

**小结论** 是数学中的小定理  
是快速解题的金钥匙

# 速 + 解 ÷ 宝 × 典

高中数学经典小结论

主编 李冬胜

必修 1  
必修 2



山西出版集团 山西人民出版社

ISBN 978-7-203-06547-0



9 787203 065470 >

定价：18.00元

# 速解宝典

高中数学经典小结论

主编 李冬胜

必修 1  
必修 2

## 图书在版编目(CIP)数据

速解宝典:高中数学经典小结论. 必修1、必修2/李冬胜主编. —  
太原:山西人民出版社,2009.8

ISBN 978-7-203-06547-0

I. 速… II. 李… III. 数学课-高中-教学参考资料

IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 130901 号

## 速解宝典:高中数学经典小结论(必修1、必修2)

---

主 编:李冬胜

责任编辑:樊 中

装帧设计:李英伟

---

出 版 者:山西出版集团·山西人民出版社

地 址:太原市建设南路 21 号

邮 编:030012

发行营销:0351-4922220 4955996 4956039

0351-4922127 (传真)

E-mail: sxskcb@163.com 发行部

sxskcb@126.com 总编室

网 址:www.sxskcb.com

售书热线:0351-4725195 4725191 4725195(邮购)

---

经 销 者:山西出版集团·山西人民出版社

承 印 者:太原市泓兴印业有限公司

---

开 本:880mm×1230mm 1/32

印 张:8.375

字 数:182千字

印 数:1-5000册

版 次:2009年8月 第1版

印 次:2009年8月 第1次印刷

书 号:ISBN 978-7-203-06547-0

定 价:18.00元

---

如发现印装质量问题,影响阅读,请与发行部联系调换。



## 前 言

当今的考试是在掌握课本中的定义、定理和公式的基础上,可以利用与高中数学知识纵横联系的“派生”出来的小结论,简化并快捷解题。这些小结论源于课本,而又高于课本,掌握了这些知识,对于快速解题,提高对数学知识的理解具有极为重要的作用。

所谓小结论,是指对课本知识的深化、引申及推广的一些数学知识,包括经验公式和规律等。关于小结论,我们需要明确以下三点:

首先,小结论并不小。它如同数学定理、公式一样,是在课本知识的基础上产生的一些具有规律性的课外数学知识。

其次,小结论作用大。它是快速解题的强有力的工具,尤其是对选择题、填空题的作用很大。

再次,小结论用途广。它不是简单的、单一的知识,而是一些基础知识“组合群”,呈递进关系,用途极为广泛。

经过多年的研究,我们发现,小结论有如下作用:

1. 简化数学运算的程序;
2. 简约数学思维的过程;
3. 简捷数学方法的选择。

本丛书是针对当前数学教育教学的实际,以及学生学习中存在的广而不深、探索和发现规律困难等问题进行设计的。在策划与成书过程中,得到了山西出版集团报刊中心主任、《学习报》总编辑孙志勇先生的大力支持和帮助;在作者的选择协调以及具体写作过程中,得到





了天津市张克良先生的大力相助、鼓励和支持。由于本丛书的写作难度很大,八位作者付出了比常态情况下数倍的心血,将他们多年研究和发现的数学规律一并奉献给读者,许多结论是首创的,具有较大的应用价值,在此一并表示衷心的感谢。小结论是数学中的小定理,是快速解题的金钥匙。研读这些结论不仅可以帮助我们深刻理解数学知识,而且可运用其快速解题,同时可以引导我们提出问题、发现规律,合理地进行一些数学创造。

由于认识问题的角度、深度不同,不足之处敬请广大读者批评指正。



## 作者简介



李冬胜,1960年生,1982年山西师范大学数学系毕业,现为太原外国语学校高中数学特级教师。教育部中学教材审定委员会成员,中国数学会会员,山西省中学数学教学研究会理事,全国优秀教师,山西省劳动模范。

在教育教学中,不断更新知识,提升理念,积极从事教育教研活动,先后承担“思维与数学教学”、“高中数学构造法解题教学研究”等多个课题的研究,收到了良好的效果。首次提出“数学教育中的模糊思维”(1992年)、“思维素质”(1996年)的理论,被全国教研杂志引用,受到专家的好评(以上观点均以论文发表)。1996年获苏步青数学教育奖、同时被评为享受国务院政府特殊津贴的专家。2000年、2003年连续被评为太原市第一届、第二届优秀专家。获全国、省级学会、研究会二等奖以上优秀论文12篇。2003年12月,被授予教育科研优秀成果二等奖、三等奖各一项。

出版专著15余册,在《教育理论与实践》、《甘肃教育学院学报》、《数学教育学报》、《数学通讯》、《中学数学杂志》、《学习报》等发表论文200余篇,共计500多万字。



张克良,1950年生,毕业于天津师大数学系,中学高级教师。曾先后在天津武清区师范学校、区教育局、区教研室工作,现任教于天津市重点中学天津武清区杨村一中,为天津市教育学会中学数学研究会会员,天津武清区教育学会中学数学研究会理事。

从教30多年,送过多届高中毕业班,教学经验十分丰





富,曾与人合作编写新教辅书 20 多本,在国内各类数学报刊发表教研与辅导类数学文章 6000 余篇,有的在全国初等数学交流会上选读,也有的被评为天津市教育科研优秀论文。已被国内数十家数学报刊聘为特约撰稿人,常为一些学校或报社做讲座。



慕泽刚,1968 年生,中学高级教师。毕业于四川师范学院数学系,学士学位。现任教于重庆市渝西中学。区级骨干教师、优秀教师,现为重庆市数学学会会员。从事高中教学 17 年,先后带完高中毕业班 9 届,高考成绩每届均名列市、区前茅。

自 2002 年来先后在《中学生数理化》、《数学教学通讯》、《学习报》等 30 余家国家级和省级报刊上发表文章 2000 多篇,被多家报刊数次评为“优秀作者”。现为《数学专页》、《数理报》、《学生新报》等多家报刊的特约编辑,并有 20 余篇论文在市、区获奖。还参与多本教辅书籍的编辑。



李生茂,1968 年生,中学高级教师。近十年担任高中数学、计算机两科奥赛辅导工作及高三数学教学工作。多次荣获“高中数学竞赛”省优秀辅导奖;2004 年 8 月在“全国计算机编程大赛决赛”中荣获全国第六名;2007 年作品《我和学生在 QQ》在湖南教育征文比赛中荣获省一等奖;2001 年作品《高中数学应用在线》在株洲市首届教师网页比赛中荣获市一等奖;被株洲市人民政府“记大功”一次。

先后担任郑州天星教育图书有限公司、江西金太阳教育研究有限公司等著名教辅公司的主编,参与编书 40 多本;在《高中生》、《中学数学研究》、《数学爱好者》等杂志及《学习报》、《课程导报》等多家报社发表论文 300 多篇。



王广新,女,1969年生,1992年毕业于天津师范专科学校,1997年河北大学数学系本科毕业,北京师范大学教育经济与管理专业研究生,中学高级教师,现任教于河北蠡县中学。多次获得市学科优胜奖,由于教育教学业绩突出,多次被评为县级优秀教师、名师,市级骨干教师。

长期担任高三教学工作。教学之余注重总结教学体会与经验,并积极撰写教育论文,在《中学数学教学》、《数理化解题研究》等报刊杂志发表《常见数列求和不等式的证明策略》等150多篇文章,并参与多本教学辅导书的编写。



张明同,1970年生,毕业于烟台师范大学数学系,中学高级教师,潍坊市教学能手、寿光市高中数学学科带头人。参加过山东省师范大学的基础数学研究生课程班学习,在一线从事中学数学教育教学工作十多年,现担任山东省寿光市教育科学研究中心(寿光市教学研究室)数学教研员。

在平时的工作中,十分重视对现代化教育理论的学习,努力掌握现代化教学技术,并积极撰写教育论文,有多篇论文在省级以上报刊发表,近年来在《考试报》、《中学数学研究》、《中学生学习报》等十多家报刊杂志发表教育教学文章300余篇。积极推进新课程改革和高中教学改革,主持的教育实验课题《高中数学后进生转化实验研究》通过中国教育学会教育实验研究会专家鉴定,顺利结题并得到推广。



赵先举,1976年生,1999年河南师范大学数学系本科毕业,现为河南省临颍县南街村高中数学教师。长期担任高三教学工作。根据每个学生的不同特点,因材施教,方法灵活,方式多样,注重体现与学生的交流与互动,教学成绩显著。

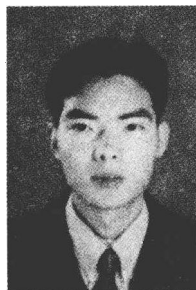
由于教育教学业绩突出,多次被省市评为奥数优秀辅导教师、优秀教师、科研先进个人、优秀班主任、高考优秀评卷



## 速解宝典——高中数学经典小结论

员等,并在优质课大赛中多次获得一等奖。由于所带班级高考成绩优异,多次获得高考成绩突出贡献奖。

课余时间善于钻研新教材,曾担任《志鸿同步优化设计》等 60 余本教辅图书的主编;在《数学周报》、《中学生学习报》、《学习报》等多家报刊发表论文 600 多篇。



代尔宁,1980 年生,2004 年西华师范大学数学系毕业,现为四川泸州纳溪中学数学教师。先后参与“中学教学常规规范化管理与评估”、“中学学生合作·反思学习模式的培养”等省级课题研究,在教育教学过程中将赏识教育与目标教学紧密结合,取得了良好效果。2004 年教育论文《数学创新教育及培养》获得四川省泸州市二等奖。

自 2006 年以来,先后主编或参编 10 余本教辅书籍,在《数学教学通讯》、《数学爱好者》、《数学周报》等发表文章 300 余篇。



# 目 录

## 必修 1

### 第一章 集合与函数 ..... 1

集合 ..... 1

函数及其表示 ..... 13

函数的基本性质 ..... 22

### 第二章 基本初等函数 ..... 44

指数函数 ..... 44

对数函数 ..... 57

幂函数 ..... 69

### 第三章 函数的应用 ..... 78

函数与方程 ..... 78

函数模型及应用 ..... 88

## 必修 2

### 第一章 空间几何体 ..... 96

空间几何体的结构 ..... 96





|                                 |            |
|---------------------------------|------------|
| 空间几何体的三视图和直观图 .....             | 101        |
| 空间几何体的表面积与体积 .....              | 109        |
| <b>第二章 点、直线、平面之间的位置关系 .....</b> | <b>127</b> |
| 空间点、直线、平面之间位置关系 .....           | 127        |
| 直线、平面平行的判定及其性质 .....            | 138        |
| 直线、平面垂直的判定及其性质 .....            | 151        |
| <b>第三章 直线与方程 .....</b>          | <b>166</b> |
| 直线的倾斜角与斜率 .....                 | 166        |
| 直线的方程 .....                     | 184        |
| 直线的交点坐标与距离公式 .....              | 196        |
| <b>第四章 圆与方程 .....</b>           | <b>207</b> |
| 圆的方程 .....                      | 207        |
| 直线、圆的位置关系 .....                 | 222        |
| 空间直角坐标系 .....                   | 246        |





# 第一章 集合与函数

## 集合



【结论1】集合  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  中有  $n$  个元素, 则集合  $A$  的子集个数是  $2^n$ , 真子集个数是  $2^n - 1$ .

【说明】一个有限集  $A$  的元素个数是  $n$ , 则这个集合所有子集的个数是  $2^n$ , 这些子集如果要列举时, 可以按集合元素的个数来分类列举. 如集合  $\{a, b, c\}$  的子集有: 0 个元素的子集, 即空集, 共 1 个; 1 个元素的子集有  $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ , 共 3 个; 2 个元素的子集有  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ , 共 3 个; 3 个元素的子集有 1 个, 即其子集共有  $1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$  个. 真子集的个数就是除去本身子集的个数, 即为  $2^n - 1$ .

例1 集合  $A = \{x | 0 \leq x < 3 \text{ 且 } x \in \mathbf{N}\}$  的真子集的个数是 ( )

- A. 16                      B. 8                      C. 7                      D. 4

解 因为  $A = \{0, 1, 2\}$ , 即集合  $A$  共有 3 个元素, 所以真子集有  $2^3 - 1 = 7$  个. 这 7 个真子集分别为:  $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}$ . 故选 C.

例2 已知  $\{1, 2\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 则符合条件的集合  $A$  有 ( )

- A. 4 个                      B. 8 个  
C. 16 个                      D. 64 个

解 由条件知集合  $A$  可以看作是除了元素 1, 2 外, 另外从 3, 4, 5, 6 四个元素中取一些 (也可以不取) 元素来, 即把集合  $A$  看作是集合  $\{1, 2\}$  与集合  $\{3, 4, 5, 6\}$  的子集的并集. 所以要求集合  $A$  的个数就转化为求集合  $\{3, 4, 5, 6\}$  的子集的





个数. 故符合条件的集合  $A$  的个数是  $2^4 = 16$ . 故选 C.

**[作用简评]** 对解决有关集合子集的个数问题, 可直接利用这个公式进行计算. 计算时要分清这个集合的元素是从哪里来的, 有哪些, 即若可供选择的元素有  $n$  个, 就转化为求这  $n$  个元素集合的子集问题. 另外要注意子集、真子集、非空真子集之间的联系与区别.



**【结论 2】** 设  $A = \{x \mid ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, a, b, c \text{ 是常数}\}$ , 若

$$(1) A = \emptyset \Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac < 0;$$

$$(2) A = \{x_0\} \Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0 \text{ 且 } x_0 = -\frac{b}{2a};$$

$$(3) A = \{x_1, x_2\} \Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac > 0 \text{ 且 } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

**[说明]** 若  $A$  是一元二次方程解的集合, 则集合  $A$  的个数可由一元二次方程根的判别式来确定. 特别地, 当两根相等时, 集合  $A$  此时只有一个元素.

**例 3** 若集合  $A = \{x \mid x^2 + x - a = 0\}$ , 当  $A \neq \emptyset$  时,  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

**解** 由结论 2, 知  $\Delta = 1 + 4a \geq 0$ . 解得  $a \geq -\frac{1}{4}$ . 故填  $[-\frac{1}{4}, +\infty)$ .

**例 4** 若集合  $A = \{x \mid x^2 + ax + a - 1 = 0\} \subseteq \{-1\}$ , 则  $a$  的取值范围为 ( )

A. 2

B.  $(2, +\infty)$

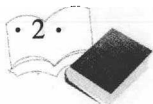
C.  $[2, +\infty)$

D.  $(-\infty, 2]$

**解** 若  $A = \emptyset$ , 则由结论 2, 知  $\Delta = a^2 - 4(a - 1) < 0$ , 即得  $(a - 2)^2 < 0$ . 显然不存在这样的  $a$ ; 若  $A = \{-1\}$ , 则由结论 2, 知  $\Delta = 0$ ,  $-1 = -\frac{a}{2 \times 1}$ , 得  $a = 2$ , 符合条件.

故选 A.

**[作用简评]** 利用这个结论可用求集合中参数的取值或取值范围, 即通过判





别式得到参数的方程或不等式.



【结论3】若  $A = \{x | f(x) = 0\}$ ,  $B = \{x | g(x) = 0\}$ , 则  $A \cap B = \{x | \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}\}$ .

[说明]若集合  $A, B$  都是方程的解集,求这两个集合的交集,其实也就是解方程组,即转化为找公共解,而从小题的角度来看,此问题又可转化为以下两种方法来解决:(1)先求得比较简单的那个方程的解,然后再用所得的解来验证另一个方程,如果满足另一个方程,则这个解是交集的元素,否则就不是,如果没有一个满足另一个方程,则交集为空集;(2)如果是选择题,则直接用选择支验证条件式中的方程,判断哪些元素是条件中两个方程的公共解.不论是哪一种方法都可达到少解方程或不解方程,从而减少了计算量.

例5 若  $A = \{x | x^2 = 1\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

A.  $\{3\}$       B.  $\{1\}$       C.  $\emptyset$       D.  $\{-1\}$

解法一 由  $x^2 = 1$ , 得  $x = 1$  或  $x = -1$ . 当  $x = 1$  时,  $x^2 - 2x - 3 = 1 - 2 - 3 \neq 0$ ; 当  $x = -1$  时,  $x^2 - 2x - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$ . 所以  $x = -1$  是公共解,所以交集是  $\{-1\}$ . 故选 D.

解法二 将各选择支代入集合中的方程进行检验,只有  $x = -1$  是公共解. 所以选 D.

例6 若集合  $A = \{x | x^2 + 3x - 4 = 0\}$ , 集合  $B = \{x | x(x+1)(x+2)(x+3) = 24\}$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_.

解 解方程  $x^2 + 3x - 4 = 0$ , 可得  $x = 1$  或  $x = -4$ . 当  $x = 1$  时, 可得  $x(x+1)(x+2)(x+3) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ ; 当  $x = -4$  时, 可得  $x(x+1)(x+2)(x+3) = (-4) \times (-3) \times (-2) \times (-1) = 24$ . 所以这两个解都满足条件中的两个方程, 即得  $A \cap B = \{1, -4\}$ . 故填  $\{1, -4\}$ .

[作用简评]方程解的集合是一种常用的数集,用集合为背景汇集其他知识,





这种集合思想始终贯穿在高中的整个学习当中. 如这两个例题中的交集问题转化为两个方程解的公共部分, 解决时又根据题型(是选择题还是填空题)来选择方法及选择方程来解, 达到了巧解、速解的目的.



【结论4】 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ .

**证明:** 从左推到右: 若  $x \in (A \cup B)$ , 则  $x \in A$  或  $x \in B$ . 由  $A \cup B = B$ , 知若  $x \in A$ , 则必有  $x \in B$ , 即得  $A \subseteq B$ .

从右推到左: 若  $A \subseteq B$ , 则  $A$  是  $B$  的子集, 所以  $A \cup B = B$ .

**例7** 已知集合  $A = \{-2, 3, 4m-3\}$ , 集合  $B = \{3, m^2\}$ . 若  $A \cup B = A$ , 则实数  $m =$  \_\_\_\_\_.

A. 1

B. 3

C. 1 或 3

D. 1, 3,  $\sqrt{3}$

**解法一** 由  $A \cup B = A$ , 得  $B \subseteq A$ . 所以  $m^2 \in \{-2, 3, 4m-3\}$ , 即有  $m^2 = 4m - 3$ . 解得  $m = 1$  或  $m = 3$ . 经检验,  $m = 1, m = 3$  都符合, 即  $m = 1$  或  $m = 3$ . 故选 C.

**解法二** 由  $A \cup B = A$ , 得  $B \subseteq A$ . 验证  $m = 1, 3, \sqrt{3}$ , 可得  $m = \sqrt{3}$  时, 不满足集合元素的互异性,  $m = 1$  或  $m = 3$  时满足. 故选 C.

**例8** 已知集合  $A = \{x | x^2 - 2x + m = 0\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ , 且  $A \cup B = B$ , 则实数  $m$  满足 \_\_\_\_\_ ( )

A.  $m = 1$

B.  $m = 0$

C.  $m = 1$  或  $m = 0$

D.  $m \geq 1$

**解** 由  $A \cup B = B$ , 知  $A \subseteq B$ , 即  $A$  是  $B$  的子集. 若  $A = \emptyset$ , 则可得方程  $x^2 - 2x + m = 0$  的判别式  $\Delta = 4 - 4m < 0$ , 即  $m > 1$ ; 若  $A = \{1\}$ , 则方程  $x^2 - 2x + m = 0$  有两等根, 得  $m = 1$ . 由选择支可知不必讨论其他情况, 故选 D.

**[作用简评]** 通过转化集合的运算  $A \cup B = B$  为集合的包含关系, 即  $A \subseteq B$ , 进而转化为元素与集合之间的关系, 这样一步步化抽象为具体, 化新为旧, 降低了运算难度. 另外, 集合  $A$  还有一种情况就是能否为空集, 如例8就是优先考虑空集



的情况.



【结论5】 $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$ .

[说明]与结论4类似,这个公式也是转化集合运算为子集包含关系的一种.

例9 已知  $A = \{x | -4 < x < 2\}$ ,  $B = \{x | x > a\}$ ,  $C = \{x | x < b\}$ .

(1)若  $A \cap B = A$ , 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_;

(2)若  $A \cap C = A$ , 则  $b$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

解 (1)由  $A \cap B = A$ , 可知  $A \subseteq B$ . 所以  $a \leq -4$ , 即  $a \in (-\infty, -4]$ .

(2)由  $A \cap C = A$ , 可知  $A \subseteq C$ . 所以得  $b \geq 2$ , 即  $b \in [2, +\infty)$ .

例10 设集合  $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + (a^2 - 5) = 0\}$ .

(1)若  $A \cap B = B$ , 求实数  $a$  的取值范围;

(2)若  $A \cap \complement_{\mathbb{R}} B = A$ , 求实数  $a$  的取值范围.

解 (1) $A = \{1, 2\}$ .

对于集合  $B$ ,  $\Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 5) = 4(2a+6)$ .

$\therefore A \cap B = B, \therefore B \subseteq A$ .

①当  $\Delta < 0$ , 即  $a < -3$  时,  $B = \emptyset$ , 满足条件;

②当  $\Delta = 0$ , 即  $a = -3$  时,  $B = \{2\}$ , 满足条件;

③当  $\Delta > 0$ , 即  $a > -3$  时,  $B = A = \{1, 2\}$ ,

由根与系数的关系, 得  $\begin{cases} 1+2 = -2(a+1), \\ 1 \times 2 = a^2 - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{2}, \\ a^2 = 7, \end{cases}$  矛盾.

综上,  $a$  的取值范围是  $a \leq -3$ .

(2) $\because A \cap \complement_{\mathbb{R}} B = A, \therefore A \subseteq \complement_{\mathbb{R}} B, \therefore A \cap B = \emptyset$ .

①若  $B = \emptyset$ , 则  $\Delta < 0 \Rightarrow a < -3$ ;

②若  $B \neq \emptyset$ , 则  $a \geq -3$ , 此时  $1 \notin B$  且  $2 \notin B$ .

将2代入  $B$  的方程, 得  $a = -1$  或  $a = -3$ ;

