



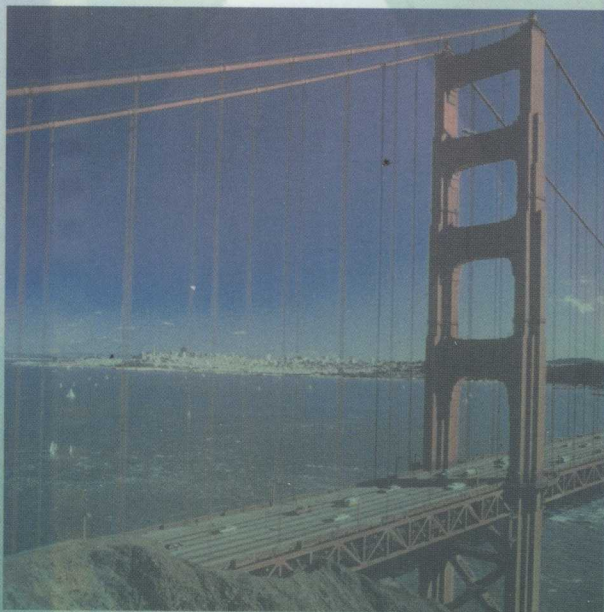
教育部高职高专规划教材  
Jiaoyubu Gaozhi Gaozhuan Guihua Jiaocai

# 建筑力学

(下册)(多学时)

(第二版)

陈永龙 编著



高等教育出版社

教育部高职高专规划教材

# 建 筑 力 学

下册(多学时)

(第二版)

陈永龙 编著

高等教育出版社

## 内容提要

本书是教育部高职高专规划教材,依据教育部《高职高专教育土建类专业力学课程教学基本要求》编写而成,是高职高专力学系列课程教学内容及课程体系改革的成果。全书在第一版基础上,力求体现高职高专教育培养高等技术应用性人才的特点,精选变形体静力学、材料力学和结构力学的有关内容,使之融会贯通,内容精炼,概念清晰,重点突出,应用性强。

全书分上、下两册,共计十二章。上册共八章,包括绪论,力系的平衡,内力与内力图,静定结构的受力分析,轴向拉伸、压缩杆的强度计算,扭转杆的强度计算,弯曲杆的强度计算,组合变形杆的强度计算。下册共四章,包括结构的位移计算和刚度校核,超静定结构分析,移动荷载作用下静定梁的计算,压杆稳定。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校土建类专业,道桥、市政等专业的教材,也可供相关工程技术人员参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

建筑力学(多学时).下册/陈永龙编著.—2版.

北京:高等教育出版社,2004.11(2005重印)

ISBN 7-04-015672-5

I. 建... II. 陈... III. 建设力学-高等学校:  
技术学校-教材 IV. TU311

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第099230号

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100011  
总 机 010-58581000

经 销 北京蓝色畅想图书发行有限公司  
印 刷 北京市白帆印务有限公司

开 本 787×1092 1/16  
印 张 7.25  
字 数 170 000

购书热线 010-58581118  
免费咨询 800-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>

版 次 2001年1月第1版  
2004年11月第2版  
印 次 2005年5月第2次印刷  
定 价 9.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 15672-00

## 出版说明

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作中的重要组成部分。改革开放以来,在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下,各地已出版了一批高职高专教育教材。但从整体上看,具有高职高专教育特色的教材极其匮乏,不少院校尚在借用本科或中专教材,教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要。为此,1999年教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教学基本要求》(以下简称《基本要求》)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称《培养规格》),通过推荐、招标及遴选,组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师,成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍,并在有关出版社的积极配合下,推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种,用5年左右时间完成。出版后的教材将覆盖高职高专教育的基础课程和主干专业课程。计划先用2~3年的时间,在继承原有高职、高专和成人高等学校教材建设成果的基础上,充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验,解决好新形势下高职高专教育教材的有无问题;然后再用2~3年的时间,在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,通过研究、改革和建设,推出一大批教育部高职高专教育教材,从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

“教育部高职高专规划教材”是按照《基本要求》和《培养规格》的要求,充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的,适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2000年4月3日

# 主要符号表

|                      |               |
|----------------------|---------------|
| $A$                  | 面积            |
| $c$                  | 支座广义位移        |
| $E$                  | 弹性模量          |
| $F$                  | 集中荷载          |
| $F_{Ax}, F_{Ay}$     | A 处支座反力       |
| $F_N$                | 轴力            |
| $F_{Nx}, F_{Ny}$     | 轴力的水平、竖向分力    |
| $F_S$                | 剪力            |
| $F_{SA}^L, F_{SA}^R$ | 截面 A 左、右的剪力   |
| $F_{cr}$             | 临界荷载          |
| $G$                  | 切变模量          |
| $i$                  | 线刚度           |
| $M$                  | 弯矩            |
| $M^F$                | 固端弯矩          |
| $M_e$                | 弹性极限弯矩、外力偶    |
| $q$                  | 均布荷载集度        |
| $R$                  | 广义反力          |
| $r$                  | 单位广义位移引起的广义反力 |
| $S$                  | 劲度系数 影响线量值    |
| $u$                  | 水平位移          |
| $v$                  | 竖向位移 挠度       |
| $W$                  | 功 弯曲截面系数      |
| $X$                  | 广义未知力         |
| $\alpha$             | 线膨胀系数         |
| $\Delta$             | 结构广义位移        |
| $\delta$             | 广义位移 虚位移      |
| $\varepsilon$        | 线应变           |
| $\sigma$             | 应力            |
| $\sigma_{cr}$        | 临界应力          |
| $\sigma_p$           | 比例极限          |
| $\sigma_s$           | 屈服应力          |
| $\varphi$            | 稳定系数          |

## 符号表说明

为了深入贯彻国家技术监督局发布的国家标准 GB 3100~3102—93《量和单位》，本书对建筑力学中物理量符号的传统用法作了调整，既保证了对国家标准的认真实施，又考虑了教师和学生使用上的习惯与方便。

在实施国家标准的过程中，为保证国家标准和现有惯例的衔接，本书作了认真的考虑，现作如下说明，请读者注意。

1. 国家标准规范的物理量的名称和符号，按国家标准使用，注重量的物理属性。如，旧称剪应变(剪切角)，现改称切应变；又如，各种力(包括荷载、反力和内力)都用  $F$  作为主符号，而将其特性以下标(上标)表示；等等。

2. 对于在建筑力学中广泛使用的广义力(包括力与力偶矩、力矩)和广义位移(包括线位移与角位移、相对位移)，为了体现其广义性(有时还有未知性)，考虑到全书叙述的统一和表达的简洁、完整，本书仍沿用  $X$ (多余未知力)、 $R$  和  $r$ (约束反力)、 $\Delta$  和  $\delta$ (位移)、 $c$ (支座位移)等广义物理量。至于它们在具体问题中对应的量和相应单位，则视具体问题而定。

3. 在建筑力学力法和位移法、位移和影响线计算中普遍应用的单位力  $\bar{X}=1$  和  $F=1$  等以及单位位移  $\Delta=1$  等，均应理解为广义量自身相比的比值。为了书写方便且考虑到习惯用法，均简记为  $\bar{X}=1$  和  $F=1$  以及  $\Delta=1$  等，其余的单位量与此类同。

# 目 录

## 主要符号表

## 符号表说明

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| 第 9 章 结构的位移计算和刚度校核 .....       | 1  |
| § 9-1 概述 .....                 | 1  |
| 9-1-1 变形和位移 .....              | 1  |
| 9-1-2 结构位移计算的目的和方法 .....       | 2  |
| § 9-2 杆件的变形与位移 .....           | 3  |
| 9-2-1 轴向拉、压杆的变形和位移 .....       | 3  |
| 9-2-2 圆截面扭转杆的变形及刚度条件 .....     | 5  |
| 9-2-3 平面弯曲杆的位移及刚度条件 .....      | 7  |
| § 9-3 静定结构荷载作用下的位移计算 .....     | 13 |
| 9-3-1 图乘法计算梁和刚架的位移 .....       | 13 |
| 9-3-2 桁架的位移计算 .....            | 18 |
| 9-3-3 组合结构的位移计算 .....          | 20 |
| 学习指导 .....                     | 22 |
| 学习要求 .....                     | 22 |
| 习 题 .....                      | 22 |
| 第 10 章 超静定结构分析 .....           | 23 |
| § 10-1 概述 .....                | 23 |
| 10-1-1 超静定结构概念 .....           | 23 |
| 10-1-2 超静定次数的确定 .....          | 24 |
| 10-1-3 超静定结构的计算方法 .....        | 27 |
| § 10-2 力法 .....                | 28 |
| 10-2-1 力法的基本概念 .....           | 28 |
| 10-2-2 超静定梁和刚架的计算 对称性的利用 ..... | 33 |
| 10-2-3 超静定桁架和超静定组合结构的计算 .....  | 43 |
| 10-2-4 等截面直杆的转角位移方程 .....      | 49 |
| § 10-3 位移法 .....               | 54 |
| 10-3-1 位移法的基本概念 .....          | 54 |
| 10-3-2 位移法的基本未知量和基本方程 .....    | 56 |
| 10-3-3 位移法计算示例 .....           | 58 |
| § 10-4 力矩分配法 .....             | 61 |
| 10-4-1 力矩分配法的基本原理 .....        | 61 |
| 10-4-2 用力矩分配法计算连续梁和无侧移刚架 ..... | 66 |
| § 10-5 超静定结构的特性 .....          | 70 |
| 学习指导 .....                     | 71 |
| 学习要求 .....                     | 71 |
| 习 题 .....                      | 72 |

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| <b>第 11 章 移动荷载作用下静定梁的计算</b> | 74  |
| § 11-1 概述                   | 74  |
| 11-1-1 问题的提出                | 74  |
| 11-1-2 影响线概念                | 74  |
| § 11-2 简支梁影响线               | 75  |
| 11-2-1 静力法作影响线              | 75  |
| § 11-3 最不利荷载位置              | 77  |
| 11-3-1 利用影响线求量值             | 77  |
| 11-3-2 利用影响线确定最不利荷载位置       | 77  |
| § 11-4 简支梁的内力包络图和绝对最大弯矩     | 82  |
| 11-4-1 简支梁的内力包络图            | 82  |
| 11-4-2 简支梁的绝对最大弯矩           | 84  |
| 学习指导                        | 86  |
| 学习要求                        | 86  |
| 习 题                         | 86  |
| <b>第 12 章 压杆稳定</b>          | 88  |
| § 12-1 概述                   | 88  |
| § 12-2 基本概念 欧拉公式            | 89  |
| 12-2-1 稳定性概念                | 89  |
| 12-2-2 临界力欧拉公式              | 90  |
| 12-2-3 临界应力欧拉公式             | 91  |
| 12-2-4 欧拉公式的适用范围            | 92  |
| § 12-3 临界应力总图               | 92  |
| 12-3-1 压杆的屈曲失效试验            | 93  |
| 12-3-2 临界应力的经验公式            | 93  |
| § 12-4 压杆的稳定计算              | 96  |
| 12-4-1 稳定条件                 | 96  |
| 12-4-2 稳定计算                 | 97  |
| 学习指导                        | 100 |
| 学习要求                        | 100 |
| 习 题                         | 101 |
| <b>附录 B 自测题(下)</b>          | 103 |
| <b>主要参考书目</b>               | 107 |

## 第9章 结构的位移计算和刚度校核

### § 9-1 概 述

#### 9-1-1 变形和位移

结构在荷载、温度变化、支座位移等作用时会发生变形。变形除了指结构中各杆件的变形外,还包括结构形状的改变。变形时,结构中各杆横截面的位置会有变动。**结构的位移**即指结构中杆件横截面位置的改变。而结构的变形可用结构上某些截面的位移来反映。

结构的位移分线位移和角位移两种。截面的移动称为**线位移**,在计算简图上用杆轴上的一点(截面形心)处的移动来表示。截面的转动称为**角位移**,在计算简图上用杆轴上一点处的切线方向的变化来表示。例如如图 9-1a 所示简支梁,在荷载作用下发生变形如图 9-1b 所示,截面(形心)  $C$  移动到  $C'$ ,  $CC'$  即为截面(点)  $C$  的线位移,记为  $v_C$ 。同时截面  $C$  转动了一个角度,变形曲线在  $C'$  点的切线与水平线的夹角即为截面  $C$  的角位移,或称**转角**,记为  $\theta_{z,C}$ 。

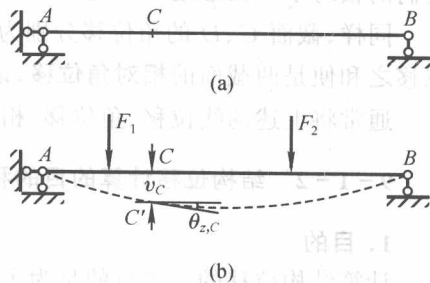


图 9-1

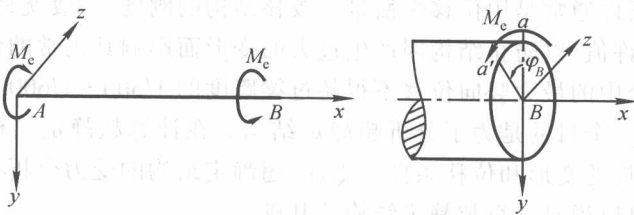


图 9-2

图 9-2 所示圆截面轴  $AB$ , 受一对力偶  $M_e$  作用发生扭转变形, 截面  $B$  没有线位移, 角位移是绕  $x$  轴的扭转角  $\varphi_B$ 。

一般情况下, 杆件截面的线位移可用沿杆件轴线( $x$  轴)方向的**轴向位移**  $u$  和垂直于杆件轴线(分别沿  $y, z$  轴)的**侧向位移**  $v, w$  三个分量来表示, 角位移可用**扭转角**  $\varphi$  和分别在  $Oxy$  平面、 $Oxz$  平面内的**转角**  $\theta_y, \theta_z$  三个分量表示。讨论杆件变形时, 线位移用上述  $u, v, w$  三个分量表示比较方便, 但是在结构的位移计算中, 通常采用水平位移分量和竖向位移分量来表示线位移。例

如图 9-3 所示平面桁架,  $C$  点的线位移  $CC'$  记为  $\Delta_C$ , 一般将它分解为竖向位移  $\Delta_{Cy}$  和水平位移  $\Delta_{Cx}$ 。

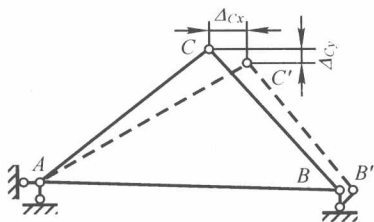


图 9-3

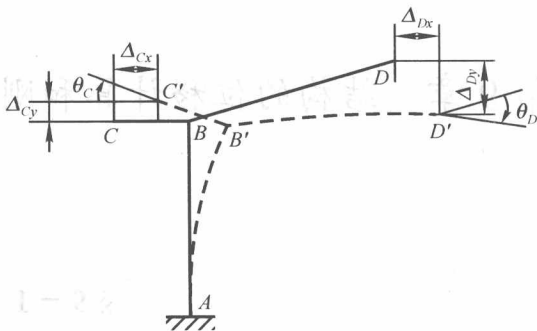


图 9-4

图 9-4 所示平面悬臂刚架在荷载作用下发生变形如虚线所示,  $D$  点的线位移可用竖向位移  $\Delta_{Dy}$  (向下) 和水平位移  $\Delta_{Dx}$  (向右) 两个分量表示。  $C$  点的竖向位移为  $\Delta_{Cy}$  (向上), 水平位移为  $\Delta_{Cx}$  (向右)。  $C$  点的竖向位移向上,  $D$  点的向下, 这两个方向相反的竖向位移之和称为  $C$ 、 $D$  两点的相对竖向位移, 记为  $\Delta_{CDy}$ , 即  $\Delta_{CDy} = \Delta_{Cy} + \Delta_{Dy}$ 。  $C$ 、 $D$  两点的水平位移都是向右, 方向相同, 此时它们的相对水平位移是二者之差, 即  $\Delta_{CDx} = \Delta_{Dx} - \Delta_{Cx}$ 。

同样, 截面  $C$ 、 $D$  的角位移分别为  $\theta_C$  (反时针方向) 和  $\theta_D$  (顺时针方向), 这两个方向相反的角位移之和便是两截面的相对角位移, 记为  $\theta_{CD}$ , 即  $\theta_{CD} = \theta_C + \theta_D$ 。

通常将上述的线位移、角位移、相对位移及相对角位移统称为广义位移, 并记为  $\Delta$ 。

## 9-1-2 结构位移计算的目的是方法

### 1. 目的

计算结构位移的一个目的是为了校核结构的刚度。结构如果强度能保证, 但没有足够的刚度, 在荷载作用下变形过大, 也是不能正常工作的。例如行车在安置于吊车梁上的轨道上运行时, 如果吊车梁的变形过大, 行车轨道不平顺, 就会引起较大的冲击和振动, 影响正常的运行。在工程上, 结构的刚度条件通常是用位移来衡量。校核结构的刚度, 一般就是检验结构中的某一位移是否超过规定的允许值, 以防止结构因产生过大的变形而影响其正常的使用。例如, 有关的规范规定, 上述吊车梁跨中的最大竖向位移不得超过梁跨度的  $1/500 \sim 1/600$ 。

位移计算的另外一个目的是为了分析超静定结构。在计算超静定结构的内力时, 除了平衡条件外还必须考虑结构的变形和位移条件。因此, 超静定结构的受力分析, 必须要涉及到结构的位移计算, 位移计算可以说是计算超静定结构的基础。

### 2. 方法

建筑力学中计算结构位移的一般方法是单位荷载法。本章将着重讨论用单位荷载法计算静定结构的位移。在工程实践中, 有时也会遇到单根杆件的变形或位移计算, 如简支梁、圆截面转轴等, 为了加深对杆件的变形与位移的理解, 在 § 9-2 中我们将对杆件基本变形时的位移微分方程及它们的积分作简单的介绍。

### 思考题

1. 试举例说明位移、相对位移和广义位移概念。

2. 结构的刚度条件通常是用变形还是位移来表达。

## § 9-2 杆件的变形与位移

平面杆件结构中的杆件有梁式杆和桁架杆(链杆)两类。梁式杆主要承受弯曲和剪切,桁架杆主要承受轴向拉伸或压缩。受扭杆件上作用的虽是空间力系,但它是杆件的基本变形形式之一。

下面我们分别讨论杆件在轴向拉伸、压缩、扭转和平面弯曲时的变形与位移的计算。

### 9-2-1 轴向拉、压杆的变形和位移

杆件在轴向拉伸、压缩时,其横截面仍保持为平面,并只发生沿轴线的平行移动。所以,轴向拉伸、压缩杆中的各横截面,只有轴向位移,侧向位移和角位移都等于零,并且,同一横截面上各点的变形和位移都相同。如用  $u$  表示截面的轴向位移,由于  $\frac{du}{dx} = \epsilon_x$ ,则利用应力应变关系和应力计算公式可写出轴向位移沿杆轴的变化率

$$\frac{du}{dx} = \frac{F_N}{EA} \quad (a)$$

式中  $F_N$  是截面上的轴力,此式表示了杆件轴向拉伸、压缩变形的程度。

式(a)是轴向位移  $u$  的一阶微分方程,对它积分可得到轴向位移  $u$  的表达式

$$u = \int \frac{F_N}{EA} dx + C \quad (b)$$

式中  $C$  是积分常数,可由杆端的约束条件来决定。当刚度  $EA$  和轴力  $F_N$  均为常数时,则式(b)为

$$u = \frac{F_N x}{EA} + C \quad (c)$$

设杆段的长度为  $l$ ,一端( $x = x_0$ )的轴向位移为  $u_0$ ,另一端( $x = x_0 + l$ )的轴向位移为  $u_1$ ,则两端截面的相对轴向位移  $\Delta u = u_1 - u_0$ ,即为该杆段的伸长或缩短,即

$$\Delta l = u_1 - u_0$$

将上述杆端位移条件代入式(c),可求得

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA} \quad (9-1)$$

工程上一般对结构中杆件的轴向变形不会提出刚度要求。

**例 9-1** 圆截面钢杆件  $AB$  如图 9-5a 所示,材料的弹性模量  $E = 200 \text{ GPa}$ 。试求杆的总伸长<sup>①</sup>。

**解:** 作  $AB$  杆轴力图如图 9-5b 所示。

钢杆的截面积

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3.14 \times (30 \times 10^{-3} \text{ m})^2}{4} = 7.07 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

抗拉刚度

① 按照有关制图标准规定,本书各图中凡长度尺寸的单位为  $\text{mm}$  时,将不标其单位  $\text{mm}$ 。

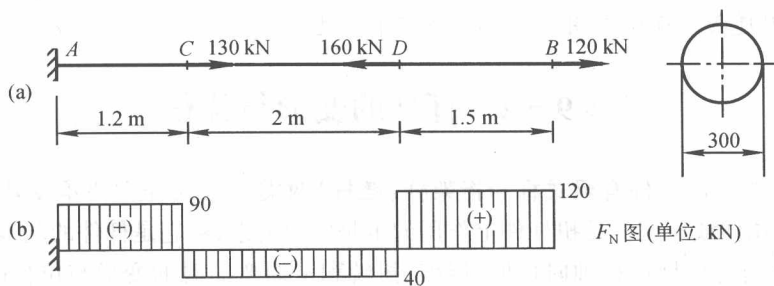


图 9-5

$$EA = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \times 7.07 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 1.41 \times 10^5 \text{ kN}$$

由于各杆段的轴力不相同,所以必须分段计算。杆的总伸长为

$$\begin{aligned} \Delta l &= \sum \frac{F_{Ni} l_i}{E_i A_i} \\ &= \frac{90 \text{ kN} \times 1.2 \text{ m}}{1.41 \times 10^5 \text{ kN}} - \frac{40 \text{ kN} \times 2 \text{ m}}{1.41 \times 10^5 \text{ kN}} + \frac{120 \text{ kN} \times 1.5 \text{ m}}{1.41 \times 10^5 \text{ kN}} \\ &= (0.77 - 0.57 + 1.28) \times 10^{-3} \text{ m} = 1.48 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

**例 9-2** 如图 9-6a 所示等截面柱,横截面面积为  $A$ ,材料的体积质量为  $\rho$ ,弹性模量为  $E$ 。试求在自重和荷载  $F$  作用下柱的压缩变形。

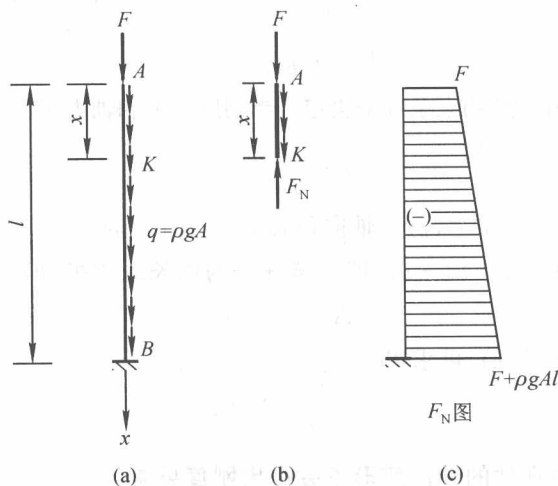


图 9-6

**解:** 设  $x$  轴如图 9-6a 所示,原点设在柱顶  $A$  点,向下为正。取隔离体  $AK$  如图 9-6b 所示,由平衡条件  $\sum F_x = 0$ ,可求得  $K$  截面上的轴力

$$F_N = -(F + \rho g A x)$$

此为轴力方程,据此作轴力图如图 9-6c 所示。将上式代入式(b),得柱的位移表达式

$$u = \int \frac{F_N}{EA} dx + C = - \int \frac{F + \rho g A x}{EA} dx + C$$

$$= -\frac{x}{EA} \left( F + \frac{\rho g A x}{2} \right) + C \quad (d)$$

根据 B 截面 ( $x=l$ ) 处,  $u_B=0$  的条件, 可求出积分常数

$$C = \frac{l}{EA} \left( F + \frac{\rho g A l}{2} \right)$$

代入(d)式得位移方程

$$u = \frac{F}{EA} (l-x) + \frac{\rho g}{2E} (l^2 - x^2) \quad (e)$$

把  $x=0$  代入(e)式, 求得 A 截面的位移为

$$u_A = \frac{Fl}{EA} + \frac{\rho g l^2}{2E}$$

所以, 柱的压缩变形为

$$\Delta l = u_B - u_A = - \left( \frac{Fl}{EA} + \frac{\rho g l^2}{2E} \right)$$

### 9-2-2 圆截面扭转杆的变形及刚度条件

圆截面杆扭转时, 各横截面只发生绕杆轴 ( $x$  轴) 的转动, 角位移即为扭转角  $\varphi$  (图 9-7a)。在圆杆中取微段  $dx$  如图 9-7b 所示, 左、右两端截面的扭转角分别是  $\varphi$  和  $\varphi + d\varphi$ ,  $d\varphi$  是微段两端截面的相对扭转角。

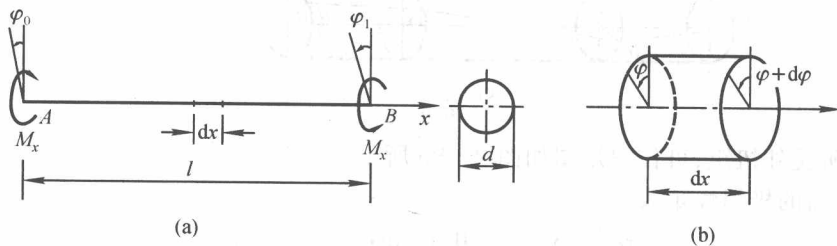


图 9-7

根据 § 6-2 中式(6-8)单位长度上的相对扭转角为

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GI_p} \quad (9-2a)$$

设圆截面杆段长为  $l$ , 杆段两端截面的扭转角分别为  $\varphi_0$  和  $\varphi_1$  (图 9-7a), 则该两截面的相对扭转角为

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$$

若圆杆的抗扭刚度  $GI_p$  和各截面上作用的扭矩  $M_x$  均是常数, 则圆杆沿杆长度均匀扭转, 此时扭转角的平均变化率  $\Delta\varphi/l$  等于扭转角的变化率, 即

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\Delta\varphi}{l}$$

将上式与式(9-2a)比较, 可得

$$\Delta\varphi = \frac{M_x l}{GI_p} \quad (9-2b)$$

此为相对扭转角的计算公式。

扭转杆的刚度校核是将杆件单位长度上的相对扭转角  $d\varphi/dx$  (工程上用  $\theta$  表示, 即  $\theta = d\varphi/dx$ ) 限制在允许的范围内, 即

$$\frac{d\varphi}{dx} \leq [\theta] \quad (9-3)$$

式中  $[\theta]$  为单位长度许用相对扭转角, 它的单位是  $(^\circ)/m$ 。但根据式 (9-2a) 求得的  $d\varphi/dx$ , 其单位是  $\text{rad}/m$ ①, 这点在计算时要特别注意。

**例 9-3** 圆截面传动轴如图 9-8a 所示, 材料的切变弹性模量  $G = 8.04 \times 10^4 \text{ MPa}$ 。试求 A、D 两截面的相对扭转角。

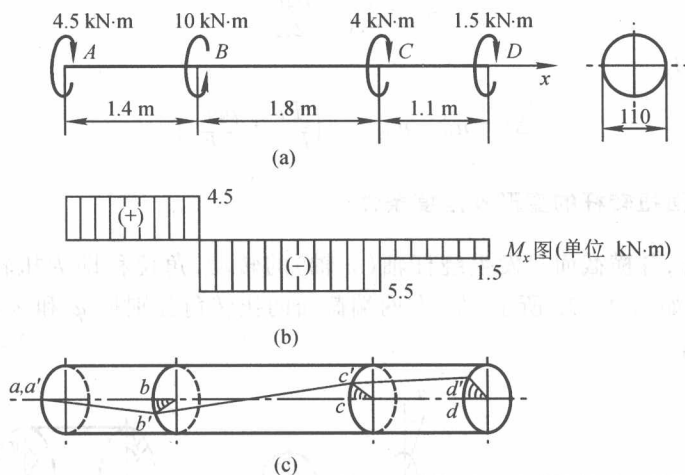


图 9-8

解: 根据所受外扭矩, 可作扭矩图如图 9-8b 所示。

圆轴横截面的极惯性矩为

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3.14 \times (0.11 \text{ m})^4}{32} = 1.44 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

抗扭刚度为

$$GI_p = 8.04 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 \times 1.44 \times 10^{-5} \text{ m}^4 = 1.16 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

A、D 两截面的相对扭转角为

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{AD} &= \sum \frac{M_x l_i}{GI_p} \\ &= \frac{4.5 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \times 1.4 \text{ m}}{1.16 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2} + \frac{-5.5 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \times 1.8 \text{ m}}{1.16 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2} + \\ &\quad \frac{-1.5 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \times 1.1 \text{ m}}{1.16 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2} \\ &= (5.43 - 8.53 - 1.42) \times 10^{-3} \text{ rad} = -4.52 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ &= -0.259^\circ \end{aligned}$$

①  $(^\circ)/m = \frac{\pi}{180} (\text{rad})/m$ 。

若在圆轴表面任取一母线  $abcd$ , 扭转后成为螺旋线  $a'b'c'd'$  (图 9-8c), 它形象地反映了圆轴各段的扭转变形情况。

**例 9-4** 汽车传动轴由无缝钢管制成, 外径  $D = 90 \text{ mm}$ , 内径  $d = 84 \text{ mm}$ , 材料的切变弹性模量  $G = 8.04 \times 10^4 \text{ MPa}$ , 单位长度许用相对扭转角  $[\theta] = 1.5(^{\circ})/\text{m}$ 。试求该轴所能承受的许用扭矩。

**解:** 空心圆轴截面的极惯性矩为

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \\ &= \frac{3.14}{32} \times [(0.090 \text{ m})^4 - (0.084 \text{ m})^4] = 1.55 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

单位长度许用相对扭转角为

$$[\theta] = 1.5(^{\circ})/\text{m} = \frac{1.5\pi}{180} \text{ rad/m} = 0.0262 \text{ rad/m}$$

根据刚度条件

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GI_p} \leq [\theta]$$

则许用扭矩为

$$\begin{aligned} [M_x] &= GI_p[\theta] \\ &= 8.04 \times 10^7 \text{ kN/m}^2 \times 1.55 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \times 0.0262 \text{ rad/m} \\ &= 3.26 \times 10^3 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

### 9-2-3 平面弯曲杆的位移及刚度条件

#### 1. 积分法计算位移

杆件  $AB$  在荷载作用下发生平面弯曲, 其轴线在纵向对称平面 ( $Oxy$  平面) 内弯成一条光滑的平面曲线, 此为变形曲线 (图 9-9)。表示杆件弯曲变形程度的变形曲线的曲率为

$$\kappa = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (f)$$

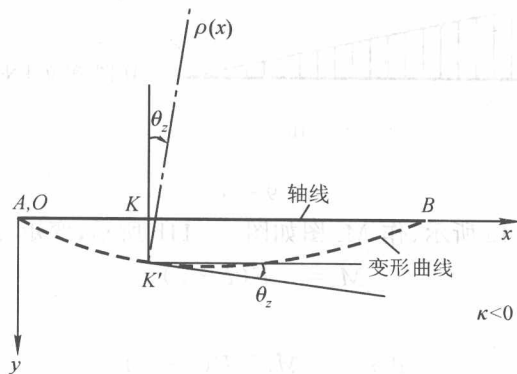


图 9-9

在小变形情况下,变形曲线的曲率等于侧向位移  $v$  对  $x$  的二阶导数,即

$$\kappa = \frac{dv^2}{dx}$$

将此式代入式(f),即得

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (9-4)$$

式(9-4)是杆件平面弯曲时变形曲线的基本方程,工程上通常称为梁的**挠曲线微分方程**或**挠度方程**。

基本方程(9-4)是侧向位移  $v$  的二阶微分方程,对此方程式积分时将出现两个积分常数,这可由杆件的已知位移边界条件来确定。图 9-10 给出了几种常用支座的位移边界条件。

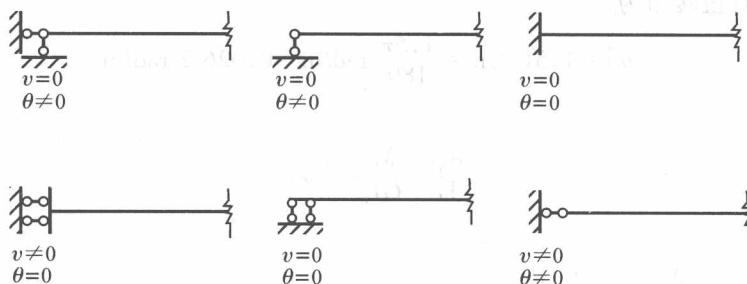


图 9-10

下面举例说明应用挠度方程(9-4)来计算弯曲杆的位移。

**例 9-5** 试求图 9-11a 所示悬臂梁自由端  $B$  截面的转角和挠度。 $EI_z = \text{常数}$ 。

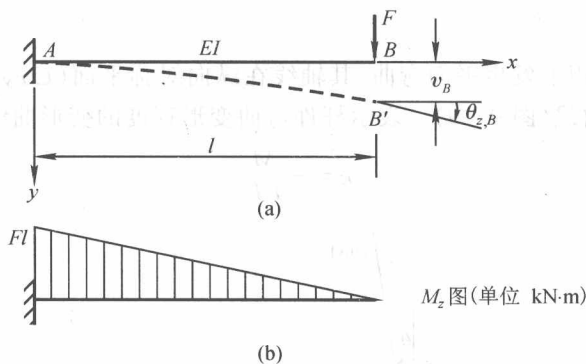


图 9-11

**解:**取坐标系如图 9-11a 所示,作  $M_z$  图如图 9-11b 所示,弯矩方程为

$$M_z = -F(l-x) \quad (g)$$

代入式(9-4),得挠度方程

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} = \frac{F(l-x)}{EI_z} \quad (h)$$

积分一次,得

$$\theta_z = \frac{dv}{dx} = \frac{F}{EI_z} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \quad (i)$$

再积分一次,得

$$v = \frac{F}{EI_z} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 x + C_2 \quad (j)$$

由固定端截面 A 的位移边界条件,即  $x=0$  时

$$\theta_{z,A} = 0$$

$$v_A = 0$$

可确定积分常数

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 0$$

分别代入式(i)和(j),得梁的转角方程

$$\theta_z = \frac{F}{EI_z} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

挠度方程

$$v = \frac{F}{EI_z} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

将  $x=l$  分别代入此两式,即得自由端 B 截面的转角

$$\theta_{z,B} = \frac{Fl^2}{2EI_z} \quad (\curvearrowright)$$

挠度

$$v_B = \frac{Fl^3}{3EI_z} \quad (\downarrow)$$

求得的  $\theta_{z,B}$  是正值,表明 B 截面是顺时针转动;  $v_B$  是正值,表明沿  $y$  的正方向。

**例 9-6** 试求图 9-12a 所示简支梁两端截面 A、B 的转角和跨中截面 C 的挠度。  $EI_z =$  常数。

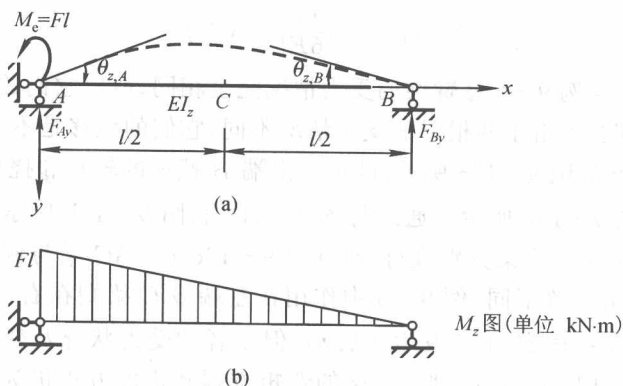


图 9-12

**解:** 根据平衡条件求得梁的支座反力为