普通高等教育“十五”国家级规划教材

（高职高专教育）

线性代数

谢国瑞　汪国强　郝志峰　主编

高等教育出版社

普通高等教育"十五"国家级规划教材
（高职高专教育）

线性代数

谢国瑞　汪国强　郝志峰　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十五"国家级规划教材.本书根据教育部《高职高专教育线性代数课程教学基本要求》而编写,是与谢国瑞主编的《高职高专数学教程》配套的教材.

本书适用于高职高专各专业线性代数课程,内容包括线性代数方程组、矩阵、行列式及 n 维向量理论初步等5章.全书取材深广度合适,注意联系应用,符合大学专科线性代数课程教学基本要求.本书起点较低、材料丰满,内容展开思路清晰、易读、好教,有利于读者掌握知识、发展思维与提高能力.

本书由谢国瑞、汪国强、郝志峰主编,刘丽萍、陈洁蓓参与了编写工作.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/谢国瑞，汪国强，郝志峰主编. —北京：高等教育出版社，2003.8

ISBN 7-04-012921-3

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①谢… ②汪… ③郝… Ⅲ. 线性代数-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第043696号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	人民教育出版社印刷厂		
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2003年8月第1版
印　　张	8.5	**印　　次**	2003年8月第1次印刷
字　　数	200 000	**定　　价**	9.60元

前 言

本书是根据高职高专教育线性代数课程教学基本要求编写的，力求能符合课程教学的实际需要并反映教育部"新世纪高职高专教育数学课程教学内容体系改革、建设的研究与实践"项目的研究成果，为高职高专各专业的线性代数课程提供一本合适的教材．

线性代数是代数学中主要处理线性关系问题的一个分支，以向量空间、线性变换以及与此相联系的矩阵理论为中心内容．但对于高职高专学生则都是作为应用数学的基础和重要组成部分来学线性代数的．学生在学习线性代数课程之后，应能做到：掌握最基础部分的线性代数方程组，理解矩阵、行列式、向量等数学语言并能进行必要的计算，了解其在描述、简化、解决问题中所发挥的作用．根据这样的认识，我们编就了由目录所示5个章次组成的这本教材，基本涵盖了教学基本要求规定的教学内容．全书以最简单的线性问题，解线性代数方程组为主线，矩阵、行列式、向量等概念则是在讨论中自然地出现，并与解线性代数方程组问题互动地发展．这样的安排，希望能使学生在课程进展中因感受到认识的深化而得到激励．

在本书编写中，编者沿用了《线性代数及应用》[①]一书的体例与风格，并从相关章节汲取较多材料进行了改编．事实上，本书读者若想扩展知识、提高能力而进一步学习时，使用该书将是方便的，并且从中还能觅到合适的参考读物．

本书还具有以下特点，倘善加利用，当能提高学习效果．

全书起点较低　本书从熟知的解线性代数方程组的消元法开始，并将消元法推广用于讨论方程组解的各种情形．这样做，应能使所有学生在学习线性代数时都从同一起跑线出发．当然，对许多学生来说这个内容是可以很快浏览而过的．

应用示例较多　线性代数中的概念较多，而且往往只是简单的定义，无法从多方面解释意义(与导数、积分等概念很不一样)，书中辅以较多的应用示例，力求使内容显得丰满，不觉干瘪枯燥，增强概念的直观性．但用 * 号标记的一些讨论应用问题的节或段，若因时间不够暂且搁下不读，是无损于学习连贯性的．

定理证明的结束有明显标记号▍　线性代数中有许多定理，这些往往成为学生学习上的难点，但作为课程的要求，大都只是要求理解或掌握定理的内容而未必是其证明．对证明结束给出明显标记，可为读者带来方便．在初读时，对大多数的定理均可直接越过证明往下读，到有必要时再回过来看证明的细节．而掌握定理的内涵，主要应通过运用定理去证明推论或解决问题，这些当然在初学时就要重视的．初读时越过大段的证明，不仅可避过一些难点，而且也有利于较好地掌握理论的全貌，有效地提高学习兴趣．

最后，我们要对组织和帮助我们进行项目研究和教材编写的教育部高教司高职专处的领导、高等教育出版社高职高专分社的领导表示衷心的感谢，也要对上海工商外国语职业学院对本教

---

① 谢国瑞．线性代数及应用．北京：高等教育出版社，1999．该书在2001年曾获上海市教学成果奖(二等奖)，并获教育部2002年全国普通高等学校优秀教材一等奖．

材的编写给予立项资助等支持表示感谢.项目组的成员对本书的编写给了很多的帮助.特别是上海交通大学孙薇荣教授、华东理工大学张建初教授还参与了审、校等具体工作,在此一并表示感谢.受水平所限,我等虽竭力而为,但错、漏、不妥之处仍在所难免,敬祈读者批评指正.

编者

2003.2

出版说明

为加强高职高专教育的教材建设工作,2000年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》(教高司[2000]19号),提出了"力争经过5年的努力,编写、出版500本左右高职高专教育规划教材"的目标,并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施:先用2至3年时间,在继承原有教材建设成果的基础上,充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验,解决好高职高专教育教材的有无问题;然后,再用2至3年的时间,在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材.根据这一精神,有关院校和出版社从2000年秋季开始,积极组织编写和出版了一批"教育部高职高专规划教材".这些高职高专规划教材是依据1999年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》(草案)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格)(草案)编写的,随着这些教材的陆续出版,基本上解决了高职高专教材的有无问题,完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步.

2002年教育部确定了普通高等教育"十五"国家级教材规划选题,将高职高专教育规划教材纳入其中."十五"国家级规划教材的建设将以"实施精品战略,抓好重点规划"为指导方针,重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设,特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材;同时还要扩大教材品种,实现教材系列配套,并处理好教材的统一性与多样化、基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系,在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系.

普通高等教育"十五"国家级规划教材(高职高专教育)适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用.

教育部高等教育司

2002年11月30日

目　录

第 1 章
线性代数方程组(消元法)

历史上,线性代数的第一个问题是关于解线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1-1}$$

的问题.我们就从用消元法解最简单的二元线性代数方程开始讨论这一应用十分广泛的课题,并从而看出产生研究矩阵的必然性.

1.1 解线性代数方程组的消元法

1.1.1 二元线性代数方程组

在平面直角坐标中,二元线性方程的图像(坐标能满足方程的点集)是条直线.例如,方程

$$2x + y = 8,\text{即 } y = 8 - 2x$$

在将它的两个解$\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$及$\begin{bmatrix}0\\8\end{bmatrix}$在坐标平面上用点表示后,联线即得此方程的图像(图 1-1).事实上,此直线上任一点的坐标正是该方程的一个解,反之,以方程的任一解作为坐标,也正是这直线上的一个点.这样从几何上也看出一个二元线性方程有无限多解的事实.

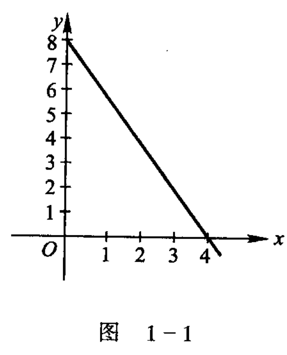


图 1-1

在实际问题中常要对同时出现的若干个线性方程作为一个整体来考虑,需求出满足所有方程的未知数,这就是解线性代数方程组.例如,将

$$x + y = 3 \tag{1-2}$$

$$2x - 3y = -4 \tag{1-3}$$

这两个方程作为整体来讨论,就成一**线性方程组**(system of linear equations).(1-2)是方程组的第 1 个方程,而(1-3)是第 2 个方程.对于线性方程组,其重要的求解方法是消元法,即通过对方程组作**同解变形**(或称**等价运算**或**变形**)使各个方程变成分别各含一个变量(或称未知数),并能求出其值,从而得到整个方程"组"的解,这个解当然地应该也是由数组表示的.方程组的**等价变**

形有以下三类:

1. 交换组内任两个方程的次序(或编号);
2. 任一方程乘一非零常数;
3. 任一方程经数量倍(即在两端乘同一常数)后加到另一方程去.

例 1 试用方程组等价变形法,解方程组

$$\begin{cases} x+y=3 & (1-2) \\ 2x-3y=-4 & (1-3) \end{cases}$$

解 作第 3 类变形,将(1-2)乘(-2)后加到(1-3)去,得到

$$\begin{cases} x+y=3 & (1-2) \\ -5y=-10 & (1-3') \end{cases}$$

这是与原方程组同解的.在(1-3′)两端乘$\left(-\frac{1}{5}\right)$,得

$$\begin{cases} x+y=3 & (1-2) \\ y=2 & (1-3'') \end{cases}$$

再作第 3 类变形,将(1-3″)乘(-1)后加到(1-2)去,得

$$\begin{cases} x=1 & (1-2') \\ y=2 & (1-3'') \end{cases}$$

这显然与原给方程组也同解,但目前已到了明显表出解的境地,故方程组的解是 2 维数组$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

与单个方程的情形一样,方程组的解也有三种可能的情形:有确定的解;无解;有无限多个解.

例 2 试用方程组等价变形,解方程组

$$\begin{cases} 2x-3y=-4 & (1-3) \\ -4x+6y=2 & (1-4) \end{cases}$$

解 作第 3 类等价变形,将(1-3)乘 2 后加到(1-4)去,得

$$\begin{cases} 2x-3y=-4 & (1-3) \\ 0x+0y=-6 & (1-4') \end{cases}$$

如果方程组有解则必成立

$$0=-6 \qquad (1-4')$$

而这是不可能的,故知方程组无解.

例 3 解方程组

$$\begin{cases} 2x-3y=-4 & (1-3) \\ -4x+6y=8 & (1-5) \end{cases}$$

解 作第 3 类等价变形,将(1-3)乘 2 后加到(1-5)去,得等价方程组

$$\begin{cases} 2x-3y=-4 & (1-3) \\ 0x-0y=0 & (1-5') \end{cases}$$

这时的方程(1-5′)是个平凡等式 0=0,于是未知数 x、y 所应适合条件的信息,从方程组变成等价的实质上只是单个方程

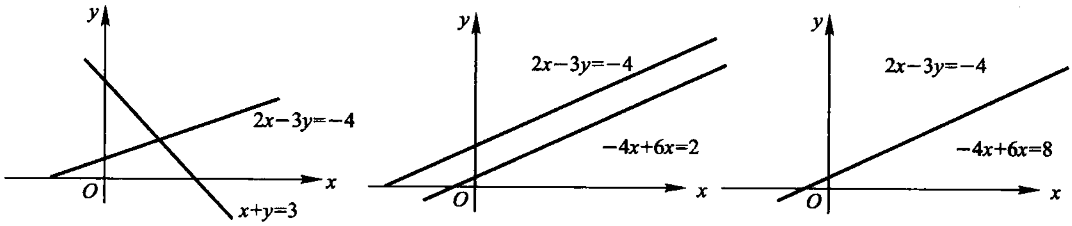
$$2x-3y=-4 \tag{1-3}$$

等价于

$$y=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}x$$

这样,题给方程组有无限多个解,解集是$\left\{\begin{bmatrix}k\\ \frac{2}{3}k+\frac{4}{3}\end{bmatrix}\middle| k\in\mathbf{R}\right\}$或将解表示为$\begin{cases}x=k,\\ y=\frac{2}{3}k+\frac{4}{3},\end{cases}$ k 是任意实数或$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\\ \frac{2}{3}k+\frac{4}{3}\end{bmatrix}$, k 是任意实数.

如图 1-2(a)、(b)、(c)分别显示例 1、2、3 三个二元线性方程组解的三种状况之几何意义:



(a)一对相交直线有惟一公共点　(b)一对平行直线无公共点　(c)重合直线每一点都是公共点

图 1-2

练习 1 解下列方程组,并给出几何解释:

(1) $\begin{cases}x+y=9\\ x-y=1\end{cases}$　(2) $\begin{cases}2x+3y=13\\ 5x-2y=4\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3x-y=2\\ -6x+2y=1\end{cases}$　(4) $\begin{cases}2x+3y=4\\ -4x-6y=-8\end{cases}$

1.1.2 高斯-若尔当消元法

将未知数个数相等的多个线性方程看成一个整体,称为**线性方程组**.若一个方程组含有 m 个方程、n 个未知数,常简称为 $m\times n$ **方程组**. $m\times n$ 方程组的解应是 n 维数组,将解数组的各个分量依次序代替 n 个未知数时能使 m 个方程全部成立.

回顾上一段,用三类等价运算解 2×2 方程组的过程,那里是依照这样的目标在进行的:通过三类等价运算,先用第 1 个方程,将方程组第 1 个未知数在各个方程中的系数变成只在第 1 个方程中为 1,其他方程中全为 0;再用第 2 个方程将第 2 个未知数在各个方程中的系数变成只在第 2 个方程中为 1,其他方程中全为 0,如此等等.由于整个过程只是通过方程组等价运算变各个方程的系数,为简化计,可省写未知数,用列表形式凸现其系数的变化过程.可将例 1 的计算重现于下:表 1 给出的例 1 的原方程组,r_1(第 1 行(row))是方程(1-2)的系数,r_2(第 2 行)是方程(1-3)的系数,而常数列(column)由方程右端的常数组成.

表 1

	x	y	常数列
r_1	1	1	3
r_2	2	-3	-4

经等价运算 $r_1\times(-2)+r_2$,得

表 2

r_1	1	1	3
r'_2	0	-5	-10

经运算 $r'_2\times\left(-\dfrac{1}{5}\right)$,得

表 3

r_1	1	1	3
r''_2	0	1	2

经运算 $r''_2\times(-1)+r_1$,得

表 4

r'_1	1	0	1
r''_2	0	1	2

第 1 个未知数 x 列的位置成 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,第 2 个未知数 y 列的位置成 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,因原方程组与表 4 代表的方程组

$$x=1$$
$$y=2$$

同解,故这就是方程组的解,或者说,此时常数列位置成为方程组的解 $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

这样求方程组解的方法称为**消元法**(elimination)或**高斯**[①]**-若尔当**[②](Gauss-Jordan)**消元法**.

例 4 用高斯-若尔当消元法解 3×3 方程

$$\begin{cases}x-2y+2z=-1\\3x+2y+2z=9\\2x-3y-3z=6\end{cases}$$

① Gauss Carl Friedrich(1777 年 4 月 30 日生于德国不伦瑞克,1855 年 2 月 23 日卒于格丁根)是德国最伟大的数学家、天文学家和物理学家,是近代数学的奠基人之一.在历史上被誉为和阿基米德、牛顿并列,同享盛名.高斯自小就表现出非凡的数学思维能力,是老师和长辈们心目中的"神童",并终因其卓越成就而被世界数学界称为"数学王子".

当然,高斯被认为是最伟大的数学家之一,决非由于这个简单的消元法,但有意思的是,正因为这个消元法而使高斯的名字最常被人们提到.

② Jordan Camille 是法国著名数学家,1838 年 1 月 5 日生于法国里昂的一个名门望族,17 岁以优异成绩考入巴黎综合工科学校,1861 年发表博士论文于《综合工科学校杂志》,他在 1881 年被选为法兰西科学院院士,1895 年又被选聘为彼得堡科学院院士.1921 年 1 月 21 日逝世于巴黎.

解　按上列步骤,列表运算如下:

表 1

	x	y	z	
r_1	1	-2	2	-1
r_2	3	2	2	9
r_3	2	-3	-3	6

$r_1 \times (-3)$ 加到 r_2，$r_1 \times (-2)$ 加到 r_3

表 2

1	-2	2	-1
0	8	-4	12
0	1	-7	8

表 3

1	-2	2	-1
0	1	-7	8
0	8	-4	12

$\times(-8)$

表 4

1	-2	2	-1
0	1	-7	8
0	0	52	-52

$\times\left(\frac{1}{52}\right)$

表 5

1	-2	2	-1
0	1	-7	8
0	0	1	-1

$\times(7)$　$\times(-2)$

表 6

1	-2	0	1
0	1	0	1
0	0	1	-1

$\times(2)$

表 7

1	0	0	3
0	1	0	1
0	0	1	-1

这就得到方程组的解是$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

从计算过程看出,在表 1 中是利用带圈的数字 1 将第 1 列即 x 所在列变成$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$的,在表 3 中,是利用带圈数字 1 将其下的 8 变成 0,从而第 2 列变成$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,称表 4 中三个带圈数字(位置)是第 1、2、3 次消元的**主元(位置)**,而表 2 中进行的将第 2、3 行交换位置相当于不愿把数字 8 作第 2 次消元的主元,而要用数字 1 作为主元,故做交换两行位置这件事相当于**选**主元. 而选主元的目的可以是为了便于运算的进行(像本例就是),或是为了提高运算的精度,也可能是迫不得已而为之.

例 5 试用高斯-若尔当消元法(常简称 G-J **消元法**)解方程组

$$\begin{cases} -3x+7y+2z=3 \\ 2x+4y-3z=-1 \\ x-3y+7z=2 \end{cases}$$

解 将上例的表解过程写成更紧凑的简化形式,有

x	y	z		等价运算	记号
-3	7	2	3		
2	4	-3	-1		r_{13}
1	-3	7	2		
①	-3	7	2	$\times(-2)$ $\times(3)$	$r_{12}(-2)$
2	4	-3	-1		
-3	7	2	3		$r_{13}(3)$
1	-3	7	2		$r_2\left(\frac{1}{10}\right)$
0	⑩	-17	-5	$\leftarrow\times\left(\frac{1}{10}\right)$ $\times(3)$	$r_{21}(3)$
0	-2	23	9	$\times(2)$	$r_{23}(2)$
1	0	$\frac{19}{10}$	$\frac{1}{2}$		$r_3\left(\frac{10}{196}\right)$
0	1	$\frac{17}{10}$	$-\frac{1}{2}$	$\times\left(-\frac{19}{10}\right)$	$r_{32}\left(-\frac{17}{10}\right)$
0	0	$\frac{196}{10}$	8	$\leftarrow\times\left(\frac{10}{196}\right)$ $\times\left(-\frac{17}{10}\right)$	$r_{31}\left(-\frac{19}{10}\right)$

续表

x	y	z		等价运算	记号
1	0	0	$-\frac{27}{98}$		
0	1	0	$\frac{19}{98}$		
0	0	1	$\frac{20}{49}$		

故方程组的解是 3 维数组,横写成行是$\left(-\frac{27}{98},\frac{19}{98},\frac{20}{49}\right)$.即解为

$$x=-\frac{27}{98},\quad y=\frac{19}{98},\quad z=\frac{20}{49}$$

在表中已对方程组所作的等价运算用了今后通用的简记法:

1. 对第 1 类运算记成如 r_{13},表示将组内的第 1、第 3 个方程(即表的第 1、第 3 行)交换位置.

2. 对第 2 类运算记成如 $r_2\left(\frac{1}{10}\right)$,表示将第 2 方程(即表的第 2 行)乘常数$\frac{1}{10}$.

3. 对第 3 类运算记成如 $r_{12}(-2)$,表示将组内第 1 个方程乘常数(-2)后加到组内第 2 个方程去(这样,改变了组内的第 2 个方程的形式,第 1 个方程没有改变).

例 6 试用 G-J 消元法解方程组

$$\begin{cases}x-2y+z=3\\2x-3y-z=7\\5x-8y-z=20\end{cases}$$

解 列表计算如下:

x	y	z		
①	-2	1	3	$r_{12}(-2)$
2	-3	-1	7	$r_{13}(-5)$
5	-8	-1	20	
1	-2	1	3	$r_{21}(2)$
0	①	-3	1	$r_{23}(-2)$
0	2	-6	5	
1	0	-5	5	
0	1	-3	1	
0	0	0	3	

到这里,已知题给方程组与方程组

$$\begin{cases}x-5z=5\\y-3z=1\\0=3\end{cases}$$

等价,此方程组因含有"$0=3$"这样永远不能成立的方程而无解.故题给方程组无解.常称无解的

方程组为**矛盾或不相容方程组**.

例 7 试用 G－J 消元法解方程组

$$\begin{cases}3x+4y-3z=-6\\ -x-y+2z=4\\ x+2y+z=2\end{cases}$$

解 列表计算如下：

x	y	z		
3	4	-3	-6	r_{13}
-1	-1	2	4	
1	2	1	2	
①	2	1	2	$r_{12}(1)$
-1	-1	2	4	
3	4	-3	-6	$r_{13}(-3)$
1	2	1	2	$r_{21}(-2)$
0	①	3	6	$r_{23}(2)$
0	-2	-6	-12	
1	0	-5	-10	
0	1	3	6	
0	0	0	0	

至此要进行第 3 次消元时，主元位置上是 0，而且无法通过交换方程来改选主元，因为这是方程组里最后一个方程的位置，若将前面方程往下挪，则将破坏前两次消元的成果，这是不允许的. 所以只能结束消元运算，说明原方程组与方程组

$$\begin{cases}x-5z=-10\\ y+3z=6\end{cases}$$

同解，这个方程组明显有无限多个解. 事实上，分别解出 x,y，有

$$x=-10+5z$$

$$y=6-3z$$

而 z 是可任意取值的，于是，可将这个方程组的无限多个解表成

$$\begin{cases}x=-10+5k\\ y=\quad 6-3k\\ z=\qquad k\end{cases}\ k\text{ 为任意数，或}\left\{\begin{bmatrix}-10+5k\\ 6-3k\\ k\end{bmatrix}\middle|\, k\in\mathbf{R}\right\}$$

或表作 $\begin{bmatrix}-10+5k\\ 6-3k\\ k\end{bmatrix}$，其中 k 可取任意数. 令 k 取不同的值就可得到这个方程组的不同的具体解.

通过以上各例可看出，与 2×2 方程组一样，对一般的 $m\times n$ 线性方程组，其解的情况也有三种：有惟一确定的解，有无限多个解，或者无解，三者必居其一. 我们将在第 4 章再一次说明成

立这个结论.今后,对前面两种情形,即有解的方程组称为**相容方程组**,而称无解的方程组为**不相容方程组或矛盾方程组**.

练习 2 用 G-J 消元法解下列方程组:

(1) $\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+3y+3z=-2 \\ -2x+2y-3z=7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2s+t-u=2 \\ 3s-2t+u=7 \\ s-3t-2u=-7 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+y+2z=10 \\ 4x+4y+7z=33 \\ 2x+5y+12z=48 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} y+z+w=0 \\ 3x+3z-4w=7 \\ x+y+z+2w=6 \\ 2x+3y+z+3w=6 \end{cases}$

1.2* 应用举例

例 8 (费用分摊问题)设一个公司有 3 个生产部门 P_1,P_2,P_3 及 4 个管理部门 M_1,M_2,M_3,M_4.公司规定,每个管理部门的费用由生产部门及其他管理部门分摊,分摊的比例由管理服务量确定,如下表所示:

承担比例 部门 / 管理部门	M_1	M_2	M_3	M_4	P_1	P_2	P_3	自身费用
M_1	0	0.02	0.10	0.10	0.24	0.26	0.28	20 000
M_2	0.10	0	0.20	0.10	0.20	0.20	0.20	18 000
M_3	0	0	0	0	0.30	0.30	0.40	80 000
M_4	0.10	0.10	0.10	0	0.20	0.20	0.30	10 000

设若已知各个管理部门 M_1,M_2,M_3,M_4 的自身费用(如人员工资、办公费用等)依次为 2 万(元)、1.8 万(元)、8 万(元)、1 万(元).试确定每个管理部门的总费用(自身费用加上承担其他管理部门费用的份额),并从而求出各生产部门所承担的管理费用.

解 设管理部门 M_1,M_2,M_3,M_4 的总费用分别为 x,y,z,w,各由两个部分组成:自身费用及承担其他管理部门费用的份额.于是,由上表可知,对管理部门 M_1 应有

$$x=20\,000+0.1y+0.1w$$

类似地可分别对 M_2,M_3,M_4 各写出一个方程,有

$$\begin{cases} y=18\,000+0.02x+0.1w \\ z=80\,000+0.1x+0.2y+0.1w \\ w=10\,000+0.1x+0.1y \end{cases}$$

这样,就得一个关于 x,y,z,w 的线性代数方程组:

$$\begin{cases} x-0.1y-0.1w=20\ 000 \\ -0.02x+y-0.1w=18\ 000 \\ -0.1x-0.2y+z-0.1w=80\ 000 \\ -0.1x-0.1y+w=10\ 000 \end{cases}$$

用G-J消元法处理得

x	y	z	w		
1	−0.1	0	−0.1	20 000	$r_{12}(0.02)$
−0.02	1	0	−0.1	18 000	$r_{13}(0.1)$
−0.1	−0.2	1	−0.1	80 000	$r_{14}(0.1)$
−0.1	−0.1	0	1	10 000	
1	−0.1	0	−0.1	20 000	$r_2\left(\frac{1}{0.998}\right)$
0	0.998	0	−0.102	18 400	$r_{21}(0.1)$
0	−0.21	1	−0.11	82 000	$r_{23}(0.21)$
0	−0.11	0	0.99	12 000	$r_{24}(0.11)$
1	0	0	−0.110 220 4	21 843.69	$r_4\left(\frac{1}{0.978\ 757\ 6}\right)$
0	1	0	−0.102 204 4	18 436.87	$r_{41}(0.110\ 220\ 4)$
0	0	1	−0.131 462 9	85 871.74	$r_{42}(0.102\ 204\ 4)$
0	0	0	0.978 757 6	14 028.06	$r_{43}(0.131\ 462\ 9)$
1	0	0	0	23 423.43	
0	1	0	0	19 901.72	
0	0	1	0	87 755.93	
0	0	0	1	14 332.52	

于是得解 $x=23\ 423.43, y=19\ 901.72, z=87\ 755.93, w=14\ 332.52$.

从而依照已知各生产部门承担各管理部门费用的比例,可算出各生产部门需承担的管理费用为:

P_1部门:$0.24\times 23\ 423+0.2\times 19\ 902+0.3\times 87\ 756+0.2\times 14\ 333=38\ 795$(元)

P_2部门:$0.26\times 23\ 423+0.2\times 19\ 902+0.3\times 87\ 756+0.2\times 14\ 333=39\ 264$(元)

P_3部门:$0.28\times 23\ 423+0.2\times 19\ 902+0.4\times 87\ 756+0.3\times 14\ 333=49\ 941$(元)

例9 (联合收入问题)已知三家公司R、S、T具有图1-3所示的股份关系,即R公司掌握T公司60%的股份,T公司掌握R公司20%的股份,而R公司80%的股份不受另两家公司控制等等.

现设R,S和T公司各自的营业净收入分别是10万元、8万元、6万元,每家公司的联合收入由净收入加上在其他公司的股份按比例的提成收入组成.试确定各公司的联合收入及实际收入.

解 依照图1-3所示各个公司的股份比例可知,若设R、S、T三公司的联合收入分别为