行域相交于 PQ，故 PQ 上的任意一点都

是最优解，本题有无穷多个最优解。

在 PQ 上任取一点，例如 $P(0,1)$，其对应的目标函数值 $z=2x_1+2x_2=2$ 为最优值。

例 7 解线性规划问题：

$$\max z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 由于 $x_1+x_2\leqslant 1$，$x_1+2x_2\geqslant 4$，$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$ 这四个半平面没有公共部分。因此，这个线性规划问题没有可行解，也就没有可行域，当然不会有最优解(图 1-4)。

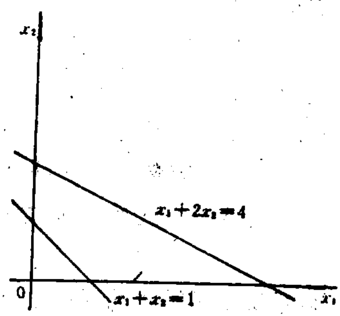

图 1-1

综合以上 4 个例子，我们可以看出，两个变量的线性规划问题具有以下两个重要的性质。

性质 1 两个变量的线性规划问题的可行域(如果存在的话)是一个凸多边形(可能有界，也可能无界)。

性质 2 如果两个变量的线性规划问题有最优解，则最优解一定可以在可行域的某一个顶点处取得。

今后我们将会看到，以上两个性质对于多个变量的线性规划问题也是成立的。

§1-3 线性规划问题的标准型

前面所建立的线性规划的数学模型，其形式是多种多样的。对于目标函数来说，分为求目标函数的最大值和最小值两种形式；在约束条件中，包括有等式约束和不等式约束，不等式约束又分为"$\geqslant$"和"$\leqslant$"两种形式。而且在实际问题中遇到的变量不一定满足非负的要求。由于上述原因，给理论探讨或研究求解方法带来困难，为了便于进行理论研究，也为了寻求一般线性规划问题的统一解法，我们需要找到一种统一的形式。

一、线性规划问题的标准型

线性规划问题的标准型规定为：

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-1}$$

或简单地写成：

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1-2}$$

二、线性规划问题的标准化

各种形式的线性规划问题的数学模型，都可以化为标准型。

(1) 求目标函数的最小值问题可以转化为求目标函数的最大值问题。

如果给出的问题是要求：

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

则可以转化为求：

$$\max(-z) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n$$

若令

$$w = -z$$

则可写成：

$$\max w = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n$$

值得注意的是，如果原来的问题不仅要求最优解，还要求出目标函数的最小值，那么在求出 $\max w$ 的值以后，需要将所求得的 $\max w$ 反号以后，才是原问题的最小值。

(2) 约束条件中的线性不等式可以转化为线性等式。

当某一个线性不等式为"≤"形式的不等式时，如某一个线性不等式为：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant b_i$$

则可以在不等式的左端加上一个非负变量 x_{n+i}，将线性不等式化为等式：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i$$

式中，$x_{n+i}(x_{n+i}\geqslant 0)$称为松弛变量。

当某一个线性不等式为"≥"形式的不等式时，如某一个线性不等式为：

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \geqslant b_k$$

则可以在不等式的左端减去一个非负变量 x_{n+k}，将线性不等式化为等式：

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n - x_{n+k} = b_k$$

式中，$x_{n+k}(x_{n+k}\geqslant 0)$称为剩余变量或松弛变量。

(3) 如果某个变量 x_i 没有非负约束，即不一定满足 $x_i\geqslant 0$，则 x_i 称为自由变量。自由变量可以转化为非负约束的变量。

因为任意一个数都可以表示为两个非负数的差，所以我们总可以用两个非负变量来表示一个自由变量。设 x_i 为自由变量，则可以令

$$x_i = x_i' - x_i''$$

其中，$x_i'\geqslant 0$，$x_i''\geqslant 0$。

例 8 将线性规划问题

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 3 \\ 2x_1 - x_3 = -1 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

化为标准型。

解 首先，将求目标函数的最小值问题

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3$$

化为求目标函数的最大值问题。只要令

$$w = -z$$

得

$$\max w = 3x_1 - x_2 - x_3$$

然后，引入松弛变量 $x_4 \geqslant 0$ 和 $x_5 \geqslant 0$，得标准型如下：

$$\max w = 3x_1 - x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3 \\ 2x_1 - x_3 = -1 \\ x_1, x_2, \cdots, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

例 9 将线性规划问题

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

化为标准型。

解 由于 x_1 是自由变量，为了化为标准型，可令

$$x_1 = x_1' - x_1'' \quad (x_1' \geqslant 0, x_1'' \geqslant 0)$$

将上式代入原线性规划问题后，得标准型如下：

$$\max z = 2x_1' - 2x_1'' + 3x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1' - x_1'' + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1' - 2x_1'' + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1', x_1'', x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

为了今后进一步学习的需要，线性规划问题还可以用矩阵形式或向量形式来表示。

三、线性规划问题的矩阵形式

如果在线性规划问题(1-1)中令：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

则线性规划问题(1-1)可表示为矩阵形式如下：

$$\max z = CX$$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-3}$$

四、线性规划问题的向量形式

如果进一步令

$$p_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

则

$$A = (P_1, P_2, \cdots, P_n)$$

从而

$$AX = (P_1, P_2, \cdots, p_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} P_j x_j$$

于是线性规划问题(1-1)可以表示为向量形式如下：

$$\max z = CX$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} P_j x_j = b \\ X \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-4}$$

§1—4 线性规划的基本概念

给出线性规划问题

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1-5}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1,2,\cdots,m) & \text{(1-6)} \\ x_j \geqslant 0 \qquad\qquad (j = 1,2,\cdots,n) & \text{(1-7)} \end{cases}$$

一、可行解和可行域

满足约束条件(1-6)及(1-7)的 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，称为线性规划问题的可行解。所有可行解构成的集合，称为线性规划问题的可行域。

如果上述的 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 不存在，则线性规划问题就没有可行解。

二、最优解和最优值

使目标函数取得最大值的可行解，称为线性规划问题的最优解。最优解对应的目标函数值，称为线性规划问题的最优值。

对于其它形式的线性规划问题，都可类似地定义它们的可行解、可行域、最优解和**最优值**。

三、基、基变量、非基变量

设 A 是约束方程组(1-6)的系数构成的 m×n 阶矩阵。即：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$$

$P_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是 A 的 n 个列向量。

并设 A 的秩为 m，B 是 A 的任意一个 m 阶非奇异子矩阵(即 $|B|\neq0$)，则称 B 为线性规划问题的一个基。

显然，一个线性规划问题的基的个数不会超过 c_n^m。由线性代数知识，若 B 是线性规划问题的一个基，则 B 一定是由 m 个线性无关的列向量组成。为了确定起见，不失一般性，可设

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}=(P_1,P_2,\cdots,P_m)$$

我们称 $p_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为关于基 B 的基向量，与基向量 p_j 对应的变量 $x_j(j=1,2,\cdots,m)$ 称为关于基 B 的基变量，其余的变量 $x_j(j=m+1,\cdots,n)$ 称为关于基 B 的非基变量。

四、基本解、基本可行解

当基 $B=(P_1,P_2,\cdots,P_m)$ 取定以后，如果令所有关于基 B 的非基变量为零，即令

$$x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$$

由于 B 非奇异，所以由约束方程组(1-6)可以求出唯一的一个解：

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^T$$

称为关于基 B 的基本解。

基本解不一定满足非负条件(1-7)，即基本解不一定是可行解。满足非负条件(1-7)的基本解，称为关于基 B 的基本可行解。显然，每一个基本可行解的非零分量的个数不会超过 m，如果非零分量的个数小于 m，也就是存在着取值为零的基变量，则称该基本可行解为退化的基本可行解。

由此可见，一个线性规划问题的所有基本解分为基本可行解和不可行的基本解两类。由于基和基本解是一一对应的，所以相应地，一个线性规划问题的所有的基也分为两类：1)基本可行解对应的基，称为可行基。特别地，当基本可行解是最优解时，它所对应的可行基，称为最优可行基，或最优基。2)不可行的基本解对应的基，称为非可行基。

例 10　求线性规划问题

$$\max z=2x_1+3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3 = 2 \\ x_1+3x_2+x_4=3 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0 \end{cases}$$