万学教育·海文考研

考研数学图书系列

2011

考研数学

历年真题权威解析

（数学一）

命题人讲真题 手重磅出击

十五年命题经 最权威解析

万学海文名师团队

王式安 1987-2001年全国硕士研究生入学考试数学命题组资深专家

蔡燧林 1992-2000年全国硕士研究生入学考试数学命题组资深专家

胡金德 1989-2001年全国硕士研究生入学考试数学命题组资深专家

程杞元 全国硕士研究生入学考试数学阅卷组资深专家

编著

其他的《真题解析》都是告诉您命题专家可能在想什么

本书的作者告诉您，命题专家到底在想什么

海文考研

内部教案

公开出版

西安交通大学出版社

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

万学教育·海文考研

考研数学图书系列

2011

考研数学历年真题权威解析

（数学二）

万学海文名师团队

王式安　1987-2001年全国硕士研究生入学考试数学命题组资深专家

蔡燧林　1992-2000年全国硕士研究生入学考试数学命题组资深专家

胡金德　1989-2001年全国硕士研究生入学考试数学命题组资深专家

程杞元　全国硕士研究生入学考试数学阅卷组资深专家

编著

西安交通大学出版社

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学历年真题权威解析．数学一/王式安编著．
—西安：西安交通大学出版社，2010．4
ISBN 978-7-5605-3497-8

Ⅰ．①考… Ⅱ．①王… Ⅲ．①高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ．①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 060780 号

考研数学历年真题权威解析(数学一)

主　　编：王式安　蔡燧林　胡金德　程杞元
策　　划：张伟　陈丽
责任编辑：王欣
装帧设计：金榜图文设计室
出版发行：西安交通大学出版社
地　　址：西安市兴庆南路 10 号(邮编：710049)
电　　话：(029)82668315　82669096(总编办)
　　　　　(029)82668357　82667874(发行部)
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：18.75
字　　数：445 千字
版　　次：2010 年 4 月第 1 版
印　　次：2010 年 4 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5605-3497-8/O・327
定　　价：28.00 元

本书特色及使用说明

一、本书特色说明

对于考研的学生来说，无论哪个科目，考试大纲和历年真题是必备参考依据和学习标准。所以，真题的重要作用毋庸置疑。

一般来说，真题的作用体现在以下三个方面：第一，检验复习效果。模拟真实考场，在规定时间做完真题，并进行打分，检验整体的复习效果，评估与目标之间的复习差距；第二，查漏补缺。从对真题的实战成绩，看得分失分点，全面复习后，用真题检验学习效果，对复习内容的掌握程度查漏补缺；第三，也是最重要的一点——归纳真题，总结命题思路和重点等。因此，一本好的真题书，不仅仅是试题的详细解析，更重要的是要体现命题思路和重点等。

本书汇编了 1999—2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)的 12 年试题，全部由王式安、蔡燧林、胡金德 3 位具有 10 余年命题经验的资深命题专家和具有 10 余年阅卷经验的阅卷专家——程杞元老师精心编写而成。他们对考试大纲有多年的研究经验，对考研真题的命题规律和阅卷标准都有精心的研究和独到的见解，从而奠定了他们对考研数学真题学习指导的权威性。

在众多的考研数学历年真题辅导书中，本书独具特色，具有如下优异品质：

(一)命题人的真实诠释

考研数学的命题具有一脉相承的特点，命题风格不会有明显的跳跃性变化，因此，对近十二年真题的学习和研究有助于增加对考研命题规律和特点的了解，缓解复习过程中的紧张情绪、增强自信以及准确预测当年的出题方向。

对考研真题命题本质与规律把握最准确的，无疑是真题命题人与阅卷人，市面上真题解析的书虽然很多，但是其他人的书都在揣摩命题人的出题意图，在心理学上讲，个人的意图他人是无法完全理解的。因此，只有命题人才能真正讲透命题的思路和本质。

(二)科学实用的体例设计

本书编写的重点是试题考点的解析与解题方法的训练，目的在于使考生用最少的时间掌握考点与解题方法，达到举一反三、触类旁通的效果，而不是就题论题；同时还通过具体试题，指出了考生在解题过程中的问题和错误，并点明错误原因，使考生避免再犯同类型错误。

本书第一篇为 1999—2010 历年试题，按套题形式倒序排列，方便考生自我测试；第二、三、四篇是把所有题目按考试大纲的顺序和考查的内容进行分章，便于考生分章节复习使用；第五篇是答案速查，便于考生每做完一套题目后快速查阅套题答案。

二、使用说明

对于起点较低的考生，建议在数学复习全程的第三个阶段即模拟训练阶段使用本书；基础好的考生可以在数学复习全程的第二个阶段即强化提高阶段使用。具体使用建议如下：

<table>
<tr><th>结构</th><th>内容说明</th><th>使用说明</th><th>时间建议</th></tr>
<tr><td>第一部分
历年试题
（第一篇）</td><td>12 年真题按套题形式倒序排列，共 266 道题目</td><td>对学习效果的检验和评估是学习过程中不可或缺的一个过程，只有通过测验才能知道前一阶段的学习效果，也只有通过不断的测试才能达到“平时像考试，考试像平时”的良好心态。
真题的作用之一就是自测。建议每套题做题用 3 小时，做完后对答案、小结、整理错题用 2 小时；总计每套题用 5 小时。建议基础一般的考生把这部分的全部试题做 2～3 遍，达到对所有的题目都能熟练地、正确地解答出来的程度。</td><td rowspan="3">约 60～100 小时，基础好的考生花 60 个小时；基础一般的考生做两遍，花 100 个小时。</td></tr>
<tr><td>第二部分
分章详解
（第二、三、四篇）</td><td>12 年真题，266 道题目分章节，分题型详解</td><td>做完一套题目，先核对答案，看看出错的题目是怎么错的，自己找出原因。实在不会再查看分析、详解和点评，进行对比和总结。本部分在“分析”中用简明语言给出了解题思路；在“详解”中用简捷、新颖的方法给出了详细解答；在“点评”中强调与真题相关知识点及解题中使用的技巧。本部分全方位展示出了考研数学的特点，便于考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分的重点、难点及常考题型，进一步把握考试及命题的思路和规律。</td></tr>
<tr><td>第三部分
答案速查
（第五篇）</td><td>12 年真题，266 道题目的简要答案</td><td>本部分用于每做完一套题目后的答案速查，便于迅速知道测验效果，以节省答案检查时间，尤其是在临考之前的整套真题的演练过程中，更能为广大考生节约宝贵时间。</td></tr>
</table>

最后，本书的成稿还要感谢邬丽丽、王丹、王彩霞、马媛、李兰巧、丁勇、张清芳、曾芸芸等教研室老师在编校过程中付出的辛苦和努力。另外，如果您有任何疑问或建议敬请与我们联系。E－mail：books@wanxue.cn。

前言

以突破某种考试为目的的学习行为，其基本学习原理就是锁定最有效的学习任务，并精确测算完成此任务所需要的学习时间，在学习时间和学习任务之间构建最合理的配置关系才能达成最佳的学习效果。

对于刚刚踏上征途的考研学子而言，其最主要的学习任务就是看书，最迫切需要了解的就是到底应该看哪些书，需要花多少时间，如何来规划才能收获最大的学习价值。

万学海文通过对往年数万考研学子的深入调查表明：

1. 每个考研学子最少会在学习资料上花费超过70%的学习时间；
2. 许多考研学子因缺乏科学权威的指导，在选择学习资料时常常无所适从；
3. 许多考研学子因盲目跟风常常会购买大量超越自己学习时间极限的学习资料。

为帮助刚刚踏上考研路的学子们构建最清晰、最合理的学习规划方案，万学海文凭借其在考研领域最强大的权威师资和最优秀的辅导团队，组织了各考研学科原命题组专家、阅卷组专家，并会同万学海文冠军辅导团队，融合十多年辅导精华，回归学习原理的本质，精心打造了本套全程策划书系，在众多的考研辅导书籍中，它独具特色，卓尔不群，主要具有如下优异品质。

一、全国唯一系统整合资深专家命题经验和高分学子学习实践的考研辅导书

十三位有丰富经验的命题组组长和数十位命题组专家，根据其多年的命题经验，集合1000多名优秀学子的学习实践，在精准把握命题规律的基础上，对备考内容进行最权威和最科学的剖析。

二、全国唯一以学生为本全程整体策划的考研辅导书

在十多年的考研辅导过程中，我们透彻了解各种考生的学习特性，归纳总结了众多学子的优秀学习方法，并以此为基础提炼出最有效的学习内容，同时，结合万学海文最卓越辅导系统——钻石卡辅导系统的辅导时间，对考研学习资料进行全程系统规划，最大限度提升考研学子的学习效率，使其不再将宝贵的复习时间浪费在一些根本不会考到的学习内容上。

三、全国唯一配备《使用说明书》的考研辅导书

好的产品要有好的《使用说明书》，万学海文考研辅导书系全国独家首度配备《使用说明书》。

本系列图书均附有详尽的学习规划和使用说明。其中，学习规划帮助考生明确科目的整体复习规划；图书使用说明则针对不同基础的考生应该在什么阶段、花费多少时间、如何学习本书给予了系统量化的指导与说明。

万学海文教学研究中心

考研全程学习规划方案

对全国937所院校考研学生的学习时间调查显示：如果考生提前一年进行研究生入学考试的准备，扣除其完成学校课程及考试，参加四、六级考试，参加工作面试等等必不可少的事宜所占用的时间，每个考生所能自由支配用于考研复习的全部时间大约为2000个小时。

以清华大学课程最繁忙的理工科学生为例，全年时间300天，可用于自由支配的学习时间共计1920小时，由三部分构成，具体计算如下：

1. 大三下半学期，不算节假日，共计80天，课程较多，在校考生每天可自由支配时间3小时，共计学习时间240小时；

2. 大四上半学期，不算节假日，共计80天，只有极少量课程，在校考生每天可自由支配时间6小时，共计学习时间480小时；

3. 其余时间都是节假日，共计140天，减去一些不可预知事件所占用的天数20天，还剩120天，在校考生每天可自由支配时间10小时，共计学习时间1200小时。

这2000个小时在各门学科中应该如何分配才相对合理？考生应该如何选择相对应的学习资料？如何选择相对应的课程？为帮助每一位刚刚踏上考研征程的学子彻底解决以上疑虑，万学海文融合了众多考研高分学子的宝贵经验，并结合学科特点对各门学科的全年学习方案进行了系统规划。

一、考生初始状态预设及达成目标

为尽量保证绝大多数考研学生可参照此方案制定个性化的学习计划，我们设定了一个标准初始状态以及目标终点。

1. 起点：政治为零，英语4级400分水平，数学当年期末考试擦边及格，至今未学；

2. 过程：跨校跨档跨一级学科，但非跨排斥学科；

3. 目标：80%概率达到政治75，英语65，数学120，专业课排名前10%（报录比10：1左右的硕士点）。

注：① 以下方案是依托上述标准起点和目标所设定，考生可在此基础上根据个人情况对每阶段复习任务及时间进行弹性调整；

② 以下方案是按考数学的情况进行设定，不考数学的考生政治、英语科目的复习同样可参照此方案，并可适当加强英语的复习时间。

二、政治全程解决方案

考研政治复习全程总时间大约需要 200～300 小时。

政治全程详细解决方案敬请关注万学海文考研政治类图书。

三、英语全程解决方案

考研英语复习全程总时间大约需要 500～700 小时。

英语全程详细解决方案敬请关注万学海文考研英语类图书。

四、数学全程解决方案

考研数学复习全程总时间大约需要 700～1000 小时。

在前期复习阶段每天至少保证学习数学 2.5～3 小时；中后期略有下降，但平均每天也要保持在 2 小时左右。

数学复习的原理，只需根据考纲的要求将要考查的每个知识点都练习到足够强度的题目，即可取得很好的成绩，关键就是到底做多少题目才算合理，如何找到这些合理的题目。以数学一为例，2010 年考试大纲规定共有 308 个知识点，每个知识点对应若干题型，按照平均每个知识点对应 3 个题型，那么 308 个知识点共对应 924 个题型，而掌握每个题型平均要做 3～4 个题目，则 924 个题型约对应 2772～3696 个题目，将精选的 2772～3696 个覆盖所有大纲知识点的题目并且是最高质量的题目练习到位，数学分数就不会低于 120 分。

下表是以数学一的要求为基础研发的全程复习规划，由于数学一、二、三的考点要求各不相同(数学一 308 个，数学二 162 个，数学三 240 个)，但总体来说数学二、数学三的考试范围都不超出数学一的范围，只是在其范围内的节选，所以数学二、数学三的考生可以在此方案基础上根据相关考纲要求，再结合个人实际情况进行方案调整，使其更加适合本人的复习状况。

阶段划分	学习任务及时间规划	学习资料	本阶段目标
第一阶段： 基础准备阶段(3 月 1 日～4 月 30 日，平均每天 2.5～3 小时，共计 150～180 小时)	1.学习考纲要求的基本知识点(50～60 小时)； 2.进行基本习题的对应性训练(90～110 小时)； 3.万学导学班课程(10 小时)。	1.《高等数学》(同济版)(高教出版社)； 2.《线性代数》(清华版)； 3.《概率论与数理统计》(浙大版)(高教出版社)； 4.王式安等《考研数学基础训练经典题集》； 5.《导学班内部讲义》。	1.全面熟记概念、定理、公式； 2.准确把握基本概念、基本定理、基本方法的内涵和外延； 3.熟练掌握对应知识点的基本运用和解题方法。

第二阶段： 强化提高阶段(5月1日～9月30日，平均每天2.5～3小时，共计375～450小时)	1. 复习基础知识点(15～20小时)； 2. 按知识点所对应的题型进行强化训练(260～320)； 3. 万学强化班课程(100～110小时)。	1. 王式安等《考研数学标准全书》； 2.《强化班内部讲义》； 3.《考研数学必备公式手册》。	1. 按照大纲要求，熟悉并熟练掌握所有知识点对应的所有题型； 2. 利用强化班课程，抓住重点、突破难点。
第三阶段： 模拟训练阶段(10月1日～12月10日，平均每天2～2.5小时，共计140～175小时)	1. 根据知识点单元结构将上一阶段所做习题进行循环练习，尤其注意老师指出的重难点(30～50小时)； 2. 每3～5进行一次套题训练(通常隔三天为宜，10套真题，8～10套模拟题，90～105小时)； 3. 万学真题精讲和冲刺班课程(20小时)。	1. 王式安等《考研数学标准全书》； 2.《强化班内部讲义》； 3. 王式安等《考研数学历年真题权威解析》； 4. 王式安等《考研数学成功冲刺模拟卷》； 5.《冲刺班内部讲义》。	1. 通过真题和模拟题训练，检验复习效果，了解考研数学题的结构、难度和特点，增加应试经验和应试技巧； 2. 通过对上一阶段所练习题目的循环练习，有效加深对常考知识点的理解，提高解题熟练程度； 3. 利用冲刺串讲班老师的帮助，将考研数学的所有考点串起来，形成知识点间有机联系的整体； 4. 重点加强对综合题的专项训练。
第四阶段： 冲刺备考阶段(12月11日～考研，平均每天2.5小时，共计70～90小时)	1. 对前面所有阶段的重难点题、个人做错的题进行归纳总结性复习(40～50小时)； 2. 每3～5天进行一次套题训练(5～10套题，根据个人复习基础定(30～40小时)。	1. 前面各阶段的全部资料； 2.《万学内部精选模拟题》。	1. 对所有做错的题进行归纳总结，改正错误思维，查漏补缺； 2. 保持做套题的速度、状态，迎接最后的挑战。

(注：关于本方案的操作细节和学习原理敬请考生关注万学海文所开设的全程策划班。)

五、专业课全程解决方案

专业课因为考生的情况十分复杂，不一一探讨，考生可关注 www. vipkaoyan. com，获取适合自己的专业课解决方案。

目　录

第一篇　历年试题

2010年全国硕士研究生入学统一考试试题

一、选择题(1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=$ (　　)

(A)1.　(B)e.　(C)e^{a-b}.　(D)e^{b-a}.

(2) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F'_2\neq 0$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ (　　)

(A)x.　(B)z.

(C)$-x$.　(D)$-z$.

(3) 设 m,n 均是正整数,则反常积分 $\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性 (　　)

(A) 仅与 m 的取值有关.　(B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m,n 的取值都有关.　(D) 与 m,n 的取值都无关.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$ (　　)

(A)$\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.　(B)$\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$.

(C)$\int_0^1dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$.　(D)$\int_0^1dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 m 阶单位矩阵.若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,则 (　　)

(A) 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$,秩 $r(\boldsymbol{B})=m$.　(B) 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$,秩 $r(\boldsymbol{B})=n$。

(C) 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$,秩 $r(\boldsymbol{B})=m$.　(D) 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$,秩 $r(\boldsymbol{B})=n$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,则 $\boldsymbol{A}$ 相似于 (　　)

(A)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　(B)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{1}{2}, & 0\leq x<1, \\ 1-e^{-x}, & x\geq 1, \end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=$ (　　)

(A)0.　　(B) $\frac{1}{2}$.　　(C) $\frac{1}{2}-e^{-1}$.　　(D) $1-e^{-1}$.

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度，若

$$f(x)=\begin{cases} af_1(x), x\leq 0, \\ bf_2(x), x>0 \end{cases} (a>0,b>0)$$

为概率密度，则 a,b 应满足 (　　)

(A) $2a+3b=4$.　　(B) $3a+2b=4$.

(C) $a+b=1$.　　(D) $a+b=2$.

二、填空题(9 ～ 14 题，每小题 4 分，共 24 分.)

(9) 设 $\begin{cases} x=e^{-t}, \\ y=\int_0^t \ln(1+u^2)\mathrm{d}u, \end{cases}$ 则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$ ________.

(10) $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x=$ ________.

(11) 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|(x\in[-1,1])$，起点是$(-1,0)$，终点为$(1,0)$，则曲线积分 $\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=$ ________.

(12) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$，则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$ ________.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$. 若由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间的维数为 2，则 $a=$ ________.

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{C}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，则 $EX^2=$ ________.

三、解答题

(15)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值.

(17)(本题满分 10 分)

(Ⅰ) 比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由；

(Ⅱ) 记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$的收敛域及和函数.

(19)(本题满分10分)

设P为椭球面$S: x^2+y^2+z^2-yz=1$上的动点,若S在点P处的切平面与xOy面垂直,求点P的轨迹C,并计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{(x+\sqrt{3})\mid y-2z\mid}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$,其中$\sum$是椭球面$S$位于曲线$C$上方的部分.

(20)(本题满分11分)

设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

已知线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$存在2个不同的解.

(Ⅰ)求λ,a;

(Ⅱ)求方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解.

(21)(本题满分11分)

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$下的标准形为$y_1^2+y_2^2$,且$\boldsymbol{Q}$的第3列为$(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$.

(Ⅰ)求矩阵$\boldsymbol{A}$;

(Ⅱ)证明$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$为正定矩阵,其中$\boldsymbol{E}$为3阶单位矩阵.

(22)(本题满分11分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

求常数A及条件概率密度$f_{Y|X}(y\mid x)$.

(23)(本题满分11分)

设总体X的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数$\theta\in(0,1)$未知.以N_i表示来自总体X的简单随机样本(样本容量为n)中等于i的个数$(i=1,2,3)$.试求常数a_1,a_2,a_3,使$T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i$为$\theta$的无偏估计量,并求$T$的方差.

2009年全国硕士研究生入学统一考试试题

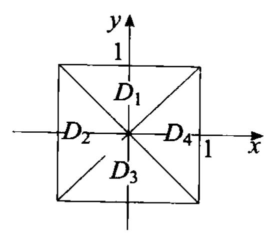
一、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x \to 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2\ln(1 - bx)$ 是等价无穷小,则 ( )

(A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$.　　(B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$.

(C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$.　　(D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$.

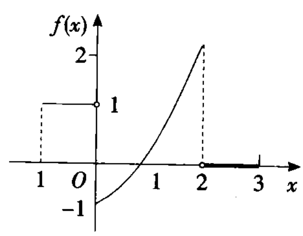
(2) 如图,正方形 $\{(x,y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k(k = 1,2,3,4)$, $I_k = \iint\limits_{D_k} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\} =$ ( )



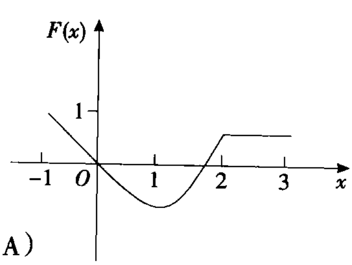
(A) I_1.　　(B) I_2.

(C) I_3.　　(D) I_4.

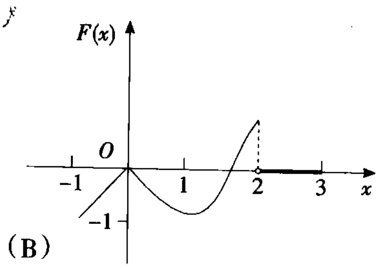
(3) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为



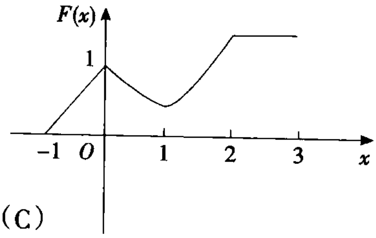
则函数 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为 ( )



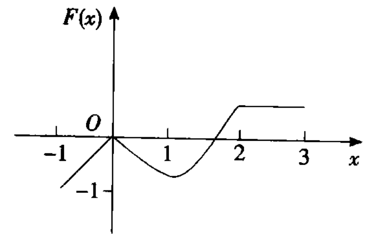
(A)



(B)



(C)



(D)

(4) 设有两个数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,则 ( )

(A) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛. (B) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$发散.

(C) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛. (D) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$发散时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$发散.

(5) 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是3维向量空间$\boldsymbol{R}^3$的一组基,则由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$的过渡矩阵为 ( )

(A) $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

(6) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为2阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$分别为$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$的伴随矩阵.若$|\boldsymbol{A}|=2$,$|\boldsymbol{B}|=3$,则分块矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$的伴随矩阵为 ( )

(A) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{B}^*\\2\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{A}^*\\2\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{A}^*\\3\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量X的分布函数为$F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$,其中$\Phi(x)$为标准正态分布的分布函数,则$E(X)=$ ( )

(A)0. (B)0.3. (C)0.7. (D)1.

(8) 设随机变量X与Y相互独立,且X服从标准正态分布$N(0,1)$,Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$.记$F_Z(z)$为随机变量$Z=XY$的分布函数,则函数$F_Z(z)$的间断点个数为 ( )

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.答案填在题中横线上.)

(9) 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,$z=f(x,xy)$,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$,则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2,y'(0)=0$ 的解为 $y=$ ________.

(11) 已知曲线 $L:y=x^2(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$,则$\int_L x\,ds=$ ________.

(12) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$,则$\iiint\limits_{\Omega}z^2\,dx\,dy\,dz=$ ________.

(13) 若 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$,其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,则矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为 ________.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差.若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量,则 $k=$ ________.

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

(16)(本题满分 9 分)

设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 所围成区域的面积,记

$S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$,求 S_1 与 S_2 的值.

(17)(本题满分 11 分)

椭球面 S_1 是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$绕 x 轴旋转而成,圆锥面 S_2 是由过点 $(4,0)$ 且与椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(Ⅰ)求 S_1 及 S_2 的方程;

(Ⅱ)求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

(18)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理:若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ)证明:若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导,且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$,则 $f'_+(0)$ 存在,且 $f'_+(0)=A$.

(19)(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中 $\sum$ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.