现代数学基础

17

# 实变函数论与泛函分析

下册·第二版修订本

■ 夏道行　吴卓人　严绍宗　舒五昌　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

现代数学基础

17

# 实变函数论与泛函分析

Shibian Hanshulun Yu Fanhan Fenxi

## 下册·第二版修订本

■ 夏道行 吴卓人 严绍宗 舒五昌 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

本书第一版在 1978 年出版。此次修订,是编者在经过两次教学实践的基础上,结合一些学校使用第一版所提出的意见进行的。本书第二版仍分上、下两册出版。上册实变函数,下册泛函分析。本版对初版具体内容处理的技术方面进行了较全面的细致修订。下册内容的变动有:在第六章新增了算子的扩张与膨胀理论一节,对其他一些章节也补充了材料。各章均补充了大量具有一定特色的习题。

本书可作理科数学专业,计算数学专业学生教材和研究生的参考书。

本书下册经王建午副教授初审,江泽坚教授复审,在初审过程中,陈杰教授给予甚大关注。


**图书在版编目 (CIP) 数据**

实变函数论与泛函分析. 下册 / 夏道行等编著. — 2 版 (修订本). — 北京: 高等教育出版社, 2010. 1
ISBN 978-7-04-027248-2

I. 实··· II. 夏··· III. ① 实变函数论 ② 泛函分析 IV. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 158197 号

**策划编辑** 王丽萍 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 张 楠
**版式设计** 余 杨 **责任校对** 张 颖 **责任印制** 韩 刚

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 高等教育出版社 | **购书热线** | 010-58581118 |
| **社　　址** | 北京市西城区德外大街 4 号 | **咨询电话** | 400-810-0598 |
| **邮政编码** | 100120 | **网　　址** | http://www.hep.edu.cn |
| **总　　机** | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | **网上订购** | http://www.landraco.com |
| **经　　销** | 蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| **印　　刷** | 中原出版传媒投资控股集团<br>北京汇林印务有限公司 | **畅想教育** | http://www.widedu.com |
| | | **版　　次** | 1978 年 8 月第 1 版<br>2010 年 1 月第 2 版 |
| **开　　本** | 787 × 1092　1/16 | | |
| **印　　张** | 30.25 | **印　　次** | 2010 年 1 月第 1 次印刷 |
| **字　　数** | 560 000 | **定　　价** | 46.00 元 |





**物料号　27248-00**

# 目　　录

**第四章　度量空间** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

§4.1　度量空间的基本概念 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

1. 引言 (2)　2. 距离的定义 (3)　3. 极限的概念 (5)　4. 常见度量空间 (6)　习题 4.1 (11)

§4.2　线性空间上的范数 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

1. 线性空间 (13)　2. 例 (15)　3. 赋范线性空间 (17)　4. 凸集 (20)　5. 商空间 (21)　习题 4.2 (22)

§4.3　空间 $L^p$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23

1. $L^p$ 上的范数 (23)　2. 平均收敛与依测度收敛的关系 (28)　3. 空间 $L^\infty(E,\mu)$ (29)　4. 数列空间 $l^p$ (31)　习题 4.3 (32)

§4.4　度量空间中的点集 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32

1. 内点、开集 (33)　2. 极限点、闭集 (35)　3. 子空间的开集和闭集 (39)　4. 联络点集、区域 (40)　5. 点集间的距离 (41)　6. $n$ 维欧几里得空间中的 Borel 集 (42)　7. 赋范线性空间中的商空间 (42)　习题 4.4 (44)

§4.5　连续映照 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45

1. 连续映照和开映照 (45)　2. 闭映照 (48)　3. 连续曲线 (50)　习题 4.5 (50)

§4.6　稠密性 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52

1. 稠密性的概念 (52)　2. 可析点集 (54)　3. 疏朗集 (55)　习题 4.6 (56)

§4.7　完备性 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57

1. 完备性的概念 (57)　2. 某些完备空间 (59)　3. 完备空间的重要性质 (62)

4. 度量空间的完备化 (65) 习题 4.7 (68)

§4.8 不动点定理 . . . . . . . . . . 68

1. 压缩映照原理 (68) 2. 应用 (74) 习题 4.8 (77)

§4.9 致密集 . . . . . . . . . . 79

1. 致密集的概念 (79) 2. 致密集和完全有界集 (81) 3. 某些具体空间中致密点集的特征 (84) 4. 紧集 (87) 5. 紧集上的连续映照 (89) 6. 有限维赋范线性空间 (90) 7. 凸紧集上的不动点定理 (94) 习题 4.9 (96)

§4.10 拓扑空间和拓扑线性空间 . . . . . . . . . . 98

1. 拓扑空间 (98) 2. 拓扑线性空间 (106)

**第五章 有界线性算子** . . . . . . . . . . 108

§5.1 有界线性算子 . . . . . . . . . . 108

1. 线性算子与线性泛函概念 (108) 2. 线性算子的有界性与连续性 (111) 3. 有界线性算子全体所成的空间 (116) 习题 5.1 (121)

§5.2 连续线性泛函的表示及延拓 . . . . . . . . . . 123

1. 连续线性泛函的表示 (123) 2. 连续线性泛函的延拓 (129) 3. 泛函延拓定理的应用 (137) 4. 测度问题 (143) 习题 5.2 (145)

§5.3 共轭空间与共轭算子 . . . . . . . . . . 148

1. 二次共轭空间 (148) 2. 算子序列的收敛性 (149) 3. 弱致密性 (弱列紧性) (153) 4. 共轭算子 (155) 习题 5.3 (157)

§5.4 逆算子定理和共鸣定理 . . . . . . . . . . 158

1. 逆算子定理 (158) 2. 共鸣定理 (165) 3. 共鸣定理的应用 (167) 习题 5.4 (172)

§5.5 线性算子的正则集与谱, 不变子空间 . . . . . . . . . . 175

1. 特征值与特征向量 (175) 2. 算子的正则点与谱点 (178) 3. 不变子空间 (191) 习题 5.5 (195)

§5.6 关于全连续算子的谱分析 . . . . . . . . . . 196

1. 全连续算子的定义和基本性质 (196) 2. 全连续算子的谱 (202) 3. 全连续算子的不变闭子空间 (208) 习题 5.6 (213)

**第六章 Hilbert 空间的几何学与算子** . . . . . . . . . . 215

§6.1 基本概念 . . . . . . . . . . 215

1. 内积与内积空间 (216) 2. Hilbert 空间 (218) 习题 6.1 (222)

§6.2 投影定理 . . . . . . . . . . 223

1. 直交和投影 (223) 2. 投影定理 (225) 习题 6.2 (229)

§6.3　内积空间中的直交系 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 231

1. 就范直交系 (231)　2. 直交系的完备性 (234)　3. 直交系的完全性 (239)　4. 线性无关向量系的直交化 (241)　5. 可析 Hilbert 空间的模型 (242)　习题 6.3 (244)

§6.4　共轭空间和共轭算子 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 246

1. 连续线性泛函的表示 (246)　2. 共轭空间 (247)　3. 共轭算子 (247)　4. 有界自共轭算子 (252)　习题 6.4 (253)

§6.5　投影算子 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 256

1. 投影算子的定义和基本性质 (256)　2. 投影算子的运算 (259)　3. 投影算子与不变子空间 (265)　习题 6.5 (267)

§6.6　双线性 Hermite 泛函与自共轭算子 . . . . . . . . . . . . . . 269

1. 双线性 Hermite 泛函 (269)　2. 有界二次泛函 (273)　习题 6.6 (275)

§6.7　谱系、谱测度和谱积分 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 275

1. 几个例 (275)　2. 谱测度 (278)　3. 谱系 (284)　4. 谱系和谱测度的关系 (287)　习题 6.7 (291)

§6.8　酉算子的谱分解 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 293

1. 酉算子的定义 (293)　2. 酉算子的谱分解 (295)　3. 相应于酉算子的谱测度 (303)　4. $L^2$-Fourier 变换 (305)　5. 平稳随机序列 (307)　6. 平移算子 (308)　习题 6.8 (313)

§6.9　自共轭算子的谱分解 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 315

1. 引言 (315)　2. 共轭算子 (316)　3. 对称算子与自共轭算子 (320)　4. Cayley 变换 (323)　5. 无界函数谱积分 (330)　6. 自共轭算子的谱分解定理 (333)　7. 函数模型 (338)　8. 全连续自共轭算子 (342)　习题 6.9 (343)

§6.10　正常算子的谱分解 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 345

1. 正常算子 (345)　2. 乘积谱测度 (347)　3. 正常算子的谱分解 (350)　4. 算子代数 (352)　习题 6.10 (353)

§6.11　算子的扩张与膨胀 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 354

1. 闭扩张 (354)　2. 半有界算子的自共轭扩张 (358)　3. 广义谱系的扩张谱系 (365)　4. 压缩算子的酉膨胀 (378)　习题 6.11 (378)

**第七章　广义函数** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 382

§7.1　基本函数与广义函数 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 382

1. 引言 (382)　2. 基本函数空间 (384)　3. 局部可积函数空间 (386)　4. 广义函数空间 (388)　习题 7.1 (390)

§7.2　广义函数的性质与运算 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 391

1. 广义函数的导函数和广义函数列的极限 (391)　2. 广义函数的原函数 (395)

# 第四章　度量空间

从这一章开始我们将要介绍泛函分析. 泛函分析是现代数学中的一个较新的重要分支. 它起源于经典数学物理中的变分问题、边值问题, 概括了经典数学分析、函数论中的某些重要概念、问题和成果, 又受到量子物理学、现代工程技术和现代力学的有力刺激. 它综合地运用分析的、代数的和几何的观点和方法, 研究分析数学、现代物理和现代工程技术提出的许多问题. 从本世纪中叶开始, 偏微分方程理论, 概率论 (特别是随机过程理论) 以及一部分计算数学, 由于运用了泛函分析而得到了大发展. 现在, 泛函分析的概念和方法已经渗透到现代纯粹数学与应用数学、理论物理及现代工程技术理论的许多分支, 如微分方程、概率论、计算数学、量子场论、统计物理学、抽象调和分析、现代控制理论、大范围微分几何学等方面. 现在泛函分析对纯粹数学及应用数学中的影响, 好像本世纪初叶集论、点集论对后来数学的影响那样. 同时泛函分析本身也不断地深入发展. 例如算子谱理论以及各种表示理论已经达到相当深入的程度.

泛函分析大体分为线性泛函分析和非线性泛函分析两大部分, 线性泛函分析比起非线性泛函分析来说要成熟得多, 也更基本一些, 这是自然的. 一般来说, 因为对于数学和数学物理中许多问题, 人们大抵都是先作一次近似把它 “线性化”; 而线性问题总是比非线性问题容易研究得多, 因而迄今所获得的成果也就要丰富得多. 本书中除个别地方外几乎全部讨论线性泛函分析.

线性泛函分析主要是讨论有关线性算子 —— 线性泛函是它的特殊情况 —— 以及更加复杂的算子空间、算子代数的一些问题, 如谱理论和表示理论等. 线性算子是线性空间到线性空间的一种线性映照 (见第五章). 正如同研究函数时必

需研究直线上的点集一样, 为了研究算子, 我们必需首先讨论算子的定义域——无限维空间的结构, 特别是描述有关极限 (拓扑) 概念的一些理论. 本章中着重讲述度量空间, 它是用距离来描述极限过程的. 这对于大多数情况下已经够用了. 对于更一般的拓扑空间以及泛函分析中近些年来日渐用得较多的更加专门的局部凸线性拓扑空间理论, 只能极其简略地介绍一点有关的基本概念.

## §4.1 度量空间的基本概念

**1. 引言** 极限是数学分析中基本概念之一. 实数列的收敛, 函数列的均匀收敛, 在平面区域中复变函数列的内闭均匀收敛等等各种极限概念, 都可以统一在下面要介绍的度量空间内按距离收敛的概念之中. 有些概念, 如在第一章中所讨论过的直线上点列的收敛性、开集、闭集、稠密和疏朗等, 在一般的度量空间里也可以引进这些概念. 我们在度量空间里引进了相应的概念, 并建立了相应的理论, 就可以进一步对每个具体空间引出相应的结论. 还有一些概念, 是在这一章中新引进的, 如范数、完备性、致密性等. 有一些空间, 如连续函数空间 $C[a,b]$, 可积函数空间 $L(X,\boldsymbol{B},\mu)$ 等, 都是很重要的, 它们与有限维欧几里得空间有本质的区别. 分析数学方面各个学科都是以某种函数空间为对象而研究在这种空间上的某种数学运算的.

现在先介绍空间中两点间距离的概念. $n$ 维欧几里得空间中两点间距离的概念可能已为大家所熟悉, 为了下面叙述的方便, 有必要简单回顾一下.

设平面 $E^2$ 中两点 $x=(x_1,x_2)$ 和 $y=(y_1,y_2)$ 间的距离是

$$\rho(x,y)=[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]^{\frac{1}{2}},$$

那么, 距离 $\rho(x,y)$ 具有如下的性质:

(i) $\rho(x,y)\geqslant 0$, 而且 $\rho(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$;

(ii) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z)$.

其中 (ii) 就是三角不等式.

我们知道, 平面上的点列 $\{x^{(n)}\}$ 趋向于极限点 $x$ 的充要条件为

$$\rho(x^{(n)},x)\to 0\quad(n\to\infty).$$

对连续函数族常用的极限概念之一是均匀收敛 (即一致收敛). 设 $C[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上连续函数全体, 对于 $x,y\in C[a,b]$ 记

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|,\tag{4.1.1}$$

这里的 $\rho(x,y)$ 也有上面所指出的两个性质. 如果 $x_n(t)(n=1,2,3,\cdots),x(t)\in C[a,b]$, 那么 $\{x_n(t)\}$ 均匀收敛于 $x(t)$ 的充要条件显然是

$$\rho(x_n,x)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

我们称由 (4.1.1) 所定义的 $\rho(x,y)$ 为函数空间 $C[a,b]$ 中两 "点" $x$ 和 $y$ 间的距离, 它表示平面曲线 $\xi=x(t)$ 和 $\xi=y(t)$ 上横坐标相同的两点之间的最大距离 (如图 4.1).

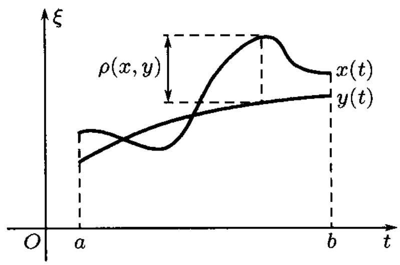


图 4.1

再举一个例子. 设 $L(X,\boldsymbol{B},\mu)$ 是测度空间 $(X,\boldsymbol{B},\mu)$ 上的可积函数全体. 对于 $x,y\in L(X,\boldsymbol{B},\mu)$, 定义

$$\rho(x,y)=\int_X|x(t)-y(t)|\mathrm{d}\mu, \tag{4.1.2}$$

容易验证, 它也满足前面说的两个性质. 对于 $x_n(n=1,2,3\cdots)$, $x\in L(X,\boldsymbol{B},\mu)$, 当

$$\rho(x_n,x)=\int_X|x_n(t)-x(t)|\mathrm{d}\mu\to 0 \quad (n\to\infty),$$

我们称 $\{x_n(t)\}$ (在 $X$ 上按 $\mu$ 的积分) 平均收敛于 $x(t)$.

上面各种情况, $\rho$ 的意义是不相同的, 但它们有共同的特点. 如果把函数族 $C[a,b]$、$L(X,\boldsymbol{B},\mu)$ 看成抽象的空间. 把其中的函数看成是空间的点, 那么 $\rho(x,y)$ 便可以看成是两点之间的距离. 从上面看到, 不少过去所学过的极限过程能够用距离来描述, 而且与这些极限有关的概念和结果, 实质上也仅仅利用了它们类似于距离的性质 (i)、(ii). 因此, 为了深入研究各种极限过程, 把在上述这些具体空间中所定义的距离函数 $\rho$ 抽象化, 推而广之, 对一般的集引进点与点之间的距离, 这就产生了距离空间或度量空间 (因为距离 $R$ 是一种度量) 的概念.

**2. 距离的定义** 设 $R$ 是一个非空的集. 假如对于 $R$ 中任意一对元素 $x$, $y$, 都给定一个实数 $\rho(x,y)$ 与它们对应, 而且适合如下的条件:

1° $\rho(x,y)\geqslant 0$ 又 $\rho\,(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$;

2° 成立三角不等式:

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z)+\rho(y,z) \quad (z \in R). \tag{4.1.3}$$

那么称 $\rho(x,y)$ 是两点 $x$, $y$ 之间的**距离**, 又称 $R$ 按照距离 $\rho(x,y)$ 成为**度量空间**或**距离空间**, 记为 $(R,\rho)$, 或者简单地记作 $R$. $R$ 中的元素称为**点**.

由性质 1° 与 2° 可以推出, 距离还有对称性: 对 $R$ 中任意的 $x$, $y$, 成立着

3° $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

事实上, 在 2° 中取 $z=x$, 就有 $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,x)+\rho(y,x)$, 由 1° 知道 $\rho(x,x)=0$, 所以得到

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(y,x),$$

由于 $x,y$ 是任意的, 在上面不等式中, 互换 $x,y$ 后, 我们又得到

$$\rho(y,x) \leqslant \rho(x,y),$$

两式结合起来就得到 3°.

在假设 1° 的前提下, 下面的不等式 4° 是与三角不等式 2° 等价的 (读者自己证明).

4° 对任何 $x$, $y$, $z \in R$,

$$|\rho(x,y)-\rho(y,z)| \leqslant \rho(x,z).$$

度量空间 $R$ 的任何非空子集 $M$, 就以 $R$ 中距离 $\rho$ 作为 $M$ 上的距离, 显然 $(M,\rho)$ 也是度量空间, 称 $(M,\rho)$ (或 $M$) 为 $R$ 的**子空间**.

对任何非空集 $R$, 可引入如下的距离:

$$\rho_0(x,y)=\begin{cases}0, & x=y \in R,\\ 1, & x \neq y, x,y \in R,\end{cases}$$

(读者可直接验证上面的 $\rho_0$ 是 $R$ 上的距离).

在一个度量空间 $R$ 中, 如果存在正的常数 $\alpha$, 使得任何 $x$, $y \in R, x \neq y$, 都有 $\rho(x,y) \geqslant \alpha$ 时, 称 $R$ 是**一致离散**的距离空间. 例如对任何非空集 $R$, $(R,\rho_0)$ 是一致离散的距离空间.

如果在一个空间中同时定义了两个距离函数 $\rho(x,y)$ 及 $\rho_1(x,y)$, 而且 $\rho(x,y) \neq \rho_1(x,y)$, 那么 $R$ 按 $\rho(x,y)$ 所成的度量空间 $(R,\rho)$ 同 $R$ 按 $\rho_1$ 所成的度量空间 $(R,\rho_1)$ 应该看成不同的度量空间. 一般地说, 如果 $R$ 中不止一点, 那么在 $R$ 中可以引进许多距离, 成为不同的度量空间.

**定义 4.1.1** 设 $(R,\rho)$ 及 $(R_1,\rho_1)$ 是两个度量空间, $\varphi$ 是 $R$ 到 $R_1$ 的映照. 如果对每个 $x, y \in R$, 成立着

$$\rho(x,y) = \rho_1(\varphi x, \varphi y),$$

那么称 $\varphi$ 是 $(R,\rho)$ 到 $(R_1,\rho_1)$ 上的**等距映照**. 进一步, 如果还有 $\varphi(R) = R_1$, 那么称这两个度量空间是**等距同构**的.

在泛函分析的一些问题中有时发现, 两个度量空间, 从形式上看, 两个集中的元素可以完全不同, 但是从度量空间结构看, 它们又是等距同构的. 特别是当其中一个空间比较"抽象"一些, 另一个空间比较"具体"一些时, 就把这两个等距同构的空间一致化, 把其中一个"抽象"空间中的元素 $x$ 与经过等距映照 $\varphi$ 后得到的较具体空间中的元素 $\varphi x$ 同一化, 这样就可以把抽象的空间用具体的空间来表示. 这在进行论证时在技术上往往有较大的好处, 因为可以利用较具体的空间中的某些已经讨论过的性质来研究抽象空间中的一些问题.

**3. 极限的概念**

**定义 4.1.2** 设 $R$ 是一个度量空间, $x_n (n = 1,2,3,\cdots)$, $x \in R$, 假如当 $n \to \infty$ 时数列 $\rho(x_n, x) \to 0$, 就说点列 $\{x_n\}$ **按照距离** $\rho(x,y)$ **收敛于**记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

或 $x_n \to x$. 这时称 $\{x_n\}$ 为**收敛点列**, $x$ 为 $\{x_n\}$ 的**极限**.

**定理 4.1.1** 在度量空间中, 任何一个点列 $\{x_n\}$ 最多只有一个极限, 即收敛点列的极限是唯一的.

**证** 设 $x, y$ 都是 $\{x_n\}$ 的极限, 由条件 1°、2° 和 3°, 有

$$0 \leqslant \rho(x,y) \leqslant \rho(x_n,x) + \rho(x_n,y),$$

当 $n \to \infty$ 时, $\rho(x_n,x) \to 0, \rho(x_n,y) \to 0$, 必然 $\rho(x,y) = 0$, 因此 $x = y$.

**定理 4.1.2** 如果 $x_n \to x_0, y_n \to y_0$, 那么 $\rho(x_n,y_n) \to \rho(x_0,y_0)$ (也就是说, 距离 $\rho(x,y)$ 是两个变元 $x, y$ 的"连续函数").

**证** 由 (4.1.3) 可以得到

$$\rho(x_n,y_n) \leqslant \rho(x_n,x_0) + \rho(x_0,y_0) + \rho(y_n,y_0),$$

类似地有

$$\rho(x_0,y_0) \leqslant \rho(x_0,x_n) + \rho(x_n,y_n) + \rho(y_n,y_0),$$

由这两个不等式得到

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0)| \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0),$$

令 $n \to \infty$, 就得到所要证明的结论.

**定义 4.1.3** 设 $R$ 为度量空间, $x_0$ 是 $R$ 中的点. 对于有限的正数 $r$, 我们把集 $\{x|x \in R, \rho(x, x_0) < r\}$ 称作一个**开球**, 它的中心是 $x_0$, 半径是 $r$, 把它记作 $O(x_0, r)$. 也把球 $O(x_0, r)$ 称作 $x_0$ 的 **r-环境**.

当 $R$ 是实数直线, 或 $n$ 维欧几里得空间时, 开球是大家熟悉的, 但在一般的度量空间中, 开球可能只含一点. 例如前面提到的一致离散的度量空间, 对于不同的两点 $x$, $y, \rho_0(x, y) = 1$, 于是对于任何正数 $r < 1$, 每一点 $x_0$ 的 $r$-环境 $O(x_0, r)$ 中只能含有一点.

**定义 4.1.4** 设 $M$ 是度量空间 $R$ 中的点集, 如果 $M$ 包含在某个开球 $O(x_0, r)$ 中, 则称 $M$ 是 $R$ 中的**有界集**.

我们知道收敛数列是有界的. 更一般地, 在度量空间中有如下定理.

**定理 4.1.3** 设 $\{x_n\}$ 为度量空间 $R$ 中收敛点列, 那么 $\{x_n\}$ 是有界的.

**证** 设 $x_n \to x_0$ 那么由收敛的定义, 有自然数 $N$, 使得当 $n \geqslant N$ 时, $\rho(x_n, x_0) \leqslant 1$, 取 $r = \max(1, \rho(x_0, x_1), \cdots, \rho(x_0, x_{N-1})) + 1$, 那么 $\{x_n\}$ 包含在球 $O(x_0, r)$ 中. 证毕

**4. 常见度量空间** 在第一段中, 我们已经知道了几个度量空间, 如平面 $E^2$, $C[a, b], L(X, \boldsymbol{B}, \mu)$. 如果没有特别说明, 它们的距离都是指在这些例中所分别规定的. 下面再举一些常见的例子.

**例 1** 在 $n$ 维欧几里得空间 $E^n$ 中, 对于

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n),$$

规定距离

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu - y_\nu|^2}.$$

这个 $\rho(x, y)$ 称为欧几里得距离.

我们来验证这里的 $\rho(x, y)$ 确实适合距离的两个条件. 距离的条件 1° 是容易验证的. 现在验证 2°.

由 Cauchy 不等式[1]

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2\\ &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2,\end{aligned}$$

取 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n), a_i=z_i-x_i, b_i=y_i-z_i$, 那么

$$y_i - x_i = a_i + b_i$$

代入上面的不等式, 就得到三角不等式 2°.

从不等式

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leqslant \sqrt{n}\max_{i}|x_i|$$

立即知道, 在 $E^n$ 中按距离收敛就是按每个坐标收敛.

**例 2** 设 $E^1$ 是实数全体, 在 $E^1$ 上另外规定一种距离 $\rho_1$ 如下, 当 $x, y \in E^1$ 时

$$\rho_1(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

显然 $\rho_1$ 满足距离的条件 1°, 为了证明 $\rho_1$ 满足三角不等式, 我们只要证明, 对于任意的复数 $a, b$, 成立着不等式:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}. \tag{4.1.4}$$

---

[1] Cauchy 不等式可由下面的恒等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j - a_j b_i)^2$$

推出. 这个恒等式是不难用数学归纳法证明的. 当然, Cauchy 不等式还可利用 $\lambda$ 的二次多项式 $\sum_{i=1}^{n}(a_i+\lambda b_i)^2 = \varphi(\lambda)$ 的非负性的判别式得到.

事实上, 由于在实数区间 $x \geqslant 0$, 即 $[0,\infty)$ 上的函数

$$\varphi(x)=\frac{x}{1+x}$$

是单调增加函数, 由不等式 $|a+b| \leqslant |a|+|b|$, 我们得出

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\\ &=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\\ &\leqslant \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|},\end{aligned}$$

所以 (4.1.4) 成立. 这样 $E^1$ 按照距离 $\rho_1$ 所定义的度量空间与例 1 中的 $E^1$ 按照距离 $\rho$ 所定义的度量空间不同, 但是可以证明 (读者自己证明) 它们所引出的极限概念实质上是一致的, 就是说, 当 $\{x_n\} \subset E^1, x_0 \in E^1$ 时, $\rho_1(x_n,x_0) \to 0$ 和 $|x_n - x_0| \to 0$ 是等价的. (注意, 我们后面用到 $E^1$ 中的距离时, 是指 $\rho(x,y)=|x-y|$, 而不是这里的 $\rho_1$.)

**例 3 (空间 $C^{(k)}[a,b]$)**　设 $k$ 是一个非负整数, $x(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 而且具有连续的 $k$ 阶导函数 (当 $k=0$ 时就表示只要求 $x(t)$ 本身连续), 这种函数 $x(t)$ 的全体记为 $C^{(k)}[a,b]$, 特别简记 $C^0[a,b]$ 为 $C[a,b]$. 对于 $x(t), y(t) \in C^{(k)}[a,b]$, 令

$$\rho_k(x,y)=\max_{0\leqslant j\leqslant k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(j)}(t)-y^{(j)}(t)|,$$

容易证明 $\rho_k(x,y)$ 是距离. 在 $C^{(k)}[a,b]$ 中函数列 $\{x_n(t)\}$ 依距离收敛于 $x(t)$ 的充要条件是, $\{x_n(t)\}$ 以及它们的前 $k$ 阶导函数列在 $[a,b]$ 上都分别均匀收敛于 $x(t)$ 及其前 $k$ 阶导函数.

**例 4**　设 $s$ 为实数列 $\{x_\nu\}$ 的全体 (或复数列全体) 所成的空间. 称 $x_\nu$ 为点 $x=\{x_\nu\}$ 的第 $\nu$ 个坐标. 在 $s$ 中定义距离如下: 对于 $x=\{x_\nu\}, y=\{y_\nu\}$, 令

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}.$$

现在来验证如此定义的 $\rho(x,y)$ 是一个距离. 事实上, 可以仿照例 2 的办法来验证三角不等式

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-z_i+z_i-y_i|}{1+|x_i-z_i+z_i-y_i|}\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\left(\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}+\frac{|z_i-y_i|}{1+|z_i-y_i|}\right)\\ &= \rho(x,z)+\rho(y,z).\end{aligned}$$

我们来证明在空间 $s$ 中点列按距离收敛等价于按坐标收敛. 这就是说, 设点列 $x^{(n)}=\{x_i^{(n)}\}\in s, n=1,2,3,\cdots$, 又 $x\in s, x=\{x_i\}$ 那么 $\rho(x^{(n)},x)\to 0(n\to\infty)$ 的充分必要条件是: 对每个自然数 $i$

$$\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)}=x_i.$$

事实上, 如果

$$\rho(x^{(n)},x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\to 0 \quad (n\to\infty),$$

那么, 对每一个 $i$, 由于 $\dfrac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\leqslant 2^i\rho(x^{(n)},x)$, 我们得到 $\dfrac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\to 0(n\to\infty)$, 于是, 对于给定的正数 $\varepsilon$, 不妨设 $\varepsilon<1$, 有自然数 $N$, 使得当 $n>N$ 时成立着

$$\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\varepsilon.$$

从而有

$$|x_i^{(n)}-x_i|<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad i=1,2,3,\cdots.$$

这说明对每个 $i=1,2,3,\cdots$, 当 $n\to\infty$ 时, $x_i^{(n)}\to x_i$.

反过来, 设 $x_i^{(n)}\to x_i(n\to\infty), i=1,2,3,\cdots$. 因为对任一正数 $\varepsilon$, 存在自然数 $m$, 使得

$$\sum_{i=m}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2},$$

又对每个 $i=1,2,\cdots,m-1$, 存在着 $N_i$, 使得当 $n>N_i$ 时

$$|x_i^{(n)}-x_i|<\frac{\varepsilon}{2},$$

取 $N=\max\{N_1,\cdots,N_{m-1}\}$, 那么当 $n>N$ 时

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以, 当 $n>N$ 时, 有

$$\rho(x^{(n)},x)=\left(\sum_{i=1}^{m-1}+\sum_{i=m}^{\infty}\right)\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\varepsilon.$$

**例 5** 设 $\mathscr{A}$ 是单位圆 $|z|<1$ 中解析函数的全体. 当 $f(z), g(z) \in \mathscr{A}$ 时, 定义

$$\rho(f,g)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\max_{|z|\leqslant 1-\frac{1}{i}}\frac{|f(z)-g(z)|}{1+|f(z)-g(z)|},$$

类似于例 4, 可以证明 $\rho(f,g)$ 满足条件 1° 及 2°, 因而 $\mathscr{A}$ 关于 $\rho(f,g)$ 成一度量空间.

点列 $\{f_k(z)\}$ 按距离收敛于 $f(z)$ (即 $\rho(f_k,f)\to 0$) 的充要条件是: $\{f_k(z)\}$ 在单位圆 $|z|<1$ 中任一闭区域 $\Omega$ 上均匀收敛于 $f(z)$ (通常称 $\{f_k(z)\}$ 在 $|z|<1$ 中内闭均匀收敛于 $f(z)$). 事实上, 类似于例 4, 易知 $\rho(f_k,f)\to 0$ 的充要条件是对每一个 $i$ 成立着

$$\max_{|z|\leqslant 1-\frac{1}{i}}|f_k(z)-f(z)|\to 0 \quad (k\to\infty),$$

这等价于 $\{f_k(z)\}$ 内闭均匀收敛于 $f(z)$.

**例 6** 设 $C^{\infty}[a,b]$ 是区间内无限次可微分函数的全体, 定义

$$\rho(f,g)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu}}\max_{t\in[a,b]}\frac{|f^{(\nu)}(t)-g^{(\nu)}(t)|}{1+|f^{(\nu)}(t)-g^{(\nu)}(t)|}.$$

容易知道 $\rho(f,g)$ 是 $C^{\infty}[a,b]$ 中的距离函数. 而对于 $C^{\infty}[a,b]$ 中点列 $\{x_n(t)\}$ 按距离收敛于 $x(t)\in C^{\infty}[a,b]$ 的充要条件是对每个非负整数 $p$, 在 $[a,b]$ 上 $\{x_n^{(p)}(t)\}$ 均匀收敛于 $x^{(p)}(t)(x_n^{(0)}(t)=x_n(t))$. 这一点留给读者自己去证明.

可测函数列依测度收敛的概念也可以用适当的距离的收敛来描述.

**例 7** 设 $(X,\boldsymbol{R},\mu)$ 是测度空间, $E$ 是可测集, $\mu(E)<\infty, S$ 是 $E$ 上的实值的 (或复值的) 可测函数全体. 当 $f(t), g(t)$ 在 $E$ 上几乎处处相等时, 把 $f, g$ 看成 $S$ 中的同一点, 当 $f, g\in S$ 时, 规定

$$\rho(f,g)=\int_E\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}\mathrm{d}\mu.$$

由于 $\dfrac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}$ 是有界可测函数, $\mu(E)<\infty$, 所以 $\rho(f,g)$ 有确定的意义, 相仿于例 4, 容易证明, 这个 $\rho(f,g)$ 确实满足距离的条件.

我们要证明在空间 $S$ 中, $\rho(f_n,f)\to 0$ 的充要条件是 $f_n$ 依测度 $\mu$ 收敛于 $f$.

事实上, 如果 $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$, 由于 $\dfrac{|f_n(t)-f(t)|}{1+|f_n(t)-f(t)|}\leqslant 1$, 和 $\mu(E)<\infty$, 由有界控制收敛定理立即知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(f_n,f)=0$.

反过来, 如果 $\rho(f_n,f)\to 0$, 那么, 对任何 $\sigma>0$, 由于

$$\begin{aligned}\rho(f_n,f) &\geqslant \int_{E(|f_n-f|\geqslant\sigma)}\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}\mathrm{d}\mu\\ &\geqslant \frac{\sigma}{1+\sigma}\mu(E(|f_n-f|\geqslant\sigma)),\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 就知道函数列 $f_n(t)$ 在 $E$ 上依测度 $\mu$ 收敛于 $f(t)$.

综上所见, 虽然在一些集上可以随心所欲地根据距离的定义引进距离使得它成为度量空间, 但是这样做并不见得有什么意义. 有意义的往往是为了某个目的而引进所需要的距离. 在分析数学以及应用中最常用到的空间还是函数空间或者序列空间等. 为了要描述和研究函数列的某种特定的收敛概念 (如前面已经提到的一致收敛、平均收敛和依测度收敛等等) 而引进相应的距离才能做到有的放矢.

## 习 题 4.1

1. 证明例 6 中按距离收敛等价于各阶导函数均匀收敛.

2. 在三维欧几里得空间考虑任一球面 $S$. 对于 $x,y\in S$, 规定 $x,y$ 间的距离 $d(x,y)$ 是过 $x$、$y$ 两点的大圆上以 $x,y$ 为端点的劣弧的弧长. 证明 $d(x,y)$ 是 $x,y$ 间的距离, 它不是欧几里得距离. 如果用 $\rho(x,y)$ 表示欧几里得距离 (见例 1), 那么

$$\rho(x,y)\leqslant d(x,y)\leqslant\frac{\pi}{2}\rho(x,y).$$

从而证明: $S$ 中点列 $\{x_n\}$ 按距离 $d(x,y)$ 收敛于 $x$ 的充要条件是按坐标收敛于 $x$.

3. 设 $R$ 是一度量空间, 距离为 $\rho(x,y)$. 试证: 对于固定的 $x_0$, 函数 $x\mapsto\rho(x_0,x)$ 是 $R$ 上 $x$ 的连续函数 (即当 $\rho(x_n,x)\to 0(n\to\infty)$ 时, $\rho(x_0,x_n)\to\rho(x_0,x)(n\to\infty)$).

4. 设 $\rho(x,y)$ 为空间 $R$ 上的距离, 证明

$$\widetilde{\rho}(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

适合距离的条件 1°、2°, 并且按 $\widetilde{\rho}$ 收敛等价于按 $\rho$ 收敛 (注意, 全空间 $R$ 按 $\rho$ 可能是无界的, 而 $R$ 按 $\widetilde{\rho}$ 是有界的, 由 $\rho$ 作 $\widetilde{\rho}$ 是把无界的 $R$ 变成有界的 $R$ 而又保持收敛性等价的常用办法之一).

5. 设 $R$ 是 $n$ 维空间 $E^n$ 中的一族函数, 其中每个函数 $\varphi(x)$ 在区域 $|x|\geqslant a>0$ 上等于零, 并且 $\varphi(x)$ 在 $E^n$ 上是任意次可微的. 令

$$\rho(\varphi,\psi)=\sum_p\frac{1}{N(p)!}\frac{\max\limits_x|D^p(\varphi-\psi)|}{1+\max\limits_x|D^p(\varphi-\psi)|}\quad(\varphi,\psi\in R),$$

这里 $D^p=\dfrac{\partial^{N(p)}}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}, N(p)=p_1+\cdots+p_n, p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$, 而且 $p_1,p_2,\cdots,p_n\geqslant 0$ 且都是整数, 证明: $R$ 是一度量空间; 在 $R$ 中点列 $\{\varphi_n\}$收敛的概念等价于 $\varphi_n(x)$ 及其各阶偏导数 $D^p\varphi_n(x)$ 均匀收敛.