经济数学

第二册

黑龙江教育出版社

经 济 数 学

第二册

主　编　　彭秋艳　申　维
副主编　　孙占军　张　莉
　　　　　曹殿国　曾凡金
主　审　　刘兴权　刘　卓

黑龙江教育出版社

（黑）新登字第5号

经济数学
第二册

主　编　彭秋艳　申　维
责任编辑：孙[illegible]平

黑龙江教育出版社出版　东北农业大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所总发行
开本787×1092毫米1/32・印张13・字数318千字
1993年版・1993年5月第1次印刷
印数：1—2800

ISBN 7—5316—0683—3/0・5　　定价：9.8元

前　言

《经济数学》一书是按着国家教委高教司组织编写和审定的《高等学校财经专业核心课程教学大纲·经济数学基础》的教学要求，由黑龙江大学、黑龙江经济管理干部学院、黑龙江省教育学院、武汉工业大学、吉林林学院、浙江林学院、济南联合大学、华北航天工业学院、鸡西大学、宁波高等专科学校等校多年从事经济数学教学的专家、教授协作编写的经济、管理、财会、金融、计算机应用与管理等专业的数学教材。

全书分为两册，是按140—200学时编写的，具有一定的弹性。其中，第一册包括微积分，约60—80学时；第二册包括线性代数、线性规划、概率与数理统计，约80—100学时。全书力求深入浅出，通俗易懂。

全书由刘兴权副教授提出编写纲目，参加编写人员有：杨纫青、曾凡金、张莉、张凤华、张志敏、孙占军、曹殿国、申维、彭秋艳、黄纯一、李克、刘德明、秦学军等。

由于编者水平有限，时间仓促，错误在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

一九九三年五月

《经济数学(第二册)》目录

第九章　行列式

人们在生产经营管理、商品流通和交换以及各种日常活动中，经常会遇到线性方程组的求解问题。行列式是研究解决这类问题的重要数学工具之一。它不仅在经济领域，而且在其它许多学科分支中都有着十分广泛的应用。本章从二阶、三阶行列式出发，引出 n 阶行列式的概念，并讨论行列式的性质及计算方法，最后介绍利用行列式求解一类特殊的线性方程组的方法 —— 克莱姆法则。

§9.1 n 阶行列式的概念

一、二阶和三阶行列式

在初等数学中，我们曾经解过二元、三元线性方程组。

对于二元线性方程组

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

用加减消元法解方程组（Ⅰ），如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则方程组（Ⅰ）的解是

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \qquad (9.1)$$

我们观察上述解，发现它们的分子与分母具有的数学形式，都是由两个数之积减去另外两个数之积。

定义 1　设 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 为四个数，用式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{9.2}$$

其中 a_{ij} 称为二阶行列式的元素，第 1 个下标($i=1,2$) 表示元素所在的行，第 2 个下标($j=1,2$) 表示元素所在的列。二阶行列式含有二行二列。

(9.2) 展开式可按下图记忆，即实线(称为主对角线) 上两个元素 a_{11} 与 a_{22} 之积前面带正号，虚线(称为副对角线) 上两个元素 a_{12} 与 a_{21} 之积前面带负号。(9.2) 式这种展开方法称为对角线法则。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(－)　　　　(＋)

如果设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

其中 D_1 与 D_2 是用常数项 b_1，b_2 分别替换行列式 D 中 x_1 与 x_2 所在列的系数后构成的。于是，当 $D\neq 0$ 时，方程组(Ⅰ)的解可表示为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases} \tag{9.3}$$

其中$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$称为方程组（Ⅰ）的系数行列式。

对于三元线性方程组

$$(\text{Ⅱ})\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

同二元线性方程组类似，可用消元法求出它的解，但计算量较大。仿照二阶行列式的定义，我们引进下列的记号与规定。

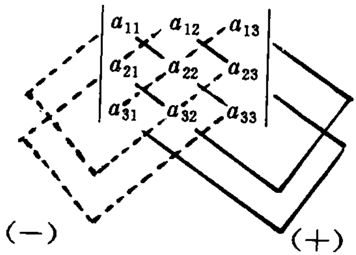
定义 2　设a_{11}，a_{12}，a_{13}，a_{21}，a_{22}，a_{23}，a_{31}，a_{32}，a_{33}为九个数，则式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式，其中$a_{ij}(i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3)$称为三阶行列式的元素。显然三阶行列式含有三行三列。

三阶行列式也有对角线展开法，即实线上三个元素之积取正号，虚线上三个元素之积取负号，然后求和，就得到三

阶行列式的值(见下图)。



即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{9.4}$$

需要指出，对角线法则只适用于二、三阶行列式，不适用高于三阶行列式。

如果设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

其中D称为方程组(Ⅱ)的系数行列式，而D_1，D_2，D_3是用常数项b_1，b_2，b_3分别替换行列式D中第一、二、三列后构成的。当$D \neq 0$时，方程组(Ⅱ)有唯一解

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\
x_2 = \dfrac{D_2}{D} \\
x_3 = \dfrac{D_3}{D}
\end{cases}
$$

上面介绍了二阶与三阶行列式，并用二阶和三阶行列式分别表示二元和三元线性方程组的解，能否把这个结果直接推广到含有 n 个未知数、n 个方程所组成的线性方程组中去呢？关键在于如何定义 n 阶行列式。为此，我们首先介绍有关排列的基本知识。

二、排列及其逆序数

定义 3　由自然数 1，2，……，n 组成的一个有序数组 $(j_1j_2\cdots\cdots j_n)$，称为一个 n 元排列。

例如，自然数 1，2，3 所组成的三元排列共有 $3!=6$ 个，它们是

123　　132　　213　　231　　312　　321

一般地，n 元排列的总数为 $n!$ 个。

定义 4　在一个 n 元排列 $j_1j_2\cdots\cdots j_n$ 中，如果某一个较大的数 j_s 排在较小的数 j_t 之前，则称这一对数 j_s，j_t 构成一个逆序。一个 n 元排列中逆序的总数，称为该排列的逆序数，记为 $\tau(j_1j_2\cdots\cdots j_n)$。

给出一个 n 元排列 $j_1j_2\cdots\cdots j_n$，我们可以按照下述的方法来计算它的逆序数。先观察数 1 的前面比 1 大的数的个数，记为 m_1，再观察 2 的前面比 2 大的数的个数，记为 m_2，……，

如此下去，直到 n，显然没有比 n 大的数，即 $m_n=0$，于是

$$\tau(j_1j_2\cdots\cdots j_n)=m_1+m_2+\cdots+m_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}m_i$$

例 1　计算 5 元排列 2 5 3 4 1 的逆序数。

解　$\tau(2\,5\,3\,4\,1)=4+0+1+1+0=6$

例 2　求 n 元排列 $n(n-1)\cdots\cdots 3\,2\,1$ 的逆序数。

解

$$\begin{aligned}&\tau(n(n-1)\cdots\cdots 3\,2\,1)\\&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\&=\frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

一个排列的逆序数在一定程序上刻划了这个排列的性质。

定义 5　逆序数是偶数的排列称为偶排列；逆序数是奇数的排列称为奇排列。

排列 1 2 3 …… n 称为 n 元自然序排列，显然，它的逆序数是零，我们规定逆序数为零的排列也是偶排列。

例如，在 3 元排列中，由于 $\tau(1\,2\,3)=0$，$\tau(2\,3\,1)=2$，$\tau(3\,1\,2)=2$，所以 1 2 3，2 3 1，3 1 2 是偶排列；而 $\tau(1\,3\,2)=1$，$\tau(2\,1\,3)=1$，$\tau(3\,2\,1)=3$，所以 1 3 2，2 1 3，3 2 1 是奇排列。在所有的 $3!=6$ 个 3 元排列中，恰好有 3 个奇排列，3 个偶排列，这种奇偶排列各占一半的现象并非偶然，可以证明有如下定理：

定理 1　$n(\geqslant 2)$ 元排列中，奇偶排列各占一半（$\frac{1}{2}n!$）。

证明略。

三、n 阶行列式的概念

为了给出 n 阶行列式的定义，我们先运用排列的知识分析三阶行列式的结构。三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{9.5}$$

容易看出：

（Ⅰ）(9.5) 式右边的每一项都恰是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行、不同的列。因此，(9.5) 式右端的任意项除正负号外可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$。这里第一个下标（称行标）排成自然序排列 1 2 3，而第二个下标（称列标）排成 $j_1j_2j_3$，它是 1，2，3 三个数的某个排列，这样的排列共有 6 种，对应(9.5) 式右端共含 6 项。

（Ⅱ）各项的正负号与列标排列对照：

带正号的三项列标排列是：1 2 3、2 3 1、3 1 2，它们都是偶排列；带负号的三项列标排列是：1 3 2、2 1 3、3 2 1，它们都是奇排列。由此可见，各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$。

（Ⅲ）(9.5) 式右边带正号的项与带负号的项的个数各占一半。

综上所述，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3)} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$