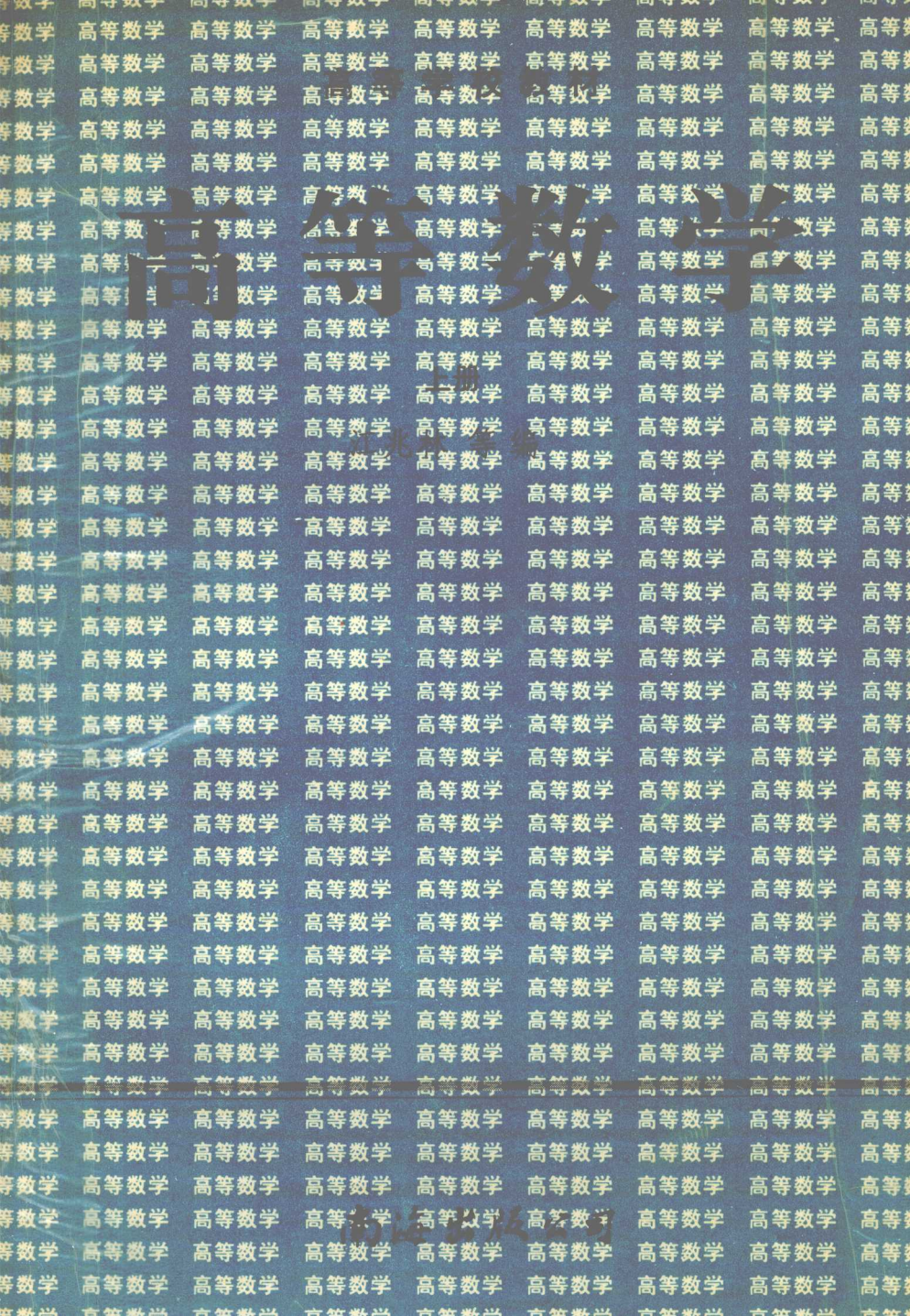




1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230
231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290
291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310
311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330
331	332	333	334	335	336	337	338	339	340
341	342	343	344	345	346	347	348	349	350
351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
381	382	383	384	385	386	387	388	389	390
391	392	393	394	395	396	397	398	399	400
401	402	403	404	405	406	407	408	409	410
411	412	413	414	415	416	417	418	419	420
421	422	423	424	425	426	427	428	429	430
431	432	433	434	435	436	437	438	439	440
441	442	443	444	445	446	447	448	449	450
451	452	453	454	455	456	457	458	459	460
461	462	463	464	465	466	467	468	469	470
471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
501	502	503	504	505	506	507	508	509	510
511	512	513	514	515	516	517	518	519	520
521	522	523	524	525	526	527	528	529	530
531	532	533	534	535	536	537	538	539	540
541	542	543	544	545	546	547	548	549	550
551	552	553	554	555	556	557	558	559	560
561	562	563	564	565	566	567	568	569	570
571	572	573	574	575	576	577	578	579	580
581	582	583	584	585	586	587	588	589	590
591	592	593	594	595	596	597	598	599	600
601	602	603	604	605	606	607	608	609	610
611	612	613	614	615	616	617	618	619	620
621	622	623	624	625	626	627	628	629	630
631	632	633	634	635	636	637	638	639	640
641	642	643	644	645	646	647	648	649	650
651	652	653	654	655	656	657	658	659	660
661	662	663	664	665	666	667	668	669	670
671	672	673	674	675	676	677	678	679	680
681	682	683	684	685	686	687	688	689	690
691	692	693	694	695	696	697	698	699	700
701	702	703	704	705	706	707	708	709	710
711	712	713	714	715	716	717	718	719	720
721	722	723	724	725	726	727	728	729	730
731	732	733	734	735	736	737	738	739	740
741	742	743	744	745	746	747	748	749	750
751	752	753	754	755	756	757	758	759	760
761	762	763	764	765	766	767	768	769	770
771	772	773	774	775	776	777	778	779	780
781	782	783	784	785	786	787	788	789	790
791	792	793	794	795	796	797	798	799	800
801	802	803	804	805	806	807	808	809	810
811	812	813	814	815	816	817	818	819	820
821	822	823	824	825	826	827	828	829	830
831	832	833	834	835	836	837	838	839	840
841	842	843	844	845	846	847	848	849	850
851	852	853	854	855	856	857	858	859	860
861	862	863	864	865	866	867	868	869	870
871	872	873	874	875	876	877	878	879	880
881	882	883	884	885	886	887	888	889	890
891	892	893	894	895	896	897	898	899	900
901	902	903	904	905	906	907	908	909	910
911	912	913	914	915	916	917	918	919	920
921	922	923	924	925	926	927	928	929	930
931	932	933	934	935	936	937	938	939	940
941	942	943	944	945	946	947	948	949	950
951	952	953	954	955	956	957	958	959	960
961	962	963	964	965	966	967	968	969	970
971	972	973	974	975	976	977	978	979	980
981	982	983	984	985	986	987	988	989	990
991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000

高等学校教材

高等数学

(上册)

主 编	江兆林	陶 洁	郭运瑞	申玉发
副主编	何一农	王永坤	金淑芝	解顺强
编 委	董 卫	刘梅亭	郭亚君	

南海出版公司

1995年·海口

琼新登字 01 号



高等数学

作者	江兆林等编
责任编辑	李炳炎
装帧设计	何守信
出版发行	南海出版公司
经销	各地新华书店
印刷	费县第二印刷厂
开本	850×1168 毫米 32 开
印张	26.75 印张
字数	660 千字
版次	1995 年 9 月第 2 版
印次	1995 年 9 月第 1 次印刷
印数	3000 套
书号	ISBN7-80570-507-0/G · 133
定价(上、下册)	23.80 元

(版权所有·盗印必究)

目 录

预备知识	(1)
§ 0.1 集合论初步	(1)
一、集合的描述(1) 二、两个集合之间的关系(3) 三、集合的运算(4)	
§ 0.2 常用符号	(5)
一、蕴含符号(6) 二、量词符号(6) 三、某些常用数学符号(6)	
§ 0.3 实数集	(7)
一、实数(7) 二、实数集的性质(8)	
§ 0.4 区间与邻域	(9)
一、区间(9) 二、邻域(10)	
§ 0.5 常用不等式	(11)
第一章 函数与极限	(13)
§ 1.1 函数	(13)
一、函数实例(13) 二、函数概念(14) 三、几种具有特殊性质的函数(18) 四、函数的运算(21) 五、初等函数(25) 六、经济中常用的函数(30) 习题 1.1(34)	
§ 1.2 数列与函数的极限	(36)
一、数列的极限(36) 二、函数的极限(40) 三、无穷小与无穷大(49) 四、函数极限的四则运算(54) 五、夹逼性定理(59) 六、两个重要极限(60) 七、无穷小量阶的比较(66) 习题 1.2(68)	
§ 1.3 函数的连续性	(70)
一、函数的连续性(71) 二、函数的间断点及其分类(74) 三、闭区间上连续函数的性质(77) 四、连续函数的运算(79) 五、初等函数的连续性(82) 习题 1.3(83)	

复习题一	(84)
第二章 导数与微分	(86)
§ 2.1 导数概念	(86)
一、变化率问题举例(86) 二、导数的定义(89) 三、导数的几何意义(91) 四、单侧导数(93) 五、可导与连续的关系(94) 习题 2.1 (94)	
§ 2.2 求导法则	(95)
一、几个基本初等函数的导数公式(95) 二、导数的四则运算(97) 三、反函数的求导法则(100) 四、复合函数的求导法则(103) 五、基本导数公式表(106) 六、隐函数的导数(107) 七、参数方程所表示的函数的导数(109) 八、高阶导数(112) 习题 2.2(116)	
§ 2.3 微分	(118)
一、微分的定义(118) 二、微分的几何意义(121) 三、微分法则与基本初等函数的微分公式(122) 四、一阶微分形式的不变性(123) 五、微分在近似计算中的应用(125) 习题 2.3(128)	
复习题二	(129)
第三章 中值定理与导数的应用	(132)
§ 3.1 中值定理	(132)
一、罗尔定理(132) 二、拉格朗日中值定理(134) 三、柯西中值定理(138) 习题 3.1(140)	
§ 3.2 泰勒公式	(141)
习题 3.2(147)	
§ 3.3 罗必达法则	(147)
一、 $\frac{0}{0}$ 型(148) 二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型(151) 三、其它不定型(152) 习题 3.3 (155)	
§ 3.4 函数的单调性与极值	(156)
一、函数单调性的判别法(156) 二、函数的极值(159) 三、最大值与最小值的求法(162) 习题 3.4(167)	
§ 3.5 曲率	(168)

一、弧微分(168) 二、曲率(169) 习题 3.5(174)	
§ 3.6 曲线的凹凸与函数作图	(174)
一、曲线的凹凸性(174) 二、曲线的渐近线(178) 三、函数作图(180) 习题 3.6(183)	
§ 3.7 导数在经济分析中的应用问题	(184)
一、最值问题(184) 二、边际分析(185) 三、弹性分析(188) 习题 3.7(192)	
复习题三	(192)
第四章 不定积分	(195)
§ 4.1 原函数与不定积分	(195)
一、原函数与不定积分(195) 二、基本积分表(199) 三、不定积分的性质(200) 习题 4.1(205)	
§ 4.2 换元积分法与分部积分法	(205)
一、换元积分法(206) 二、分部积分法(221) 三、某些不能用初等函数表示的积分(227) 习题 4.2(228)	
§ 4.3 有理函数的积分	(229)
一、部分分式法(230) 二、有理函数的积分(233) 习题 4.3(238)	
§ 4.4 三角函数有理式与简单无理函数的积分	(239)
一、三角函数有理式的积分(239) 二、某些无理函数的积分(242) 三、积分表的使用(247) 习题 4.4(249)	
复习题四	(249)
第五章 定积分	(252)
§ 5.1 定积分的概念和性质	(252)
一、定积分的定义(252) 二、定积分的基本性质(257) 习题 5.1(261)	
§ 5.2 定积分的基本定理	(261)
一、变上限的定积分(261) 二、定积分基本定理(263) 习题 5.2(265)	
§ 5.3 定积分的计算	(266)

一、换元积分法(266)	二、分部积分法(269)	习题 5.3(271)
§ 5.4 定积分的几何应用	(272)	
一、微元分析法(272)	二、平面图形的面积(272)	三、立体的体积(275)
四、平面曲线的弧长(277)	习题 5.4(280)	
§ 5.5 定积分的物理应用	(280)	
一、变力做功问题(280)	二、静止流体的压力(282)	三、物质的质量(283)
四、重心(285)	五、刚体的转动惯量(288)	习题 5.5(289)
§ 5.6 定积分在经济中的应用	(290)	
一、生产成本问题(290)	二、生产收益问题(291)	习题 5.6(292)
复习题五	(293)	
第六章 无穷级数	(295)	
§ 6.1 常数项级数	(295)	
一、常数项级数(295)	二、无穷级数的基本性质(297)	三、级数收敛的必要条件(300)
四、正项级数的判别法(300)	五、任意项级数(306)	六、一致收敛(309)
习题 6.1(313)		
§ 6.2 广义积分	(314)	
一、无穷限广义积分(314)	二、无界函数的广义积分(320)	三、 Γ -函数与 B -函数(324)
习题 6.2(328)		
§ 6.3 幂级数	(329)	
一、幂级数的概念及其收敛性(329)	二、幂级数在收敛区间上的性质(333)	三、函数展成幂级数(335)
四、幂级数在近似计算上的应用(341)	五、复变量的指数函数与尤拉公式(342)	习题 6.3(344)
§ 6.4 傅立叶级数	(345)	
一、傅立叶级数(345)	二、收敛定理(348)	三、奇函数和偶函数的傅立叶级数(353)
四、函数展成正弦级数或余弦级数(355)	五、以 $2l$ 为周期的函数的傅立叶级数(357)	习题 6.4(361)
复习题六	(361)	
第七章 微分方程简介	(364)	
§ 7.1 微分方程的基本概念	(364)	

一、引例(364) 二、微分方程的基本概念(366) 习题 7.1(368)	
§ 7.2 可分离变量的微分方程与齐次方程	(369)
一、可分离变量的方程(369) 二、齐次方程(375) 习题 7.2(381)	
§ 7.3 一阶线性微分方程	(382)
一、一阶线性微分方程及其解法(382) 二、伯努利方程及其解法(386) 习题 7.3(389)	
§ 7.4* 全微分方程	(390)
一、全微分方程(390) 二、积分因子(393) 习题 7.4(395)	
§ 7.5 可降阶的高阶微分方程	(395)
一、形如 $y^{(n)}=f(x)$ 的方程(396) 二、形如 $y^{(n)}=f(x, y^{(r)}, y^{(r+1)}, \dots, y^{(n-1)})$ 的方程(397) 三、形如 $y^{(n)}=f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ 的方程(400) 习题 7.5(402)	
§ 7.6 二阶线性常微分方程	(403)
一、高阶线性微分方程解的结构、常数变易法(403) 二、 n 阶常系数齐次线性微分方程的解法(410) 三、 n 阶常系数非齐次线性微分方程的解法(416) 四、二阶常系数线性方程应用举例(424) 习题 7.6(430)	
复习题七	(431)
附表 积分表	(434)
习题答案	(448)

预备知识

§ 0.1 集合论初步

集合是现代数学中一个最基本的概念,数学的各个分支普遍地运用集合的方法和符号.它正广泛地被应用到各个层次的数学之中,中学的数学介绍了集合的初步知识,高等数学的不同分支就是研究不同对象的集合及其运算.集合论的语言正成为现代数学的基础理论.

一、集合的描述

1. 集合的定义

学习高等数学一开始就应熟悉集合概念,并逐渐养成用集合的一套语言来表述数学命题,集合论的奠基人德国数学家格奥尔格·康托(G·Cantor 1845~1918)在提出这个概念的时候,将“集合”看作我们的感觉或者思维中确定的个别对象的汇总,这一个一个的对象就称为该集合的“元素”

例1 所有自然数组成一个集合

$$N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$$

所有的有理数组成一个集合,记为 Q ;所有的实数组成一个集合,记为 R .前面三个例子中的元素都是数,相应的集合叫做数集.事实上,集合这个概念是十分广泛的,元素不一定是数.例如由张三、李四和王五组成一个代表团,就可以看作一个集合,此时张三作为代表团成员就是一个元素.

由康托对集合的描述和上述集合的实例,可以看出,通常把具有某种特定性质的对象的全体称为集合.简称为集,其中每个对象称为集合的元素,如果集合中只有有限个元素,称该集合是有限集.

例2 某教室内学生全体组成的集合,就是一个有限集合.

如果集合中有无限个元素,称该集合为无限集合,例如,有理数集 Q 和实数集 R 都是无限集.

2. 集合的表示

人们习惯用大写英文字母 $A, B, C, X, Y, \dots$ 表示集合;用小写英文字母 $a, b, c, x, y, \dots$ 表示集合的元素.但是规定用 N 表示自然数集, R 表示实数集.

假设 A 是一个集合,如果 a 是 A 的元素,称元素 a 属于集合 A ,记为 $a \in A$.如果 b 不是 A 的元素,称元素 b 不属于集合 A ,记为 $b \notin A$ 或 $b \notin A$.有时需要把集合 A 的元素所具有的共同性质明确的表示出来,这时采用符号

$$A = \{x | P(x)\}$$

来表示,这里“ $P(x)$ ”表示元素 x 所具有的性质 P .上述符号的涵义就是集合 A 是具有性质 P 的所有元素 x 所组成的集合.

例3 大于3的,所有实数组成一个集合可表示为

$$\{x | x > 3\}.$$

例4 能被5整除的所有自然数组成的一个集合可表示为

$$\{m | m = 5n, n \in N\}.$$

如果集合中只有有限个元素,并易于一一列举出来,就可用花括号将它们括起来.例 由1,2,3三个自然数组成的一个集合可表示为

$$\{1, 2, 3\}.$$

3. 集合的性质

由前面对集合的描述可知,一个集合 A 中的所有元素具有下

列三个性质:

性质 1(确定性) 集合 A 中的元素都是确定的或者分明的,对任意一个事物 a ,能够判断 $a \in A$ 或 $a \notin A$,二者必具其一,不能模棱两可.

性质 2(互异性) 集合 A 中的所有元素,虽具有共同的特性,但又是互异的,于是,若集合 A 有两个(或多个)相同的元素,则把它们作为一个元素看待,如,集合

$\{1,2,1,3,2\}$ 与 $\{1,2,3\}$ 相同.

性质 3(无序性) 集合 A 的所有元素与它们的排列顺序无关.如:

$\{1,2,3,4\}$ 与 $\{4,2,1,3\}$ 是同一个集合.

二、两个集合之间的关系

定义 1 若集合 A 的任意元素都是集合 B 的元素,则称集合 A 是集合 B 的子集,或集合 B 包含集合 A . 简记为 $A \subset B$.

定义 2 若集合 B 包含集合 A ,即 $A \subset B$,且集合 B 中至少有一个元素不属于 A ,则称集合 A 是集合 B 的真子集,简记为 $A \subset B$,且 $A \neq B$.

例 5 设

$$A = \{x | x > 3\}, B = \{x | x > 1\},$$

显然, A 是 B 的子集,且是真子集,即 $A \subset B$ 且 $A \neq B$.

说明: (1) 对于任意集合 A , 总有 $A \subset A$, 即任意集合都是它自身的子集.

(2) 为了集合运算的需要, 若集合 A 不包含任何元素, 则称集合 A 是空集, 简记为 $A = \emptyset$.

例 6 $\{x | x \neq x\} = \emptyset$,
 $\{x | x < 0 \text{ 且 } x > 0\} = \emptyset$.

(3) 空集 $\emptyset$ 是任意集合 A 的子集, 即 $\emptyset \subset A$.

(4) 集合 $\{0\}$ 不是空集, 它是仅由一个元素 0 组成的集合.

定义 3 设 A 与 B 是两个集合, 若 $A \subset B$ 同时 $B \subset A$, 则称集合 A 与 B 相等, 记为 $A = B$.

说明: 证明两个集合 A 与 B 相等, 要分两步进行, 先证 A 的任意元素都属于 B , 即 $A \subset B$; 其次证 B 的任意元素都属于 A , 即 $B \subset A$.

例 7 已知: $A = \{x | 4 + c, c \in R\}$, $B = \{y | 2 + c, c \in R\}$, 求证: $A = B$.

证 (1) 先证 $A \subset B$.

若 $x \in A$, 则存在 $c_1 \in R$, 使 $x = 4 + c_1$ 或 $x = 2 + (2 + c_1)$, 因为 $2 + c_1 \in R$, 所以 $x \in B$ 即 $A \subset B$.

(2) 同理可证, $B \subset A$. 由 (1)、(2) 知 $A = B$.

三、集合的运算

定义 4 由集合 A 的元素和集合 B 的元素组成的集合, 称为集合 A 与 B 的并集或和集, 记为 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

如图 0-1(a) 所示.

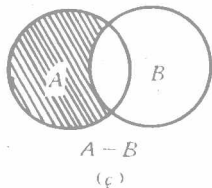
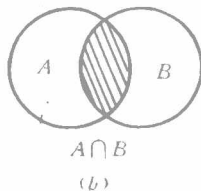
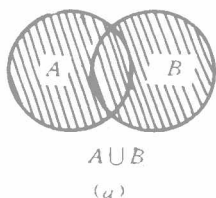


图 0-1

定义 5 由属于集合 A 的元素同时又属于集合 B 的元素组成的集合, 称为集合 A 与 B 的交集或乘集, 记为 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

如图 0-1(b) 所示.

定义 6 由属于集合 A 的元素, 但不属于集合 B 的元素组成

的集合,称为集合 A 与集合 B 的差集或集合 B 对集合 A 的余集,记为 $A - B$,即

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$$

如图 0-1(c) 所示.

例 8 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则

(1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; (2) $A \cap B = \{2, 3, 4\}$;

(3) $A - B = \{1\}$.

说明:进一步地,关于两个集合的并集或交集的定义可以推广到有限个集合和无限多个集合的并集或交集.

设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是无限多个集合

(1) 它们的并集记为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 即

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x | \text{至少存在某一个自然数 } k, \text{ 有 } x \in A_k\};$$

(2) 它们的交集记为 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x | \text{对任意自然数 } k, \text{ 有 } x \in A_k\}.$$

例 9 设 $A_n = \{x | -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}\}, n = 1, 2, 3, \dots$, 则

$$(1) \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x | -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}\} = \{x | -1 \leq x \leq 1\};$$

$$(2) \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x | -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}\} = \{0\}.$$

§ 0.2 常用符号

高等数学的语言是由文字叙述和数学符号共同组成的. 一些专门符号在正文中将依次引入, 另外还需要引入一些数理逻辑符号和常用的数学符号. 数学语言的符号化是现代数学发展的必然趋势, 它的引入, 既能使定义, 定理的叙述和定理的证明过程简洁、

明确,易于读者理解、记忆,又能使高等数学的语言与现代数学的语言与现代数学的语言衔接贯通.

一、蕴含符号

1. 符号“ $\Rightarrow$ ”表示“蕴含”或“若…则…”.

2. 符号“ $\Leftrightarrow$ ”表示“充分必要”或“等价”.

说明:(1) 设 P 与 Q 表示两个陈述句. 则用“ $\Rightarrow$ ”的符号连接起来就是

$$P \Rightarrow Q$$

表示 P 蕴含 Q , 或若有 P 则有 Q .

用“ $\Leftrightarrow$ ”的符号连接起来, 就是

$$P \Leftrightarrow Q$$

表示 P 与 Q 等价, 或 P 蕴含 $Q(P \Rightarrow Q)$ 且 Q 蕴含 $P(Q \Rightarrow P)$.

例如, 等腰直角三角形 $\Rightarrow$ 直角三角形.

等腰直角三角形 $\Leftrightarrow$ 三角形有两个角都等于 45° .

(2) 命题 $P \Rightarrow Q$ 与非 $Q \Rightarrow$ 非 P 是等价的. 如果要证明命题 $P \Rightarrow Q$ 为真, 也可证明命题非 $Q \Rightarrow$ 非 P 为真即可.

二、量词符号

1. 全称量词的符号是“ $\forall$ ”, 表示“对任意的”或“对任一的”.

2. 存在量词的符号是“ $\exists$ ”, 表示“存在”或“能找到”.

例如, $A \subset B$, 即集合 A 是集合 B 的子集, 也就是, 集合 A 的任意元素 x 都是集合 B 的元素, 用符号表示为

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B.$$

$A = B$ 用符号表示为

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B \text{ 且 } \forall x \in B \Rightarrow x \in A.$$

三、某些常用数学符号

1. 阶乘符号

设 n 是自然数, 符号“ $n!$ ”读作“ n 的阶乘”, 表示不超过 n 的所有自然数的连乘积, 如:

$$3! = 3 \times 2 \times 1.$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1.$$

为了运算上方便,规定 $0! = 1$.

2. 双阶乘符号

设 n 是自然数,符号“ $n!!$ ”读作“ n 的双阶乘”,表示不超过 n 并与 n 有相同奇偶性的自然数的连乘积,如:

$$6!! = 6 \times 4 \times 2,$$

$$7!! = 7 \times 5 \times 3 \times 1.$$

说明: $n!!$ 不是 $(n!)!$.

3. 最大(小)数的符号

符号“max”是英文 maximun 的缩写,读作“最大”.

符号“min”是英文 mininum 的缩写,读作“最小”.

$\max\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, 表示 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 这 n 个数中的最大者.

$\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 表示 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 这 n 个数中的最小者, 如:

$$\max\{5, 7, 3, 2\} = 7.$$

$$\min\{5, 7, 3, 2\} = 2.$$

§ 0.3 实数集

高等数学中主要研究实数范围内的函数,因此,先介绍有关实数的一些属性.

一、实数

定义1 具有如下性质:(1)1是自然数;(2)若 n 是自然数,则 $n+1$ 也是自然数,即任意一个自然数 n 都有一个相邻的后继数 $n+1$ 的数的全体称为自然数集,记为 N .

说明:(1) N 是无限数集;

(2) 按由小到大的顺序排列, N 是有序集.

定义 2 自然数集, 自然数相反数的数集和 $\{0\}$ 的并集, 称为整数集, 记为 z , 即

$$z = N \cup \{-n | n \in N\} \cup \{0\}.$$

定义 3 设 $m \in N$, 且 $m \neq 1$, 若 N 中除 1 和 m 外, m 没有其它的因数, 称 m 是素数或质数.

定义 4 设 $p, q \in z$ 若 z 中除 1 和 -1 外, p 与 q 没有公因数, 称 p 与 q 是互素数或互质数, 记为 $(p, q) = 1$.

定义 5 设 $m, n \in z$, 且 $n \neq 0$, 形如 $m \cdot n^{-1} = \frac{m}{n}$ 的数称为有理数, 或任意有限小数和无限循环小数为有理数, 所有的有理数组成有理数集, 记为 Q , 即

$$Q = \{ \frac{m}{n} | \forall m, n \in z, n \neq 0 \}.$$

说明: (1) 有理数集 Q 是有序集; (2) 有理数集 Q 较整数集 z 多了一个性质——稠密性, 即任意两个不同的有理数之间存在无限多个有理数.

定义 6 无限非循环小数称为无理数, 所有的无理数组成无理数集, 记为 I .

定义 7 有理数集 Q 与无理数集 I 的并集称为实数集, 记为 R , 即

$$R = Q \cup I.$$

二、实数集的性质

(1) 实数是有序的, 即任意两个实数 a, b 必须满足下述三个关系之一.

$$a < b, a = b, a > b,$$

(2) 实数对加、减、乘、除(除数不为 0) 四则运算是封闭的, 即对任意两个实数施行加、减、乘、除运算后仍是实数;

(3) 实数具有稠密性, 即任意两个不相等的实数之间既有有