高等学校教材

高等数学

上册

江兆林 等编

南海出版公司

高等学校教材

高等数学

（上册）

主　编　江兆林　陶　洁　郭运瑞　申玉发
副主编　何一农　王永坤　金淑芝　解顺强
编　委　董　卫　刘梅亭　郭亚君

南海出版公司
1995年·海口

琼新登字 01 号

高等数学

作者	江兆林等编
责任编辑	李炳炎
装帧设计	何守信
出版发行	南海出版公司
经销	各地新华书店
印刷	费县第二印刷厂
开本	850×1168 毫米 32 开
印张	26.75 印张
字数	660 千字
版次	1995 年 9 月第 2 版
印次	1995 年 9 月第 1 次印刷
印数	3000 套
书号	ISBN7-80570-507-0/G・133
定价(上、下册)	23.80 元

目　　录

预备知识……………………………………………………………（1）
§0.1　集合论初步 ……………………………………………（1）
一、集合的描述(1)　二、两个集合之间的关系(3)　三、集合的运算(4)
§0.2　常用符号 ………………………………………………（5）
一、蕴含符号(6)　二、量词符号(6)　三、某些常用数学符号(6)
§0.3　实数集 …………………………………………………（7）
一、实数(7)　二、实数集的性质(8)
§0.4　区间与邻域 ……………………………………………（9）
一、区间(9)　二、邻域(10)
§0.5　常用不等式……………………………………………（11）
第一章　函数与极限 ………………………………………………（13）
§1.1　函数……………………………………………………（13）
一、函数实例(13)　二、函数概念(14)　三、几种具有特殊性质的函数(18)　四、函数的运算(21)　五、初等函数(25)　六、经济中常用的函数(30)　习题 1.1(34)
§1.2　数列与函数的极限……………………………………（36）
一、数列的极限(36)　二、函数的极限(40)　三、无穷小与无穷大(49)　四、函数极限的四则运算(54)　五、夹逼性定理(59)　六、两个重要极限(60)　七、无穷小量阶的比较(66)　习题 1.2(68)
§1.3　函数的连续性…………………………………………（70）
一、函数的连续性(71)　二、函数的间断点及其分类(74)　三、闭区间上连续函数的性质(77)　四、连续函数的运算(79)　五、初等函数的连续性(82)　习题 1.3(83)

复习题一 …………………………………………………… (84)

第二章 导数与微分 ………………………………………… (86)

§2.1 导数概念……………………………………………… (86)

一、变化率问题举例(86) 二、导数的定义(89) 三、导数的几何意义(91) 四、单侧导数(93) 五、可导与连续的关系(94) 习题 2.1 (94)

§2.2 求导法则……………………………………………… (95)

一、几个基本初等函数的导数公式(95) 二、导数的四则运算(97) 三、反函数的求导法则(100) 四、复合函数的求导法则(103) 五、基本导数公式表(106) 六、隐函数的导数(107) 七、参数方程所表示的函数的导数(109) 八、高阶导数(112) 习题 2.2(116)

§2.3 微分 ……………………………………………… (118)

一、微分的定义(118) 二、微分的几何意义(121) 三、微分法则与基本初等函数的微分公式(122) 四、一阶微分形式的不变性(123) 五、微分在近似计算中的应用(125) 习题 2.3(128)

复习题二……………………………………………………… (129)

第三章 中值定理与导数的应用……………………………… (132)

§3.1 中值定理 ……………………………………………… (132)

一、罗尔定理(132) 二、拉格朗日中值定理(134) 三、柯西中值定理(138) 习题 3.1(140)

§3.2 泰勒公式 ……………………………………………… (141)

习题 3.2(147)

§3.3 罗必达法则 …………………………………………… (147)

一、$\frac{0}{0}$型(148) 二、$\frac{\infty}{\infty}$型(151) 三、其它不定型(152) 习题 3.3 (155)

§3.4 函数的单调性与极值 ………………………………… (156)

一、函数单调性的判别法(156) 二、函数的极值(159) 三、最大值与最小值的求法(162) 习题 3.4(167)

§3.5 曲率 …………………………………………………… (168)

一、弧微分(168)　二、曲率(169)　习题 3.5(174)

§3.6　曲线的凹凸与函数作图 ……………………… (174)

一、曲线的凹凸性(174)　二、曲线的渐近线(178)　三、函数作图(180)　习题 3.6(183)

§3.7　导数在经济分析中的应用问题 ……………… (184)

一、最值问题(184)　二、边际分析(185)　三、弹性分析(188)　习题 3.7(192)

复习题三 ……………………………………………… (192)

第四章　不定积分 …………………………………… (195)

§4.1　原函数与不定积分 ……………………………… (195)

一、原函数与不定积分(195)　二、基本积分表(199)　三、不定积分的性质(200)　习题 4.1(205)

§4.2　换元积分法与分部积分法 …………………… (205)

一、换元积分法(206)　二、分部积分法(221)　三、某些不能用初等函数表示的积分(227)　习题 4.2(228)

§4.3　有理函数的积分 ……………………………… (229)

一、部分分式法(230)　二、有理函数的积分(233)　习题 4.3(238)

§4.4　三角函数有理式与简单无理函数的积分 …… (239)

一、三角函数有理式的积分(239)　二、某些无理函数的积分(242)　三、积分表的使用(247)　习题 4.4(249)

复习题四 ……………………………………………… (249)

第五章　定积分 ……………………………………… (252)

§5.1　定积分的概念和性质 ………………………… (252)

一、定积分的定义(252)　二、定积分的基本性质(257)　习题 5.1(261)

§5.2　定积分的基本定理 …………………………… (261)

一、变上限的定积分(261)　二、定积分基本定理(263)　习题 5.2(265)

§5.3　定积分的计算 ………………………………… (266)

一、换元积分法(266)　二、分部积分法(269)　习题 5.3(271)
§5.4　定积分的几何应用 ………………………………… (272)
一、微元分析法(272)　二、平面图形的面积(272)　三、立体的体积(275)　四、平面曲线的弧长(277)　习题 5.4(280)
§5.5　定积分的物理应用 ………………………………… (280)
一、变力做功问题(280)　二、静止流体的压力(282)　三、物质的质量(283)　四、重心(285)　五、刚体的转动惯量(288)　习题 5.5(289)
§5.6　定积分在经济中的应用 ……………………………… (290)
一、生产成本问题(290)　二、生产收益问题(291)　习题 5.6(292)
复习题五……………………………………………………… (293)
第六章　无穷级数……………………………………………… (295)
§6.1　常数项级数 ……………………………………… (295)
一、常数项级数(295)　二、无穷级数的基本性质(297)　三、级数收敛的必要条件(300)　四、正项级数的判别法(300)　五、任意项级数(306)　六*、一致收敛(309)　习题 6.1(313)
§6.2　广义积分 ………………………………………… (314)
一、无穷限广义积分(314)　二、无界函数的广义积分(320)　三*、Γ—函数与 B—函数(324)　习题 6.2(328)
§6.3　幂级数 …………………………………………… (329)
一、幂级数的概念及其收敛性(329)　二、幂级数在收敛区间上的性质(333)　三、函数展成幂级数(335)　四、幂级数在近似计算上的应用(341)　五、复变量的指数函数与尤拉公式(342)　习题 6.3(344)
§6.4　傅立叶级数 ……………………………………… (345)
一、傅立叶级数(345)　二、收敛定理(348)　三、奇函数和偶函数的傅立叶级数(353)　四、函数展成正弦级数或余弦级数(355)　五、以 $2l$ 为周期的函数的傅立叶级数(357)　习题 6.4(361)
复习题六……………………………………………………… (361)
第七章　微分方程简介………………………………………… (364)
§7.1　微分方程的基本概念 ……………………………… (364)

一、引例(364)　二、微分方程的基本概念(366)　习题 7.1(368)
§7.2　可分离变量的微分方程与齐次方程 …………(369)
一、可分离变量的方程(369)　二、齐次方程(375)　习题 7.2(381)
§7.3　一阶线性微分方程 ……………………………(382)
一、一阶线性微分方程及其解法(382)　二、伯努利方程及其解法(386)　习题 7.3(389)
§7.4*　全微分方程 ………………………………………(390)
一、全微分方程(390)　二、积分因子(393)　习题 7.4(395)
§7.5　可降阶的高阶微分方程 …………………………(395)
一、形如 $y^{(n)}=f(x)$的方程(396)　二、形如 $y^{(n)}=f(x,y^{(r)},y^{(r+1)},\cdots,y^{(n-1)})$的方程(397)　三、形如 $y^{(n)}=f(y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)})$的方程(400)　习题 7.5(402)
§7.6　二阶线性常微分方程 ……………………………(403)
一、高阶线性微分方程解的结构、常数变易法(403)　二、n 阶常系数齐次线性微分方程的解法(410)　三、n 阶常系数非齐次线性微分方程的解法(416)　四、二阶常系数线性方程应用举例(424)　习题 7.6(430)
复习题七……………………………………………………(431)
附表　积分表…………………………………………………(434)
习题答案……………………………………………………(448)

预备知识

§0.1 集合论初步

集合是现代数学中一个最基本的概念，数学的各个分支普遍地运用集合的方法和符号. 它正广泛地被应用到各个层次的数学之中，中学的数学介绍了集合的初步知识，高等数学的不同分支就是研究不同对象的集合及其运算. 集合论的语言正成为现代数学的基础理论.

一、集合的描述

1. 集合的定义

学习高等数学一开始就应熟悉集合概念，并逐渐养成用集合的一套语言来表述数学命题，集合论的奠基人德国数学家格奥尔格·康托(G·Cantor 1845～1918)在提出这个概念的时候，将“集合”看作我们的感觉或者思维中确定的个别对象的汇总，这一个一个的对象就称为该集合的“元素”

例 1　所有自然数组成一个集合

$$N=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

所有的有理数组成一个集合，记为 Q；所有的实数组成一个集合，记为 R. 前面三个例子中的元素都是数，相应的集合叫做数集. 事实上，集合这个概念是十分广泛的，元素不一定是数. 例如由张三、李四和王五组成一个代表团，就可以看作一个集合，此时张三作为代表团成员就是一个元素.

由康托对集合的描述和上述集合的实例，可以看出，通常把具有某种特定性质的对象的全体称为**集合**. 简称为**集**，其中每个对象称为集合的**元素**，如果集合中只有有限个元素，称该集合是**有限集**.

例 2 某教室内学生全体组成的集合，就是一个有限集合.

如果集合中有无限个元素，称该集合为**无限集合**. 例如，有理数集 Q 和实数集 R 都是无限集.

2. 集合的表示

人们习惯用大写英文字母 A、B、C、X、Y、… 表示集合；用小写英文字 a、b、c、x 、y、… 表示集合的元素. 但是规定用 N 表示自然数集，R 表示实数集.

假设 A 是一个集合，如果 a 是 A 的元素，称元素 a 属于集合 A，记为 $a \in A$. 如果 b 不是 A 的元素，称元素 b 不属于集合 A，记为 $b \overline{\in} A$ 或 $b \notin A$. 有时需要把集合 A 的元素所具有的共同性质明确的表示出来，这时采用符号

$$A = \{x | P(x)\}$$

来表示，这里"$P(x)$" 表示元素 x 所具有的性质 P. 上述符号的涵义就是集合 A 是具有性质 P 的所有元素 x 所组成的集合.

例 3 大于 3 的，所有实数组成一个集合可表示为

$$\{x | x > 3\}.$$

例 4 能被 5 整除的所有自然数组成的一个集合可表示为

$$\{m | m = 5n, n \in N\}.$$

如果集合中只有有限个元素，并易于一一列举 出来，就可用花括号将它们括起来. 例 由 1，2，3 三个自然数组成的一个集合可表示为

$$\{1, 2, 3\}.$$

3. 集合的性质

由前面对集合的描述可知，一个集合 A 中 的所有元素具有下

列三个性质：

性质 1（确定性） 集合 A 中的元素都是确定的或者分明的，对任意一个事物 a，能够判断 $a \in A$ 或 $a \overline{\in} A$，二者必具其一，不能模棱两可.

性质 2（互异性） 集合 A 中的所有元素，虽具有共同的特性，但又是互异的，于是，若集合 A 有两个（或多个）相同的元素，则把它们作为一个元素看待，如，集合

$\{1,2,1,3,2\}$ 与 $\{1,2,3\}$ 相同.

性质 3（无序性） 集合 A 的所有元素与它们的排列顺序无关. 如：

$\{1,2,3,4\}$ 与 $\{4,2,1,3\}$ 是同一个集合.

二、两个集合之间的关系

定义 1 若集合 A 的任意元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 是集合 B 的子集，或集合 B 包含集合 A. 简记为 $A \subset B$.

定义 2 若集合 B 包含集合 A，即 $A \subset B$，且集合 B 中至少有一个元素不属于 A，则称集合 A 是集合 B 的真子集，简记为 $A \subset B$，且 $A \neq B$.

例 5 设

$$A = \{x \mid x > 3\}, B = \{x \mid x > 1\},$$

显然，A 是 B 的子集，且是真子集，即 $A \subset B$ 且 $A \neq B$.

说明：(1) 对于任意集合 A，总有 $A \subset A$，即任意集合都是它自身的子集.

(2) 为了集合运算的需要，若集合 A 不包含任何元素，则称集合 A 是空集，简记为 $A = \varnothing$.

例 6

$$\{x \mid x \neq x\} = \varnothing,$$

$$\{x \mid x < 0 \text{ 且 } x > 0\} = \varnothing.$$

(3) 空集 $\varnothing$ 是任意集合 A 的子集，即 $\varnothing \subset A$.

(4) 集合 $\{0\}$ 不是空集，它是仅由一个元素 0 组成的集合.

定义 3 设 A 与 B 是两个集合，若 $A \subset B$ 同时 $B \subset A$，则称集合 A 与 B 相等，记为 $A = B$.

说明：证明两个集合 A 与 B 相等，要分两步进行，先证 A 的任意元素都属于 B. 即 $A \subset B$；其次证 B 的任意元素都属于 A，即 $B \subset A$.

例 7 已知：$A = \{x | 4 + c, c \in R\}$，$B = \{y | 2 + c, c \in R\}$，求证：$A = B$.

证 (1) 先证 $A \subset B$.

若 $x \in A$，则存在 $c_1 \in R$，使 $x = 4 + c_1$ 或 $x = 2 + (2 + c_1)$，因为 $2 + c_1 \in R$，所以 $x \in B$ 即 $A \subset B$.

(2) 同理可证，$B \subset A$. 由(1)、(2) 知 $A = B$.

三、集合的运算

定义 4 由集合 A 的元素和集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集或和集，记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

如图 0 — 1(a) 所示.

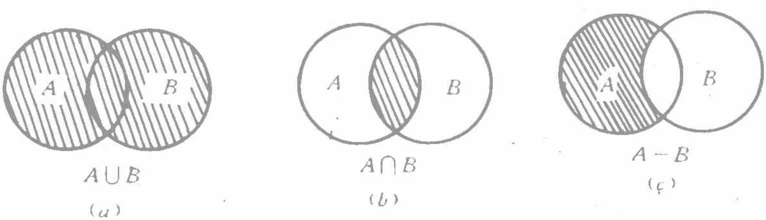

图 0 — 1

定义 5 由属于集合 A 的元素同时又属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的交集或乘集，记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

如图 0 — 1(b) 所示.

定义 6 由属于集合 A 的元素，但不属于集合 B 的元素组成

的集合，称为集合 A 与集合 B 的差集或集合 B 对集合 A 的余集，记为 $A-B$，即

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 但 } x\overline{\in} B\}$$

如图 0－1(c) 所示.

例 8 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则

(1) $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$； (2) $A\cap B=\{2,3,4\}$；

(3) $A-B=\{1\}$.

说明：进一步地，关于两个集合的并集或交集的定义可以推广到有限个集合和无限多个集合的并集或交集.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是无限多个集合

(1) 它们的并集记为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，即

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{x \mid \text{至少存在某一个自然数 } k,\text{有 } x\in A_k\}；$$

(2) 它们的交集记为 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x \mid \text{对任意自然数 } k,\text{有 } x\in A_k\}.$$

例 9 设 $A_n=\{x \mid -\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}\}$，$n=1,2,3,\cdots$，则

(1) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x \mid -\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}\}=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$；

(2) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{x \mid -\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}\}=\{0\}$.

§0.2 常用符号

高等数学的语言是由文字叙述和数学符号共同组成的. 一些专门符号在正文中将依次引入，另外还需要引入一些数理逻辑符号和常用的数学符号. 数学语言的符号化是现代数学发展的必然趋势，它的引入，既能使定义，定理的叙述和定理的证明过程简洁、

明确，易于读者理解、记忆，又能使高等数学的语言与现代数学的语言与现代数学的语言衔接贯通.

一、蕴含符号

1. 符号“$\Longrightarrow$”表示“蕴含”或“若 … 则 …”.

2. 符号“$\Longleftrightarrow$ 表示“充分必要”或“等价”.

说明：(1) 设 P 与 Q 表示两个陈述句. 则用“$\Longrightarrow$”的符号连接起来就是

$$P \Longrightarrow Q$$

表示 P 蕴含 Q，或若有 P 则有 Q.

用“$\Longleftrightarrow$”的符号连接起来，就是

$$P \Longleftrightarrow Q$$

表示 P 与 Q 等价，或 P 蕴含 $Q(P \Longrightarrow Q)$ 且 Q 蕴含 $P(Q \Longrightarrow P)$.

例如，等腰直角三角形 $\Longrightarrow$ 直角三角形.

等腰直角三角形 $\Longleftrightarrow$ 三角形有两个角都等于 $45°$.

(2) 命题 $P \Longrightarrow Q$ 与非 $Q \Longrightarrow$ 非 P 是等价的. 如果要证明命题 $P \Longrightarrow Q$ 为真，也可证明命题非 $Q \Longrightarrow$ 非 P 为真即可.

二、量词符号

1. 全称量词的符号是“$\forall$”，表示“对任意的”或“对任一的”.

2. 存在量词的符号是“$\exists$”，表示“存在”或“能找到”.

例如，$A \subset B$，即集合 A 是集合 B 的子集，也就是，集合 A 的任意元素 x 都是集合 B 的元素，用符号表示为

$$A \subset B \Longleftrightarrow \forall\, x \in A \Longrightarrow x \in B.$$

$A = B$ 用符号表示为

$$A = B \Longleftrightarrow \forall\, x \in A \Longrightarrow x \in B \text{ 且 } \forall\, x \in B \Longrightarrow x \in A.$$

三、某些常用数学符号

1. 阶乘符号

设 n 是自然数，符号“$n!$”读作“n 的阶乘”，表示不超过 n 的所有自然数的连乘积，如：

$$3! = 3 \times 2 \times 1.$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1.$$

为了运算上方便，规定 $0! = 1$.

2. 双阶乘符号

设 n 是自然数，符号“$n!!$”读作“n 的双阶乘”，表示不超过 n 并与 n 有相同奇偶性的自然数的连乘积，如：

$$6!! = 6 \times 4 \times 2,$$

$$7!! = 7 \times 5 \times 3 \times 1.$$

说明：$n!!$ 不是 $(n!)!$.

3. 最大(小)数的符号

符号“max”是英文 maximun 的缩写，读作“最大”.

符号“min”是英文 mininum 的缩写，读作“最小”.

$\max\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$，表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这 n 个数中的最大者.

$\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这 n 个数中的最小者，如：

$$\max\{5, 7, 3, 2\} = 7.$$

$$\min\{5, 7, 3, 2\} = 2.$$

§0.3 实数集

高等数学中主要研究实数范围内的函数，因此，先介绍有关实数的一些属性.

一、实数

定义 1　具有如下性质：(1) 1 是自然数；(2) 若 n 是自然数，则 $n+1$ 也是自然数，即任意一个自然数 n 都有一个相邻的后继数 $n+1$ 的数的全体称为自然数集，记为 N.

说明：(1) N 是无限数集；

(2) 按由小到大的顺序排列，N 是有序集.

定义 2 自然数集，自然数相反数的数集和$\{0\}$的并集，称为整数集，记为 z，即

$$z = N \cup \{-n | n \in N\} \cup \{0\}.$$

定义 3 设 $m \in N$，且 $m \neq 1$，若 N 中除 1 和 m 外，m 没有其它的因数，称 m 是素数或质数.

定义 4 设 p、$q \in z$ 若 z 中除 1 和 -1 外，p 与 q 没有公因数，称 p 与 q 是互素数或互质数，记为$(p,q) = 1$.

定义 5 设 m、$n \in z$，且 $n \neq 0$，形如 $m \cdot n^{-1} = \frac{m}{n}$ 的数称为有理数，或任意有限小数和无限循环小数为有理数，所有的有理数组成有理数集，记为 Q，即

$$Q = \{ \frac{m}{n} | \forall\ m、n \in z, n \neq 0\}.$$

说明：(1) 有理数集 Q 是有序集；(2) 有理数集 Q 较整数集 z 多了一个性质 —— 稠密性，即任意两个不同的有理数之间存在无限多个有理数.

定义 6 无限非循环小数称为无理数，所有的无理数组成无理数集，记为 I.

定义 7 有理数集 Q 与无理数集 I 的并集称为实数集，记为 R，即

$$R = Q \cup I.$$

二、实数集的性质

(1) 实数是有序的，即任意两个实数 a、b 必须满足下述三个关系之一.

$$a < b, a = b, a > b,$$

(2) 实数对加、减、乘、除(除数不为 0) 四则运算是封闭的，即对任意两个实数施行加、减、乘、除运算后仍是实数；

(3) 实数具有稠密性，即任意两个不相等的实数之间既有有