

中国人民解放军总装备部装备科技译著基金资助  
中国人民解放军总装备部“十一五”预研基金资助  
机械系统与振动国家重点实验室开放基金资助

System Reliability Theory:  
Models, Statistical Methods,  
and Applications,  
2<sup>ND</sup> Edition

# 系统可靠性理论： 模型、统计方法及应用 (第2版)

[挪]Marvin Rausand 著  
马文·劳沙德  
郭强 王秋芳 刘树林 译  
张来凤 校

- ▶ 收集了近年来可靠性理论、模型及统计方法等方面的最新研究成果；
- ▶ 反映了可靠性领域前沿知识和体系结构；
- ▶ 探讨了专业性很强的共因故障模型；
- ▶ 结合大量相关示例，实用性强。



国防工业出版社  
National Defense Industry Press

中国人民解放军总装备部装备科技译著基金资助  
中国人民解放军总装备部“十一五”预研基金资助  
机械系统与振动国家重点实验室开放基金资助

**System Reliability Theory; Models, Statistical  
Methods, and Applications, 2<sup>ND</sup> Edition**

# 系统可靠性理论： 模型、统计方法及应用 (第2版)

[挪] Marvin Rausand 著  
马文·劳沙德  
郭强 王秋芳 刘树林 译  
张来凤 校

国防工业出版社

·北京·

著作权合同登记 图字： 军-2008-070 号

图书在版编目(CIP)数据

系统可靠性理论:模型、统计方法及应用/(挪)  
劳沙德(Rausand, M.)著;郭强,王秋芳,刘树林译.—2版.  
—北京:国防工业出版社,2010.2  
ISBN 978-7-118-06670-8

I. ①系... II. ①劳... ②郭... ③王... ④刘...  
III. ①系统可靠性—教材 IV. ①N945.17

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第009752号

All rights reserved. This translation Published under license.

※

国防工业出版社出版发行  
(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)  
天利华印刷装订有限公司印刷  
新华书店经售

\*

开本 787×1092 1/16 印张 22½ 字数 595 千字  
2010年2月第2版第1次印刷 印数 1—3000册 定价 56.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

## 译者前言

可靠性工程作为一门独立学科受到重视已经有五十多年了,可靠性工程不只应用于航空、航天、兵器、船舶、核工业、电子等技术部门中,而且在机械、汽车、冶金、建筑、石油化工等民用工业中也逐渐得到应用。同时,可靠性理论、可靠性模型以及可靠性统计方法也随着广泛应用而得到进一步发展,尤其是进入 21 世纪以来,可靠性理论方面的研究发展已经呈现逐年加快趋势。为此,我们将挪威科学技术大学 Marvin Rausand 教授 2004 年出版的“System Reliability Theory: Model, Statistical Method and its Application(Second Edition)”一书翻译成中文出版发行。该书集 Marvin Rausand 教授近三十年教学实践经验与最新理论研究成果,是理论研究与实践应用的最佳结合物。翻译此书的目的:一是学习可靠性理论的最新研究成果及应用方法;二是希望能够为我国可靠性应用工程的进一步推广贡献力量。

本书由中国兵器工业集团第 201 研究所郭强博士主译,中国兵器工业集团第 201 所王秋芳、刘树林等参与翻译,并由中国兵器工业集团第 201 研究所张来凤校对。其中第 1、2、4、5、8、13 章由郭强翻译,第 3、6、11 和 12 章由刘树林翻译,第 7、9、10 和 14 章由王秋芳翻译,由郭强最终统稿。

本书是可靠性理论及统计方面的基础教材。书中收集了近年来可靠性理论、模型及统计方法等方面的最新研究成果,并包含大量相关示例,内容新颖,图表清晰,实用性强。可供可靠性相关专业的本科生和研究生使用,也可供从事可靠性工作的科研人员、工程技术人员和管理人员参考。

本书受中国人民解放军总装备部装备科技译著基金、中国人民解放军总装备部“十一五”预研基金以及上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室开放基金支持,在此表示衷心感谢。

在本书的翻译校对过程中,我们得到了本书英文版原著者挪威科学技术大学 Marvin Rausand 教授的大力支持和无私帮助,谨在此表示衷心感谢。

在本书的翻译校对过程中,我们得到了中国兵器工业集团第 201 所总体技术部领导的大力支持和人机环境及可靠性研究室解芳等同志的帮助,在此表示衷心感谢。

中国人民解放军装备指挥技术学院航天装备系博士生导师金星教授和上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室博士生导师赵玫教授提出许多宝贵意见和有益建议,在此表示衷心感谢。

在本书策划成稿过程中,国防工业出版社的王京涛编辑提供了许多无私帮助,在此表示衷心感谢。

由于成稿时间仓促,译校水平有限,书中难免存在错误和不当之处,请读者指正。

电话:010-83808714。

电子邮件:victorguo77@yahoo.com.cn。

译者

# 目 录

第 1 章 概述	1	3.8 Bayesian 置信网络法	58
第 2 章 失效模型	6	3.9 事件树分析法	58
2.1 引言	6	3.10 可靠性框图法	63
2.2 状态变量	6	3.11 系统结构分析法	67
2.3 失效时间	6	习题	74
2.4 可靠度函数	7	第 4 章 独立单元系统	76
2.5 失效率函数	8	4.1 引言	76
2.6 平均失效时间	10	4.2 系统可靠性	76
2.7 平均剩余寿命	12	4.3 不可修系统	79
2.8 二项式分布和几何分布	12	4.4 故障树定量分析法	84
2.9 指数分布	13	4.5 系统可靠度的计算方法	88
2.10 均匀 Poisson 过程	16	4.6 冗余	91
2.11 Gamma 分布	18	习题	94
2.12 Weibull 分布	20	第 5 章 单元重要性	97
2.13 正态分布	23	5.1 引言	97
2.14 对数正态分布	24	5.2 Birnbaum 衡定方法	98
2.15 Birnbaum - Saunders 分布	27	5.3 潜在提高值法	100
2.16 反高斯分布	28	5.4 风险业绩值法	101
2.17 极值分布	31	5.5 风险降低值法	102
2.18 应力相关建模法	34	5.6 关键重要性衡定法	102
2.19 其他分布簇	34	5.7 Fussell - Vesely 值衡定法	103
2.20 小结	37	5.8 示例	106
习题	37	习题	111
第 3 章 系统定性分析	42	第 6 章 相关失效	113
3.1 引言	42	6.1 引言	113
3.2 系统及其界面	42	6.2 如何获得可靠的系统	115
3.3 功能分析	44	6.3 相关失效模型	116
3.4 失效及失效分类	47	6.4 特殊模型	117
3.5 失效模式、影响和关键性 分析法	50	6.5 关联变量	122
3.6 故障树分析法	52	习题	125
3.7 因果框图法	57		

<b>第 7 章 计数过程</b> .....	127	10.4 安全不可用性 .....	259
7.1 引言 .....	127	10.5 共因失效 .....	262
7.2 齐次 Poisson 过程 .....	133	10.6 IEC61508 .....	265
7.3 更新过程 .....	137	10.7 PDS 方法 .....	268
7.4 非齐次 Poisson 过程 .....	157	10.8 Markov 方法 .....	268
7.5 非完美维修过程 .....	164	习题 .....	272
7.6 模型的选择 .....	170	<b>第 11 章 寿命数据分析</b> .....	277
习题 .....	171	11.1 引言 .....	277
<b>第 8 章 Markov 过程</b> .....	174	11.2 完整的和截尾的数据组 .....	277
8.1 引言 .....	174	11.3 非参数方法 .....	279
8.2 Markov 过程 .....	175	11.4 参数方法 .....	298
8.3 渐进解 .....	183	11.5 模型选择 .....	308
8.4 串并联结构 .....	187	习题 .....	310
8.5 首次系统失效平均时间 .....	191	<b>第 12 章 加速寿命试验</b> .....	314
8.6 由关联单元组成的系统 .....	196	12.1 引言 .....	314
8.7 备用系统 .....	198	12.2 加速寿命试验设计 .....	314
8.8 复杂系统 .....	203	12.3 分步应力加速试验的参数 模型 .....	315
8.9 时间相关解法 .....	206	12.4 ALT 的非参数模型 .....	320
8.10 半 Markov 过程 .....	207	习题 .....	322
习题 .....	208	<b>第 13 章 Bayesian 可靠性分析</b> .....	323
<b>第 9 章 维修后系统的可靠性</b> .....	210	13.1 引言 .....	323
9.1 引言 .....	210	13.2 基本概念 .....	323
9.2 维修类型 .....	211	13.3 Bayesian 点估计 .....	326
9.3 停机时间及其分布 .....	212	13.4 置信区间 .....	327
9.4 可用性 .....	214	13.5 先验分布的选择 .....	328
9.5 系统可用性 .....	218	13.6 Bayesian 寿命检验采样计划 .....	332
9.6 预防性维修策略 .....	222	13.7 先验分布的阐述 .....	333
9.7 维修最优化 .....	236	13.8 预示密度 .....	334
习题 .....	245	习题 .....	335
<b>第 10 章 安全系统的可靠性</b> .....	247	<b>第 14 章 可靠性数据分析</b> .....	337
10.1 引言 .....	247	<b>参考文献</b> .....	341
10.2 安全测量系统 .....	247		
10.3 执行时的失效概率 .....	251		

# 第1章 概述

## 1. 可靠性工程发展简史

可靠性一词作为人的一种属性已经有很长时间了,但是,对于技术系统来讲,可靠性一词仅有 90 年左右的历史。技术领域的可靠性概念是从第一次世界大战后出现的,首先被用在比较军用单缸飞机、双缸飞机及四缸飞机的安全性方面,即可靠性用来评价单位飞行时间的故障数。

20 世纪 30 年代初,Walter Shewhart、Harold F. Dodge 和 Harry G. Romig 等人成功地用统计方法代替理论分析来对工业产品的质量进行了评估。但是这种方法直到第二次世界大战后才得到大力推广。

在第二次世界大战期间,以 Wernher von Braun 为首的一个研究小组在德国开发了 V-1 型导弹。尽管在研究开发过程中,研究小组对导弹的各个部件进行了详细的设计,但是,第二次世界大战后有报道显示首批 10 枚 V-1 型导弹全部发射失败。数学家 Robert Lusser 被请为事故调查顾问来对导弹系统进行分析,很快从事故中得出一套理论:串联部件的产品概率法则。这一法则在一些给定的前提下仅对于每个部件都工作时是适合的。表明了串联系统的可靠性为系统中单个部件的可靠性的综合体现。若系统中包含部件很多,即使每个部件的可靠性很高,但是整个系统的可靠性可能非常低。

在美国,用提高系统中单个部件可靠性来提高整个系统可靠性的尝试也在进行。更加精细地挑选原材料、更加精细地设计为系统可靠性的提高帮助很大。但是这样做的代价就是费用非常昂贵,在当时几乎是不可能实现的。

第二次世界大战后,工业产品的复杂程度大大提高,出现了以电视机、电子计算机等为代表的复杂电子产品。随着汽车工业的发展,复杂系统的可靠性和安全性已经提到了研究日程。

20 世纪 50 年代末 60 年代初,美国洲际弹道导弹和太空开发计划的发展,尤其是墨丘利计划和双子座计划的推进,以及和俄罗斯在外太空方面的军备竞赛,使得人类首次登上了月球。同时也给可靠性的发展提供了良好的契机,国际上首个可靠性专业学术杂志 IEEE Transaction on Reliability 在 1963 年问世,还有大量的可靠性专业书籍也在 20 世纪 60 年代出版发行。

到 20 世纪 70 年代,美国和其他一些国家开始大力发展原子能,尤其是在关注原子能的安全风险评估方面,美国专门成立了以 Norman Rasmussen 教授为首的研究小组对这个问题开展研究工作,数百万美元研究经费的投入造就了世界上第一份原子能安全风险评估报告(WASH-1400 (NUREG-75/014)),后被称为著名的 Rasmussen 报告。

在欧洲和亚洲,各国在工业系统的可靠性及安全性方面问题同样也做了大量有意义的工作。在挪威海洋石油天然气工业的开发,尤其是北海的石油天然气的开发利用方面,使得深海设备可靠性问题成为和太空飞船一样的研究热点。

## 2. 可靠性分析方法

可靠性大致可以分为以三种:①硬件可靠性;②软件可靠性;③人的可靠性。

尽管许多系统同时包括硬件、软件和人的因素(如设计者、操作者和维修者)。但本书主要涉及硬件可靠性中的部件及系统的可靠性。硬件可靠性分析有两种途径:①机理模型方法;②统

计分析方法。

机理模型方法中,强度和载荷分别看作是随机变量  $S$  和  $L$ 。在时刻  $t$ ,强度和载荷的分布如图 1.1 所示。载荷大于强度则失效,可靠度  $R$  定义为强度大于载荷的概率,即

$$R = \Pr(S > L)$$

式中: $\Pr(A)$ 表示事件  $A$  的概率。

载荷和强度通常是随时间变化的,因此可以看作是时间的函数,分别记作: $L(t)$ 、 $S(t)$ 。工程实际中常用的  $L(t)$  和  $S(t)$  关系见图 1.2。失效时间  $T$  定义为到  $S(t) < L(t)$  为止时的(最短)时间,即

$$T = \min \{t; S(t) < L(t)\}$$

因此,可靠度  $R(t)$  可以定义为

$$R(t) = \Pr(T > t)$$

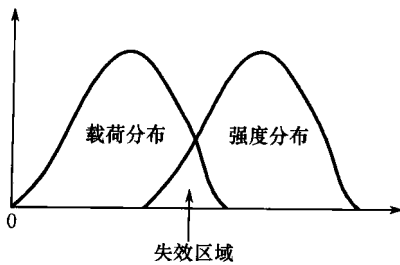


图 1.1 载荷分布与强度分布

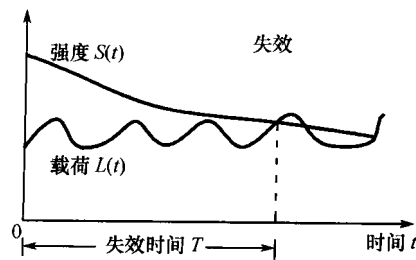


图 1.2 载荷和强度随时间变化产品单元失效图

机理模型方法主要用来进行结构产品单元(如梁、桥)的可靠性分析。因此,也被称为结构可靠性分析法(Melchers, 1999)。一个类似海洋石油平台柱子的结构产品单元可能遭受来自海洋洋流、海洋季风等作用的载荷,这些载荷可能来自于不同方向,因此,这些载荷可以在数学上看作是一个向量  $L(t)$ 。同理,强度也有不同方向之分,也可以记作向量  $S(t)$ 。这样,模型和分析方法将变得很复杂。

统计分析方法主要是通过分析在失效时间  $T$  内载荷和强度的概率分布函数  $F(t)$  来获得可靠性。评价可靠性的指标例如失效率(Failure Rate)和平均故障发生时间(Mean Time to Failure)直接从概率分布函数  $F(t)$  推导得出。当几个产品单元组合成一个系统时,这种分析方法也称为系统可靠分析法。

### 3. 本书范畴

本书的主要目的:

- (1) 描述和表达可靠性研究中的术语和主要模型;
- (2) 描述工程中的可靠性基本分析方法以及可靠性数据的分析技巧。

本书中所描述的方法适用于系统全生命周期的任何阶段,尤其是在设计阶段价值最大。对提高系统的可靠性有很大帮助。在进行系统的评估及提高系统维修性等方面本书同样具有一定的作用。

本书不是探讨如何建立一个可靠的系统,而是如何评价、测量及预测一个系统是否可靠。

### 4. 基本概念

作为本书最基本的概念,可靠性会同其他诸如质量、可达可用性、安全性、独立性等相关概念在下面给予详细描述。

可靠性(Reliability): 产品在规定时间规定条件下完成规定任务的概率(ISO8402 和英国标



准 BS4778)。用可靠度  $R(t)$  来表示。

质量:产品(或服务)完成既定需求的性能能力和特征(ISO8402)。

可以简单地理解为,质量可以认为是产品加工制造完成后性能能力的体现;而可靠性可以认为是产品性能能力的维持特性(质量在使用时间上的体现)。

可用性(Availability):规定时间内产品完成规定功能的综合能力(包括可靠性、维修性及维修设备等(ISO8402)。用可达可用度[记为  $A(t)$ ]来表示。平均可达可用度  $A_{av}(t)$  可以表示为

$$A_{av}(t) = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR} \quad (1.1)$$

式中:MTTF(Mean Time To Failure)为平均故障发生时间;MTTR(Mean Time To Repair)为平均修复时间,有时用MDT(Mean Down Time,平均停机时间)来代替MTTR。

维修性(Maintainability):规定条件下产品在规定时间内按照规定程序和方法进行维修时,保持或修复到完成规定功能的能力。

RAM(Reliability Availability Maintainability)作为系统整体的一种体现,已经广泛应用,比如RAM研究及RAM工程。

安全性(Safety):在规定条件下引起疾病、死亡等影响人生安全或产品本身损失的能力。

防护性(Security):预防预定攻击的能力。通常运用在信息和计算机系统。

可信性(Dependability):描述可达可用性性能及其影响因素(包括可靠性能、维修性能、维修辅助设备性能等)的综合指标(IEC60300)。

## 5. 应用范围

可靠性技术有很广泛的应用范围,举例如下:

(1)风险分析:定量风险分析(Quantitative Risk Analysis, QRA)的步骤如图 1.3 所示。

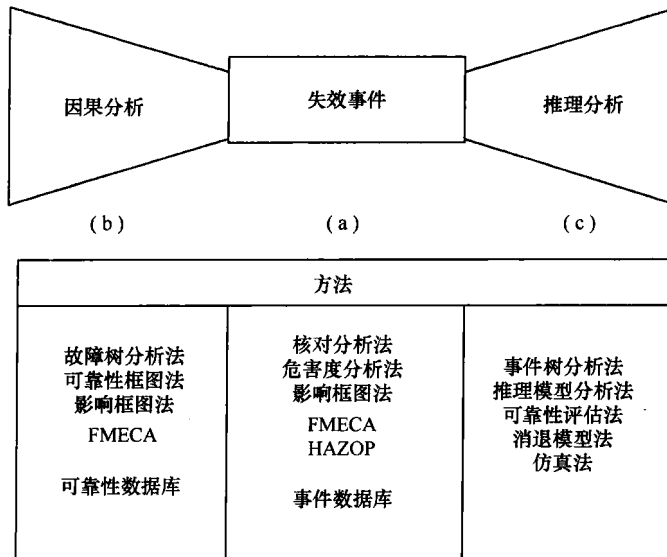


图 1.3 风险分析的主要步骤

(2)环境保护:可靠性技术可以用来设计自身防污染的设备设施,例如大气/水净化系统。许多企业已经逐渐认识到其产品对环境的危害,可靠性技术的应用将推动企业改善其产品的设计以保护环境。

(3)质量:质量管理及保证体系的建立随着 ISO9000 系列标准的强制执行而快速发展。

(4) 维修操作的优化:以可靠性为中心的维修(Reliability Center Maintenance, RCM)作为主要的工具来衡量、控制和提高整个维修过程的费效比。可靠性评估还可以应用在寿命周期费用(Life Cycle Cost, LCC)、寿命周期效益(Life Cycle Profit, LCP)、物流系统建立及其分配、空闲分系统再分配及人员等级评价分析等各个方面。

(5) 工程设计:可靠性是衡量产品性能的一个重要指标。可靠性评价及保证性分析可以用来对工程产品的设计提出指导性建议和意见。

(6) 质量可靠性的证明:许多官方实体要求产品的生产方提供其生产的产品的质量证明书。产品的可靠性分析和评价(如产品失效模式、影响及关键性分析(FMECA))能够对保证书中的一些要求提出具体的分析和解释。

## 6. 模型及其不确定性

在进行分析之前必须先建立数学模型,但是建立的数学模型没有必要、也不可能做到和实际情况完全一样。统计学界的前辈 Jerzy Neyman(1945)曾经阐述:“任何想用数学来研究实际现象的尝试必然从建立数学模型开始。当然,在建立模型的时候,一些细节问题在一定程度上将被忽略。细节忽略的多与少对实际现象研究的历史成功性来说影响不是很重要。数学模型的解答结果可能是对的,也可能完全和实际相反。这是由于忽略细节造成的。实际上,用一个数学模型来完全表达实际现象是不太可能的。有必要进一步进行一系列数学推演,并拿观察值进行比较修正。”

统计界的另外一个前辈 George E. P. Box 也指出:“没有一个数学模型是绝对正确的。但是,数学模型确实有好坏之分,好的比坏的用处要广。”

在进行系统可靠性研究过程中,系统数学模型的建立是必需的。这些模型可以是图表式,也可以是纯数学公式。用一些数据作为输入,数学模型将能得出系统的可靠性、安全性及风险参数。建立数学模型有两个相反方向的趋势:一方面,数学模型要尽量简单、方便,能用现有的数学、统计学工具进行进一步分析,推演;另一方面,数学模型要尽量复杂以便能够更为准确的反映实际情况,使得结果更加接近实际。在建立模型的时候只需要记住一点,无论数学模型复杂也好简单也罢,数学模型一定要在一定程度上符合实际。整个数学模型的解决分析流程及其不确定性如图 1.4 所示。在进行可靠性分析的数学模型推演前,首先要明确输入和输出。输入数据往往来自于以往数据库(将在 13 章进行讨论)。在使用可靠性数据库数据前,往往要进行必要的数据调整以适应数学模型。

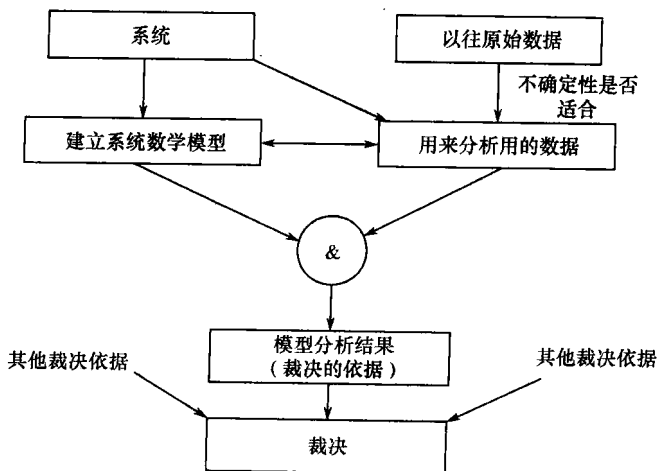


图 1.4 数学模型及其不确定性

整个可靠性分析过程需要但不仅仅限于以下内容:

(1) 丰富的技术知识做储备以及对要进行分析的系统的深入了解;

(2) 必要的数学/统计学知识(包括基本概念及常用方法);

(3) 如果考虑人的可靠性(人员作为系统的一个产品单元)的话,医学、心理学、社会学的一些观点及行为习惯等方面知识也需要了解;

(4) 数据必须可用于数学模型的复验;

(5) 若是分析非常复杂的系统可靠性,高性能计算机是必需的。

分析的边界条件:一般来讲,系统的可靠性分析是在一定的假设条件和边界条件下进行的。确定边界条件前必须先确定的几个问题:①要进行分析的系统中哪个部分要精确分析,而哪个部分不需要②分析的目标是什么?不同的目标可能导致不同的分析方法。③分析过程中用哪种系统界面?操作者和软件界面必须严格定义。④分析到哪个层次?有多么详细?⑤系统的哪个过程需要详细分析?启动阶段?稳态运行阶段?维修阶段?报废阶段?⑥系统的使用环境如何?⑦哪些系统外部影响需要考虑?地震?光照?蓄意破坏?

## 第 2 章 失效模型

### 2.1 引言

本章将主要介绍几种不可维修产品单元的定量可靠性分析方法。这里的“产品单元”可以是小到一个产品单元组件,也可以是大到一个系统的任何可独立计算产品单元。当产品单元为不可维修时,什么时候产品单元首次失效是个值得关注的问题。严格意义上的不可修复产品单元失效后将被报废;但是在实际当中,大部分产品单元失效后将被进行维修。在本章中暂时不关心产品单元首次失效后的事情。

首先将引入下面四个重要概念:

- (1) 可靠度函数  $R(t)$  (The Reliability (Survivor) Function);
- (2) 失效率函数  $z(t)$  (The Failure Rate Function);
- (3) 平均失效时间 MTTF (The Mean Time To Failure);
- (4) 平均剩余寿命 MRL (The Mean Residual Life)。

接下来将介绍几种概率分布形式以便以后计算分析用。

- (1) 指数分布
- (2) Gamma 分布
- (3) Weibull 分布
- (4) 正态分布(高斯分布)
- (5) 对数正态分布
- (6) Birnbaum - Saunders 分布
- (7) 反高斯分布

还将介绍三种离散分布形式:二项式分布、几何分布及 Poisson 分布。最后,对极值分布进行讨论,并对特定产品单元如何确定其不同应力水平下剩余寿命的分布形式进行总结。

### 2.2 状态变量

$t$  时刻产品单元的状态可以用状态变量  $X(t)$  来描述即

$$X(t) = \begin{cases} 1, & t \text{ 时刻单元正常工作} \\ 0, & t \text{ 时刻单元发生故障} \end{cases}$$

状态变量  $X(t)$  是个随机变量,如图 2.1 所示。

### 2.3 失效时间

失效时间定义为产品单元从开始工作到首次因产品单元发生故障而不工作的时间。若假设时间  $t=0$  为产品单元开始工作时间,显然,失效时间  $T$  为一个随机变量。失效时间  $T$  和状态变

量  $X(t)$  之间的关系如图 2.1 所示。

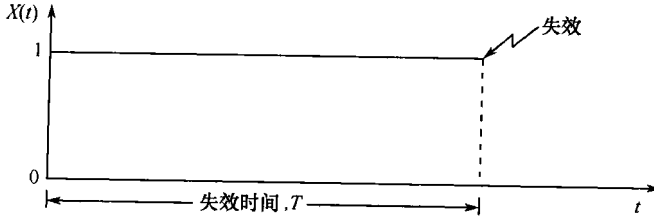


图 2.1 状态变量与失效时间

值得注意的是失效时间并不都指日历时间,也可以是一些非直接的时间描述,比如:开关动作的次数、汽车行驶的里程、轴承旋转的次数以及一个周期运作产品单元的工作周期次数等。可以看出,失效时间可以是离散变量,也可以是连续变量。除非特殊说明,在本书中的失效时间是连续变量,其概率密度函数为  $f(t)$ , 分布函数为

$$F(t) = \Pr(T \leq t) = \int_0^t f(u) du, t > 0 \quad (2.1)$$

则概率密度函数为

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr(t < T \leq t + \Delta t)}{\Delta t}$$

上式表明,当  $\Delta t$  很小时,  $\Pr(t < T \leq t + \Delta t) \approx f(t) \cdot \Delta t$ 。概率密度函数  $f(t)$  和分布函数  $F(t)$  的关系见图 2.2。

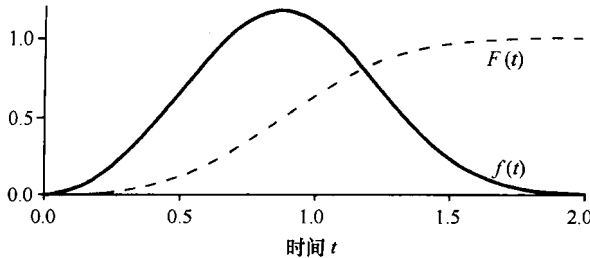


图 2.2 分布函数  $F(t)$  与概率密度函数  $f(t)$

## 2.4 可靠度函数

产品单元的可靠度函数为

$$R(t) = 1 - F(t) = \Pr(T > t), t > 0 \quad (2.2)$$

或

$$R(t) = 1 - \int_0^t f(u) du = \int_t^{\infty} f(u) du \quad (2.3)$$

因此,  $R(t)$  是产品单元在时间区间  $(0, t]$  内不失效的概率,换句话说,  $R(t)$  是产品单元在时间区间  $(0, t]$  内存活,在时刻  $t$  还在工作的概率。可靠度函数(或称为存活率函数)见图 2.3。

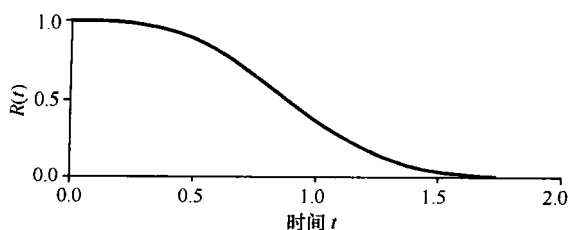


图 2.3 可靠度函数

## 2.5 失效率函数

产品单元在时刻  $t$  还在工作、在时间区间  $(t, t + \Delta t]$  内失效的概率为

$$\Pr(t < T \leq t + \Delta t | T > t) = \frac{\Pr(t < T \leq t + \Delta t)}{\Pr(T > t)} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)}$$

上式两边同除以  $\Delta t$ , 并令  $\Delta t \rightarrow 0$ , 取极限。则式左边为失效率函数  $z(t)$ , 即:

$$z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr(t < T < t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \frac{1}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (2.4)$$

当  $\Delta t$  很小时,  $\Pr(t < T \leq t + \Delta t | T > t) \approx z(t) \cdot \Delta t$ 。

注释: 注意失效率函数  $z(t)$  和概率密度函数  $f(t)$  的相似及不同, 则

$$\Pr(t < T \leq t + \Delta t) \approx f(t) \cdot \Delta t \quad (2.5)$$

$$\Pr(t < T \leq t + \Delta t | T > t) \approx z(t) \cdot \Delta t \quad (2.6)$$

当一个产品单元在时刻  $t=0$  时, 若问: 该产品单元在时间区间  $(t, t + \Delta t]$  内失效的概率是多少? 根据式(2.5)可知这一概率大约等于概率密度函数  $f(t)$  和时间区间  $\Delta t$  的乘积。当产品单元在时刻  $t$  还在工作, 若问: 在时间区间  $(t, t + \Delta t]$  内失效的概率是多少? 此时明显为条件概率, 根据式(2.6)可知这一概率大约等于失效率函数  $z(t)$  和时间区间  $\Delta t$  的乘积。

若在时刻  $t=0$  时系统有大量相同的产品单元工作,  $z(t) \Delta t$  则粗略地可用来表示有相当比例的产品单元在时刻  $t$  还在工作、在时间区间  $(t, t + \Delta t]$  内失效。由于

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} (1 - R(t)) = -R'(t)$$

有

$$z(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = -\frac{d}{dt} \ln R(t) \quad (2.7)$$

因为  $R(0) = 1$ , 所以

$$\int_0^t z(u) du = -\ln R(t) \quad (2.8)$$

和

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t z(u) du\right) \quad (2.9)$$

可以看出, 可靠度(存活度)函数  $R(t)$  和分布函数  $F(t) = 1 - R(t)$  是由失效率函数  $z(t)$  唯一

决定。从式(2.4)及式(2.9)可以看出概率密度函数

$$f(t) = z(t) \cdot \exp\left(-\int_0^t z(u) du\right), t > 0 \quad (2.10)$$

在精算统计学中失效率函数被称为死亡力(Force of Mortality, FOM)。这个词也被其他一些作者在书中所采用,以避免和可维修产品单元中的失效率函数(Failure Rate Function)及失效发生率(Rate of Occurrence of Failure, ROCOF)发生混淆。FOM为单个产品单元的寿命分布函数,表明了这一产品单元在 $t$ 时刻后“倾向于”失效;而ROCOF则是随机过程的失效发生率,详见第6章。另外一些学者(如Thompson, 1988)倾向于用危害率(Hazard Rate)来代替失效率。但是,失效率一词在可靠性工程中已经得到广泛应用,因此,本书中决定用失效率一词来代替FOM,尽管可能由此会产生一些概念混淆。

$F(t)$ 、 $f(t)$ 、 $R(t)$ 和 $z(t)$ 之间的关系如表2.1所列。

表 2.1  $F(t)$ 、 $f(t)$ 、 $R(t)$ 和 $z(t)$ 之间的关系表

表达式	$F(t)$	$f(t)$	$R(t)$	$z(t)$
$F(t)$	—	$\int_0^t f(u) du$	$1 - R(t)$	$1 - \exp\left(-\int_0^t z(u) du\right)$
$f(t)$	$\frac{d}{dt} F(t)$	—	$-\frac{d}{dt} R(t)$	$z(t) \cdot \exp\left(-\int_0^t z(u) du\right)$
$R(t)$	$1 - F(t)$	$\int_t^\infty f(u) du$	—	$\exp\left(-\int_0^t z(u) du\right)$
$z(t)$	$\frac{dF(t)/dt}{1 - F(t)}$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(u) du}$	$-\frac{d}{dt} \ln R(t)$	—

从式(2.9)可以看出可靠度函数 $R(t)$ 由失效率函数 $z(t)$ 唯一确定。如何确定失效率函数 $z(t)$ 有以下几条经验可作参考:

先把时间区间 $(0, t)$ 划分为 $i$ 个 $\Delta t$ 等份。当有产品单元在第 $i$ 个 $\Delta t$ 时间内失效时,用 $n(i)$ 记录失效产品单元的个数;用向量 $(T_{1i}, T_{2i}, \dots, T_{ni})$ 分别表示第1个产品单元在第 $i$ 个时间段内的工作时间、第2个产品单元在第 $i$ 个时间段内的工作时间、以至第 $n$ 个产品单元在第 $i$ 个时间段内的工作时间,则 $T_{ji}$ 可表示第 $j$ 个产品单元在第 $i$ 个时间段内的工作时间,其中 $j = 1, 2, \dots, n$ 。

那么 $\sum_{j=1}^n T_{ji}$ 就是所有产品单元在第 $i$ 个时间段内的工作时间。则有

$$z(i) = \frac{n(i)}{\sum_{j=1}^n T_{ji}}$$

上式可以理解为在第 $i$ 个时间段内每单位工作时间的产品单元失效个数等于产品单元在该时间段起始时正常工作而后在该时间段内失效的失效率自然估计值。

令 $m(i)$ 表示在该时间段起始时正常工作的产品单元个数,则有

$$z(i) \approx \frac{n(i)}{m(i) \Delta t}$$

$$z(i) \Delta t \approx \frac{n(i)}{m(i)}$$

图 2.4 为失效率函数  $z(i)$  的柱状图描述。当  $n$  值很大时,可以把时间区间缩小。当  $\Delta t \rightarrow 0$ ,失效率函数  $z(i)$  将趋近于一条光滑曲线,如图 2.5 所示,被称为浴盆曲线。失效率在初期一般都很高,这可以理解为早期缺陷所致。随着时间的推移,失效率下降,达到正常使用期,在这一阶段一般保持着恒定的失效率。随着时间的更进一步推移,失效率又变高,这个可以理解为进入了磨损期或者说寿命终结期。由此可以看出,失效率曲线大致由早期失效期、正常使用期、寿命终结期三个阶段组成。失效率的变化趋势为开始高,中间低,最后又高。

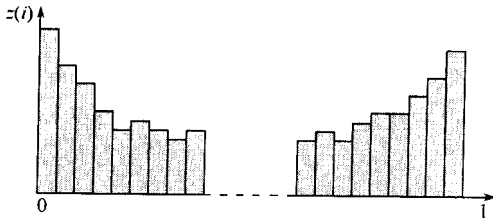


图 2.4 经验浴盆曲线柱状图

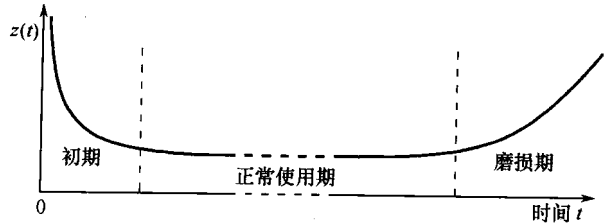


图 2.5 浴盆曲线

## 2.6 平均失效时间

平均失效时间 (Mean Time To Failure, MTTF, 或平均故障发生时间) 为

$$MTTF = E(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt \quad (2.11)$$

当故障产品单元的修理时间相对于 MTTF 非常短以至于可以忽略时, MTTF 可约等于平均故障间隔时间 (Mean Time Between Failure, MTBF)。当故障产品单元的修理时间不能忽略时, MTBF 还包含平均维修时间 (Mean Time to Repair, MTTR)。

由于  $f(t) = -R'(t)$ , 则有

$$MTTF = - \int_0^{\infty} t R'(t) dt$$

上式右边进行分部积分, 得

$$MTTF = - [tR(t)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} tR(t) dt$$

当  $MTTF < \infty$ , 可以得到  $[tR(t)]_0^{\infty} = 0$ , 此时

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (2.12)$$

可以看出计算 MTTF 用式 (2.12) 要比式 (2.11) 容易方便。

MTTF 还可以用拉普拉斯 (Laplace) 变换来推导, 可靠度函数  $R(t)$  的 Laplace 变换为

$$R^*(s) = \int_0^{\infty} R(t) e^{-st} dt \quad (2.13)$$

当  $s=0$  时, 有

$$R^*(0) = \int_0^{\infty} R(t) dt = MTTF \quad (2.14)$$



从式(2.14)可以看出,MTTF 等于 Laplace 变换形式(当  $s=0$  时)的可靠度函数。

MTTF 是寿命分布的平均值,只是寿命分布评价指标之一。下面介绍另一寿命分布的评价指标——中位寿命  $t_m$ 。定义如下:

$$R(t_m) = 0.50 \quad (2.15)$$

中位寿命  $t_m$  把寿命分布分为两部分。产品单元在  $t_m$  之前失效的概率和之后失效概率均是 50%。

模式寿命类似于失效时间,模式寿命  $t_{mode}$  定义为概率密度函数  $f(t)$  达到最大值时的时间。即

$$f(t_{mode}) = \max_{0 \leq t < \infty} f(t) \quad (2.16)$$

从图 2.6 可以看出 MTTF、 $t_m$ 、 $t_{mode}$  之间的关系。

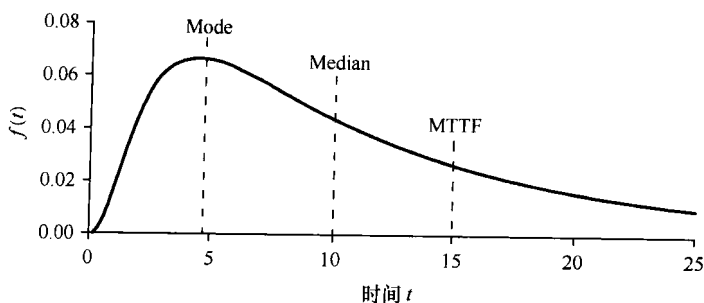


图 2.6 MTTF、 $t_m$ 、 $t_{mode}$  之间的关系图

**例 2.1** 一产品单元的可靠度函数为  $R(t) = \frac{1}{(0.2t+1)^2} (t > 0)$ , 其中时间  $t$  为以月计。则其概率密度函数为

$$f(t) = -R'(t) = \frac{0.4}{(0.2t+1)^3}$$

根据式(2.4)失效率函数为

$$z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{0.4}{0.2t+1}$$

根据式(2.12)有

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t) dt = 5 \text{ 月}$$

$R(t)$ 、 $z(t)$ 、 $f(t)$  之间的关系如图 2.7 所示。

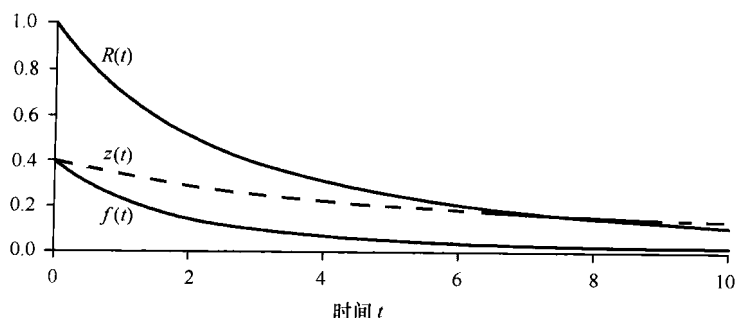


图 2.7  $R(t)$ 、 $z(t)$ 、 $f(t)$  之间的关系图