普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套辅导

线性代数
学习指导

孟昭为 赵文玲 孙锦萍 主编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"国家级规划教材配套辅导

线性代数学习指导

孟昭为　赵文玲　孙锦萍　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书为普通高等教育“十一五”国家级规划教材《线性代数(第二版)》(孟昭为等,科学出版社)的配套辅导教材,对相应的章节给出基本要求、内容提要、典型例题解析,对课后部分习题进行了解答,并加以自测题. 对2003～2009年的研究生试题(线性代数部分)作了详细解答. 书后还附有自测题参考答案.

本书可作为高等学校理工科非数学类专业本科生的教学参考书,也可供科学研究与工程技术人员学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/孟昭为,赵文玲,孙锦萍主编. —北京:科学出版社,2010

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套辅导

ISBN 978-7-03-027016-0

Ⅰ.线… Ⅱ.①孟…②赵…③孙… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 044139 号

责任编辑:王 静 房 阳 / 责任校对:陈玉凤
责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 4 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2010 年 4 月第一次印刷 印张:17 3/4
印数:1—5 000 字数:358 000

定价: 29.00 元

目　录

第1章 行 列 式

一、基本要求

(1) 理解行列式的定义，熟悉元素的余子式、代数余子式的含义.

(2) 熟练掌握行列式的性质和行列式按行(列)展开定理，掌握利用行列式的性质和定理计算低阶和高阶行列式的方法.

(3) 掌握应用克拉默(Cramer)法则求解线性方程组.

二、内容提要

1. 概念

1) 行列式的概念

n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的定义有两种方式.

定义 1.1 $n=2$ 时，定义二阶行列式

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

假设 $n-1$ 阶行列式已经定义，则定义 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j},$$

其中 M_{1j} 是元素 a_{1j} 的余子式，$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$ 为元素 $a_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$ 的代数余子式.

定义 1.2 n 阶行列式可表示为如下形式：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 所有排列之和.

定义 1.2 和定义 1.1 等价. 定义 1.1 是采用归纳定义，用低阶行列式表示高阶行列式，展示了行列式计算的思维方法. 定义 1.2 说明 n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，每一项是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积，若行标按从小到大的标准次序排列，列标为偶排列时，该项前面取正号；列标为奇排列时，该项前面取负号.

2）余子式、代数余子式的概念

定义 1.3 把 n 阶行列式中元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列元素删去后留下的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

并称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的代数余子式.

2. 行列式的性质

性质 1.1 行列式 D 与它的转置行列式 D' 相等，即 $D=D'$.

性质 1.2 互换行列式两行(列)的元素，行列式变号.

性质 1.3 行列式中某一行(列)的所有元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

性质 1.4 若行列式中某一行(列)的元素 a_{ij} 都可分解为两元素 b_{ij} 与 c_{ij} 之和，即 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$ $(j=1,2,\cdots,n,1\leqslant i\leqslant n)$，则该行列式可分解为相应的两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.5 把行列式任一行(列)的各元素同乘以一个常数 k 加到另一行(列)对应的元素上，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. 定理

利用行列式的定义 1.1 和行列式的性质可得到 n 阶行列式按任一行(列)展开的定理.

定理 1.1 n 阶行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

定理 1.2 行列式中某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子

式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0\quad(i\neq j=1,2,\cdots,n)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0\quad(i\neq j=1,2,\cdots,n).$$

综合定理 1.1 和定理 1.2，对于代数余子式有如下重要结论：

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\sigma_{ij}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\sigma_{ij},$$

其中

$$\sigma_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}\quad(i,j=1,2,\cdots,n).$$

4. 几个特殊行列式

(1) 上三角行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}.$$

(2) 下三角行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(3) 对角形行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\0 & a_{22} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(4) n 阶范德蒙德(Vandermonde)行列式($n\geqslant 2$)

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j).$$

(5)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{k+1\,1} & \cdots & c_{k+1\,k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k+n\,1} & \cdots & c_{k+n\,k} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

5. 行列式的计算

行列式的计算是本章的重点,常用的方法有以下几种:

(1) 利用行列式的性质将行列式某一行(列)只保留一个非零元素,其余元素化为零,然后按该行(列)展开,通过降阶计算行列式的值.

(2) 利用行列式的性质将行列式化为上(下)三角行列式,其结果为对角线上元素的连乘积.

(3) 把行列式拆成几个行列式之和,再降阶求行列式的值.

(4) 找递推公式.对于 n 阶行列式 D_n,若不能直接利用行列式的性质求出行列式的值,可建立 D_n 与 $D_i(i<n)$ 的关系式,再由这个关系式解出所求的行列式 D_n.

(5) 升阶法(加边法).通过增加行列式 D_n 的一行和一列后,对高一阶行列式借助某种特殊的行列式求解.

(6) 数学归纳法.

6. 克拉默法则

对于含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

若其系数行列式 $D\neq 0$,则该线性方程组有唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D}\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列元素用常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j-1}&b_1&a_{1j+1}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2j-1}&b_2&a_{2j+1}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nj-1}&b_n&a_{nj+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

若线性方程组的常数项 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$，即

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\qquad\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0,\end{cases}$$

称该线性方程组为齐次线性方程组，若系数行列式 $D\neq0$，则齐次线性方程组仅有零解

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=0,$$

因此齐次线性方程组有非零解的充要条件是该方程组的系数行列式为零，即 $D=0$.

三、典型例题解析

例 1　证明在一个 n 阶行列式中，如果等于零的元素个数大于 n^2-n，那么这个行列式等于零.

证　因为 n 阶行列式中共有 n^2 个元素，若等于零的个数大于 n^2-n，则不等于零的元素的个数小于 n，因此行列式中至少有一行元素全为零，则该 n 阶行列式为零.

例 2　写出四阶行列式中所有带负号且包含因子 a_{23} 的项.

解　四阶行列式中所有包含 a_{23} 的项

$$(-1)^{\tau(p_1 3 p_3 p_4)}a_{1p_1}a_{23}a_{3p_3}a_{4p_4},$$

其中 p_1,p_3,p_4 取 1,2,4 三个数中的一个，即 $p_1\ 3\ p_3\ p_4$ 的可能排法有 6 种：1324，1342，2314，2341，4321，4312，且 $\tau(1324)=1,\tau(2341)=3,\tau(4312)=5$ 为奇排列.

故四阶行列式中所有带负号且包含因子 a_{23} 的项为

$$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44},\quad -a_{12}a_{23}a_{34}a_{41},\quad -a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}.$$

例 3　设行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix},$$

求行列式第4行各元素余子式之和 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$.

分析 这是考察基本概念的题目，知道余子式的概念就不难写出 M_{41}，M_{42}，M_{43}，M_{44}的值. 从而求出其和，另一方面也可利用行列式展开定理来解决.

解 解法一

$$M_{41}=\begin{vmatrix}0&4&0\\2&2&2\\-7&0&0\end{vmatrix}=-56,\quad M_{42}=\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\0&0&0\end{vmatrix}=0,$$

$$M_{43}=\begin{vmatrix}3&0&0\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}=42,\quad M_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}=-14,$$

所以

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-28.$$

解法二 由于

$$\sum_{j=1}^{4}(-1)^{4+j}M_{4j}=\sum_{j=1}^{4}A_{4j}=D,$$

所以构造4阶行列式

$$H=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix},$$

H 的前3行与行列式 D 的前3行相同，因此 H 的第4行各元素的余子式与 D 的第4行各元素的余子式相同. 所求 H 的第4行元素的余子式之和即为 D 的第4行元素的余子式之和. 按 H 的第4行展开，得

$$\begin{aligned}H&=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}\\&=(-1)(-1)^{4+1}M_{41}+(-1)^{4+2}M_{42}+(-1)(-1)^{4+3}M_{43}+(-1)^{4+4}M_{44}\\&=M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}.\end{aligned}$$

而

$$H=7\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}=-28.$$

所以 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-28$.

例 4　设函数 $F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 3x & 6x^2 \\ 0 & 0 & 1 & 4x \end{vmatrix}$，当 x 取什么值时，$F(x)$ 有最大值？

分析　当函数用行列式表示时，求函数 $F(x)=0$ 的根，函数的最值以及解有关的不等式问题，一般都归结为行列式的计算问题.

解　$$F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 3x & 6x^2 \\ 0 & 0 & 1 & 4x \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-x^2c_1]{c_2-xc_1} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x & 2x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 3x & 6x^2 \\ 0 & 0 & 1 & 4x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3-2xc_2} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 6x^2 \\ 0 & 0 & 1 & 4x \end{vmatrix} \xlongequal{c_4-6xc_3} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2x \end{vmatrix}$$

$$=-1-2x^4,$$

所以，当 $x=0$ 时，$F(x)$ 取得最大值 -1.

例 5　证明

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$
$$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).$$

分析　该证明题归结为 4 阶行列式的计算，这种低阶行列式常常利用性质化简来求解；另外也可以根据行列式的特点，构造范德蒙德行列式求解.

证　证法一　直接利用行列式的性质.

可以利用第 1 列乘以 -1，分别加到第 2,3,4 列上，降为三阶行列式，但很难得到等式的右端. 因此可采用如下方法化简：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-ar_2 \\ r_2-ar_1}]{r_4-a^2r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} (b-a)(c-a)(d-a)$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & c-b & d-b \\ b^2(b+a) & c^2(c+a)-b^2(b+a) & d^2(d+a)-b^2(b+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c^2+b^2+cb+ca+ab & d^2+b^2+db+da+ba \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)[(d^2-c^2)+b(d-c)+a(d-c)]$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).$$

证法二 采用加边法，变成 5 阶范德蒙德行列式，记为 D_5，

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}.$$

若 D_5 按第 5 列展开得 x 的 4 次多项式，其中 x^3 的系数为行列式中 x^3 对应的代数余子式，即

$$(-1)^{4+5}D = -D, \tag{1.1}$$

另外，由范德蒙德行列式的结果，得

$$D_5 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a), \tag{1.2}$$

易知，(1.2)中 x^3 的系数应为

$$\begin{aligned} & -a(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a) \\ & -b(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a) \\ & -c(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a) \\ & -d(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a) \\ = & -(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d), \end{aligned} \tag{1.3}$$

由(1.1)，(1.3)得

$$D = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).$$

例 6 求 n 阶行列式 $D_n=\det(a_{ij})$ 的值,其中 $a_{ij}=|i-j|(i,j=1,2,\cdots,n)$.

分析 本题注意 n 阶行列式的简化符号表示. 对于较简单的 n 阶行列式可通过化简,直接利用行列式的性质,求出行列式的值.

解

$$D_n=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=n,n-1,\cdots,1)]{r_i-r_{i-1}}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=1,2,\cdots,n-1)]{c_i+c_n}\begin{vmatrix} n-1 & 1+(n-1) & 2+(n-1) & \cdots & n-2+(n-1) & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)\cdot(-2)^{n-2}\cdot(-1)=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

例 7 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

分析 将行列式各行(列)都加到第1行(列)的方法是行列式化简中常用的方法;亦可以拆成两个行列式之和,找递推公式求出结果;还可以采用升阶法求行列式的值.

解 解法一 行列式中各列加到第1列,得

$$D_n=\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & \cdots & a_n\\ 1+\sum_{i=1}^{n}a_i & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,\cdots,n)]{r_i-r_1}\left(1+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

解法二

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

$$=D_{n-1}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=D_{n-1}+a_1.$$

递推公式

$$\begin{aligned}D_n&=D_{n-1}+a_1=D_{n-2}+a_2+a_1=\cdots\\&=D_2+a_{n-2}+a_{n-3}+\cdots+a_2+a_1\end{aligned}$$

$$=\begin{vmatrix}1+a_{n-1} & a_n\\ a_{n-1} & 1+a_n\end{vmatrix}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1$$

$$=1+a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1=1+\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

解法三　构造 $n+1$ 阶行列式

$$H_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ 0 & 1+a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & a_1 & \cdots & 1+a_{n-1} & a_n\\ 0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n\end{vmatrix},$$

显然

$$D_n=H_{n+1}\xlongequal[(i=2,3,\cdots,n+1)]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -1 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_{n+1}}\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n}a_n.$$

例 8　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a & b & b & \cdots & b & b\\ c & a & b & \cdots & b & b\\ c & c & a & \cdots & b & b\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ c & c & c & \cdots & a & b\\ c & c & c & \cdots & c & a\end{vmatrix}.$$

分析　根据行列式的特点，主对角线上方的元素都为 b，主对角下方的元素都

为 c，直接找递推公式有很大的难度，利用行列式的性质 1.5 化简也很难达到解决问题的目的；可以考虑把行列式的某一行或列看成是两个元素的和，利用性质 1.4，分成两个行列式的和，得到递推公式.

解 把行列式中第 1 列元素写成两项的和，其中 $a=(a-c)+c, c=0+c$，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a-c+c & b & b & \cdots & b & b \\ 0+c & a & b & \cdots & b & b \\ 0+c & c & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0+c & c & c & \cdots & a & b \\ 0+c & c & c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a-c & b & b & \cdots & b & b \\ 0 & a & b & \cdots & b & b \\ 0 & c & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & c & c & \cdots & a & b \\ 0 & c & c & \cdots & c & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & b & b & \cdots & b & b \\ c & a & b & \cdots & b & b \\ c & c & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a & b \\ c & c & c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$$

$$=(a-c)D_{n-1}+\begin{vmatrix} c & b & b & \cdots & b & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c-b & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & c-b & c-b & \cdots & a-b & 0 \\ 0 & c-b & c-b & \cdots & c-b & a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a-c)D_{n-1}+c(a-b)^{n-1},$$

即

$$D_n=(a-c)D_{n-1}+c(a-b)^{n-1}. \tag{1.4}$$

同理，把行列式中第一行元素看成两项之和，其中 $a=a-b+b, b=0+b$，得

$$D_n=(a-b)D_{n-1}+b(a-c)^{n-1}, \tag{1.5}$$

由(1.4)，(1.5)解得

$$D_n=\frac{b(a-c)^n-c(a-b)^n}{b-c} \quad (b-c\neq 0).$$

当 $b=c$ 时，

$$D_n=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例 9 证明 n 阶行列式