

经 济 数 学

第二册

黑龙江教育出版社

经 济 数 学

第二册

主 编	彭秋艳	申 维
副主编	孙占军	张 莉
	曹殿国	曾凡金
主 审	刘兴权	刘 卓

黑龙江教育出版社

(黑)新登字第5号

经济数学

第二册

主 编 彭秋艳 申维

责任编辑: 孙平

黑龙江教育出版社出版 东北农业大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所总发行

开本 787×1092毫米 1/32·印张 13·字数 318千字

1993年版·1993年5月第1次印刷

印数: 1—2800

ISBN 7-5316-0683-3/0·5 定价: 9.8元

前 言

《经济数学》一书是按着国家教委高教司组织编写和审定的《高等学校财经专业核心课程教学大纲·经济数学基础》的教学要求,由黑龙江大学、黑龙江经济管理干部学院、黑龙江省教育学院、武汉工业大学、吉林林学院、浙江林学院、济南联合大学、华北航天工业学院、鸡西大学、宁波高等专科学校等校多年从事经济数学教学的专家、教授协作编写的经济、管理、财会、金融、计算机应用与管理等专业的数学教材。

全书分为两册,是按 140—200 学时编写的,具有一定的弹性。其中,第一册包括微积分,约 60—80 学时;第二册包括线性代数、线性规划、概率与数理统计,约 80—100 学时。全书力求深入浅出,通俗易懂。

全书由刘兴权副教授提出编写纲目,参加编写人员有:杨纫青、曾凡金、张莉、张凤华、张志敏、孙占军、曹殿国、申维、彭秋艳、黄纯一、李克、刘德明、秦学军等。

由于编者水平有限,时间仓促,错误在所难免,恳请广大读者批评指正。

编 者
一九九三年五月

《经济数学(第二册)》目录

第九章 行列式	(1)
§ 9.1 n 阶行列式的概念	(1)
一、二阶和三阶行列式	(1)
二、排列及其逆序数	(5)
三、 n 阶行列式的概念	(7)
§ 9.2 行列式的性质	(11)
§ 9.3 行列式的展开与计算	(19)
一、行列式按行(列)展开	(19)
二、行列式的计算	(24)
§ 9.4 克莱姆法则	(30)
习题九	(37)
第十章 矩 阵	(42)
§ 10.1 矩阵的概念	(42)
一、矩阵的定义	(42)
二、特殊的矩阵	(43)
§ 10.2 矩阵的运算	(46)
一、矩阵的加法	(46)
二、矩阵的减法	(47)
三、数与矩阵的乘法	(49)
四、矩阵的乘法	(51)

五、转置矩阵	(57)
六、对称矩阵与反对称矩阵	(59)
§ 10.3 逆矩阵	(60)
一、逆矩阵的概念	(60)
二、用伴随矩阵法求逆矩阵	(61)
三、利用初等变换求逆阵	(65)
四、矩阵的秩	(68)
§ 10.4 分块矩阵	(72)
一、分块矩阵的加法	(73)
二、分块矩阵的数乘	(74)
三、分块矩阵的乘法	(74)
四、分块矩阵的转置	(77)
§ 10.5 线性方程组的矩阵解法	(77)
一、用逆阵法解线性方程组	(78)
二、用消元法解线性方程组	(80)
三、线性方程组有解的判定定理	(92)
§ 10.6 投入产出分析	(93)
一、投入产出表	(93)
二、平衡方程	(95)
三、直接消耗系数	(95)
四、解平衡方程组	(97)
五、完全消耗系数	(99)
习题十	(103)
第十一章 线性规划	(111)
§ 11.1 线性规划的数学模型及图解法	(111)

一、线性规划问题的数学模型	(111)
二、线性规划问题的标准型	(117)
三、线性规划问题的图解法	(120)
§ 11.2 单纯形法	(125)
一、 A 中含有 m 阶单位阵的情形	(126)
二、 A 中不含有 m 阶单位阵的情形	(135)
三、单纯形法的经济解释	(147)
§ 11.3 对偶线性规划问题	(150)
一、对偶问题的引例	(150)
二、对偶问题	(152)
三、对偶定理	(157)
四、用单纯形法解对偶问题	(158)
五、对偶单纯形法	(162)
六、对偶问题的经济意义	(167)
§ 11.4 灵敏度分析	(170)
一、目标函数中的系数 c_j 的灵敏度分析	(174)
二、约束条件的常数项 b_i 的灵敏度分析	(177)
三、添加新变量时的灵敏度分析	(179)
四、添加新的约束条件时的灵敏度分析	(180)
§ 11.5 运输问题的表上作业法	(182)
一、运输问题的数学模型	(183)
二、运输问题的表上作业法	(184)
§ 11.6 分配问题与匈牙利法	(195)
一、分配问题的数学模型	(195)
二、匈牙利法	(198)

习题十一.....	(207)
第十二章 随机事件及其概率	(218)
§ 12.1 随机事件.....	(219)
一、随机事件的概念.....	(219)
二、样本空间.....	(220)
三、事件的关系和运算.....	(220)
§ 12.2 概率的统计定义.....	(224)
一、频率.....	(224)
二、概率的统计定义.....	(225)
三、频率与概率的区别及联系.....	(226)
§ 12.3 概率的古典定义.....	(227)
一、古典概型.....	(227)
二、概率的古典定义.....	(227)
§ 12.4 概率的加法公式.....	(229)
§ 12.5 条件概率、乘法公式与事件的独立性.....	(232)
一、条件概率的概念.....	(232)
二、条件概率的计算公式.....	(233)
三、乘法公式.....	(234)
四、事件的独立性.....	(235)
§ 12.6 全概率公式与逆概率公式.....	(239)
一、全概率公式.....	(239)
二、逆概率公式.....	(241)
§ 12.7 贝努里概型.....	(242)
习题十二.....	(244)
第十三章 随机变量与分布及数字特征	(249)

§ 13.1 离散型随机变量及其分布	(249)
一、随机变量	(249)
二、离散型随机变量的概率分布	(251)
三、几种常用的分布	(253)
§ 13.2 连续型随机变量	(258)
一、概率密度函数	(258)
二、几种常用的分布	(259)
§ 13.3 分布函数	(267)
§ 13.4 随机变量的数学特征	(270)
一、数学期望的概念	(271)
二、几种常用分布的数学期望	(273)
三、随机变量函数的数学期望	(276)
四、数学期望的性质	(277)
五、方差的概念	(278)
六、几种常用分布的方差	(280)
七、方差的性质	(284)
习题十三	(284)
第十四章 统计估值与假设检验	(292)
§ 14.1 总体与样本	(292)
一、总体与样本	(292)
二、直观法估计总体分布	(295)
三、几个常用统计量的分布	(299)
§ 14.2 总体期望和方差的点估计	(306)
一、总体期望和方差的点估计	(307)
二、估计量的评价标准	(308)

§ 14.3 总体期望和方差的区间估计	(310)
一、总体期望的区间估计	(310)
二、总体方差的区间估计	(314)
§ 14.4 假设检验	(315)
一、假设检验的概念	(315)
二、假设检验的几种基本方法	(317)
习题十四	(324)
第十五章 回归分析	(327)
§ 15.1 一元线性回归	(327)
一、散点图与回归直线方程	(328)
二、相关系数及其显著性检验	(333)
§ 15.2 一元非线性回归	(335)
习题十五	(340)
第十六章 正交试验法	(342)
§ 16.1 正交表	(342)
一、因素、水平、交互作用	(342)
二、正交表	(346)
§ 16.2 正交试验的步骤	(348)
§ 16.3 有交互作用的试验	(356)
习题十六	(361)
习题答案	(364)
附 表	(386)

第九章 行列式

人们在生产经营管理、商品流通和交换以及各种日常活动中,经常会遇到线性方程组的求解问题。行列式是研究解决这类问题的重要数学工具之一。它不仅在经济领域,而且在其它许多学科分支中都有着十分广泛的应用。本章从二阶、三阶行列式出发,引出 n 阶行列式的概念,并讨论行列式的性质及计算方法,最后介绍利用行列式求解一类特殊的线性方程组的方法——克莱姆法则。

§ 9.1 n 阶行列式的概念

一、二阶和三阶行列式

在初等数学中,我们曾经解过二元、三元线性方程组。对于二元线性方程组

$$(I) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

用加减消元法解方程组 (I), 如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 则方程组 (I) 的解是

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \quad (9.1)$$

我们观察上述解,发现它们的分子与分母具有的数学形式,都是由两个数之积减去另外两个数之积。

定义 1 设 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 为四个数,用式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为二阶行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (9.2)$$

其中 a_{ij} 称为二阶行列式的元素, 第 1 个下标 ($i = 1, 2$) 表示元素所在的行, 第 2 个下标 ($j = 1, 2$) 表示元素所在的列。二阶行列式含有二行二列。

(9.2) 展开式可按下图记忆, 即实线(称为主对角线)上两个元素 a_{11} 与 a_{22} 之积前面带正号, 虚线(称为副对角线)上两个元素 a_{12} 与 a_{21} 之积前面带负号。(9.2) 式这种展开方法称为对角线法则。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(-)(+)

如果设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

其中 D_1 与 D_2 是用常数项 b_1, b_2 分别替换行列式 D 中 x_1 与 x_2 所在列的系数后构成的。于是, 当 $D \neq 0$ 时, 方程组 (I) 的解可表示为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases} \quad (9.3)$$

其中 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为方程组 (I) 的系数行列式。

对于三元线性方程组

$$(II) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

同二元线性方程组类似，可用消元法求出它的解，但计算量较大。仿照二阶行列式的定义，我们引进下列的记号与规定。

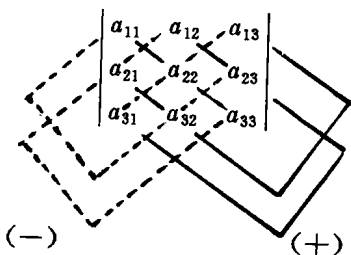
定义 2 设 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ 为九个数，则式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式，其中 $a_{ij} (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3)$ 称为三阶行列式的元素。显然三阶行列式含有三行三列。

三阶行列式也有对角线展开法，即实线上三个元素之积取正号，虚线上三个元素之积取负号，然后求和，就得到三

阶行列式的值(见下图)。



即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (9.4)$$

需要指出, 对角线法则只适用于二、三阶行列式, 不适用高于三阶行列式。

如果设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

其中 D 称为方程组(II)的系数行列式, 而 D_1, D_2, D_3 是用常数项 b_1, b_2, b_3 分别替换行列式 D 中第一、二、三列后构成的。当 $D \neq 0$ 时, 方程组(II)有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} \\ x_2 = \frac{D_2}{D} \\ x_3 = \frac{D_3}{D} \end{cases}$$

上面介绍了二阶与三阶行列式，并用二阶和三阶行列式分别表示二元和三元线性方程组的解，能否把这个结果直接推广到含有 n 个未知数、 n 个方程所组成的线性方程组中去呢？关键在于如何定义 n 阶行列式。为此，我们首先介绍有关排列的基本知识。

二、排列及其逆序数

定义 3 由自然数 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组 $(j_1 j_2 \dots j_n)$ ，称为一个 n 元排列。

例如，自然数 $1, 2, 3$ 所组成的三元排列共有 $3! = 6$ 个，它们是

1 2 3 1 3 2 2 1 3 2 3 1 3 1 2 3 2 1

一般地， n 元排列的总数为 $n!$ 个。

定义 4 在一个 n 元排列 $j_1 j_2 \dots j_n$ 中，如果某一个较大的数 j_s 排在较小的数 j_t 之前，则称这一对数 j_s, j_t 构成一个逆序。一个 n 元排列中逆序的总数，称为该排列的逆序数，记为 $\tau(j_1 j_2 \dots j_n)$ 。

给出一个 n 元排列 $j_1 j_2 \dots j_n$ ，我们可以按照下述的方法来计算它的逆序数。先观察数 1 的前面比 1 大的数的个数，记为 m_1 ，再观察 2 的前面比 2 大的数的个数，记为 $m_2, \dots$ ，

如此下去,直到 n , 显然没有比 n 大的数, 即 $m_n = 0$, 于是

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} m_i$$

例 1 计算 5 元排列 2 5 3 4 1 的逆序数。

解 $\tau(2\ 5\ 3\ 4\ 1) = 4 + 0 + 1 + 1 + 0 = 6$

例 2 求 n 元排列 $n(n-1)\cdots 3\ 2\ 1$ 的逆序数。

解 $\tau(n(n-1)\cdots 3\ 2\ 1)$
 $= (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$
 $= \frac{n(n-1)}{2}$

一个排列的逆序数在一定程序上刻划了这个排列的性质。

定义 5 逆序数是偶数的排列称为偶排列; 逆序数是奇数的排列称为奇排列。

排列 $1\ 2\ 3\ \cdots\ n$ 称为 n 元自然序排列, 显然, 它的逆序数是零, 我们规定逆序数为零的排列也是偶排列。

例如, 在 3 元排列中, 由于 $\tau(1\ 2\ 3) = 0$, $\tau(2\ 3\ 1) = 2$, $\tau(3\ 1\ 2) = 2$, 所以 $1\ 2\ 3$, $2\ 3\ 1$, $3\ 1\ 2$ 是偶排列; 而 $\tau(1\ 3\ 2) = 1$, $\tau(2\ 1\ 3) = 1$, $\tau(3\ 2\ 1) = 3$, 所以 $1\ 3\ 2$, $2\ 1\ 3$, $3\ 2\ 1$ 是奇排列。在所有的 $3! = 6$ 个 3 元排列中, 恰好有 3 个奇排列, 3 个偶排列, 这种奇偶排列各占一半的现象并非偶然, 可以证明有如下定理:

定理 1 $n (\geq 2)$ 元排列中, 奇偶排列各占一半 ($\frac{1}{2}n!$)。

证明略。

三、 n 阶行列式的概念

为了给出 n 阶行列式的定义, 我们先运用排列的知识分析三阶行列式的结构。三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (9.5)$$

容易看出:

(I) (9.5) 式右边的每一项都恰是三个元素的乘积, 这三个元素位于不同的行、不同的列。因此, (9.5) 式右端的任意项除正负号外可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 。这里第一个下标(称行标)排成自然序排列 1 2 3, 而第二个下标(称列标)排成 $j_1j_2j_3$, 它是 1, 2, 3 三个数的某个排列, 这样的排列共有 6 种, 对应(9.5)式右端共含 6 项。

(II) 各项的正负号与列标排列对照:

带正号的三项列标排列是: 1 2 3、2 3 1、3 1 2, 它们都是偶排列; 带负号的三项列标排列是: 1 3 2、2 1 3、3 2 1, 它们都是奇排列。由此可见, 各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$ 。

(III) (9.5) 式右边带正号的项与带负号的项的个数各占一半。

综上所述, 三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3)} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$