

海洋工程结构动力分析

■ 聂武 刘玉秋 编著



哈尔滨工程大学出版社

海洋工程结构动力分析

聂 武 刘玉秋 编著

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

海洋工程结构动力分析/聂武,刘玉秋编著. —哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2002.3
ISBN 7-81073-281-1

I.海... II.①聂...②刘... III.海洋工程-工程结构-动力学分析 IV.P75

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 018614 号

内 容 简 介

本书重点论述了浮式海洋工程结构(也包括导管架平台结构)在海洋环境载荷作用下的动力响应分析问题,同时也对系泊系统(包括半潜式平台、FPSO 系统)在波浪作用下运动的计算进行了探讨。书中分章讨论波浪、海流、海冰、风对海洋工程结构的作用及动力响应的分析方法,还对海洋立管的力学特性及动力响应作了专门介绍。书中从单自由度入手,对多自由度系统动力特征及响应分析、随机振动、非线性振动的基本概念和计算方法分别作了简要介绍。

本书可作为船舶与海洋工程及相近专业本科高年级学生、硕士研究生课教材,以及从事海洋工程结构设计研究人员的参考用书。

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号 哈工程大学11号楼
发行部电话:(0451)2519328 邮编:150001
新 华 书 店 经 销
黑龙江省教育委员会印刷厂印刷

*

开本 787mm×1 092mm 1/16 印张 11.5 字数 260 千字

2002 年 4 月第 1 版 2002 年 4 月第 1 次印刷

印数:1—1 000 册

定价:15.00 元

前 言

本书以浮式近海工程结构为主要对象,讨论在各种海洋环境载荷作用下的结构动力响应的计算方法,介绍其最新的研究现状。本书可分为三部分,前三章为结构动力分析的基础理论和方法,第四章至第七章为海洋工程结构的各种环境载荷及其动力响应分析方法,第八章和第九章为专题介绍。

第一章为结构系统动力分析。第二章为随机振动基础,介绍了谱分析技术和响应的峰值分析。第三章介绍结构非线性振动的特征及其基本解法。第四章讨论了海洋工程中最为普遍的波浪载荷的作用,首先介绍了常用的几种波浪理论,分别叙述了用于细长杆件波浪载荷计算的 Morison 公式及用于大尺度构件的波浪载荷计算理论和方法,最后通过实例说明结构在波浪载荷作用下的动力响应计算过程。第五章讨论了流致振动问题,介绍了常见的圆形剖面构件在均匀流场中发生的跳跃振动。第六章讨论了海冰载荷的作用机理和几种冰致振动模型。第七章讨论了浮式结构运动与波浪载荷间的耦合关系,针对锚泊系统的形式介绍了波浪二阶力及相应的系统慢漂振荡的计算方法。第八章阐述了海洋刚性及柔性立管的力学特性及动力响应计算,并给出了刚性立管在随机海浪与流联合作用下的动力响应算例。第九章则介绍了近年来的热点研究——FPSO 系统的动力响应分析研究。

本书由聂武统稿,其中第一章至第三章及第五章由刘玉秋编写,第七章由聂武、刘玉秋编写,绪论、第六、八章由聂武编写,第四、九章由李力波编写。

海洋工程结构动力分析是在 20 世纪 80 年代蓬勃发展起来的一门新兴学科,它涉及到众多的技术领域,新概念、新方法不断出现。尽管在 20 世纪 90 年代国内出版了若干此类教材和著作,仍不能涵盖所出现的海洋工程结构及其分析技术。编著者积十余年来的科研成果及教学经验写成此书,以满足相关专业研究生教学的需要。由于编著者水平所限,书中不当乃至错误之处在所难免,诚恳希望读者指正。在付梓之时,衷心感谢徐继祖教授、李维扬教授两位前辈在本书编撰过程中给予的无私支持和帮助。

编著者

2002.1

目 录

绪论	1
第一章 结构系统动力分析	5
1.1 线性时不变系统的动态特性	5
1.2 特征值问题的计算	9
1.2.1 矢量迭代法	9
1.2.2 Rayleigh - Ritz 法	14
1.2.3 子空间迭代法	15
1.3 动力响应的计算	16
1.3.1 模态分析法	17
1.3.2 直接积分法	20
第二章 随机振动基础	28
2.1 前言	28
2.2 平稳随机过程和各态历过程	28
2.2.1 随机过程	28
2.2.2 随机过程的概率分布和概率密度函数	29
2.2.3 平稳随机过程	30
2.2.4 各态历经随机过程	31
2.3 随机过程的期望和矩	32
2.4 高斯随机过程	32
2.5 相关函数和协方差系数	33
2.6 谱分析	35
2.6.1 自功率谱密度	35
2.6.2 互功率谱密度	37
2.6.3 平稳随机过程的谱分布	37
第三章 非线性系统的随机振动分析	39
3.1 海洋工程结构振动中的非线性问题	39
3.2 弱非线性项	41
3.3 正规摄动法	43
3.4 Lindstedt 法	45
3.5 参数振动	48
第四章 波浪载荷及其结构响应	50
4.1 前言	50
4.2 波浪理论	51
4.2.1 基本方程及边界条件	51
4.2.2 线性波	52

4.2.3 非线性波·····	56
4.2.4 各种波浪理论比较·····	64
4.2.5 随机波浪理论·····	65
4.3 小构件的波浪载荷·····	70
4.3.1 Morison 公式 ·····	70
4.3.2 Morison 公式中系数的讨论 ·····	74
4.3.3 各种条件下 Morison 公式的应用 ·····	75
4.4 大构件的波浪载荷·····	77
4.4.1 线性绕射问题·····	77
4.4.2 直立圆柱·····	78
4.4.3 任意形状大物体—奇点分布法·····	79
4.5 小构件的随机波浪载荷·····	81
4.6 波浪载荷作用下的结构响应·····	84
4.6.1 单自由度结构的响应·····	84
4.6.2 多自由度结构响应·····	85
4.6.3 顺应式结构的动态响应·····	90
第五章 流致结构振动 ·····	93
5.1 前言·····	93
5.2 旋涡泄放与涡激振动·····	93
5.2.1 漩涡的形成和泄放·····	94
5.2.2 Strouhal 数和流—固耦合振动 ·····	95
5.3 涡激振动的工程实用分析法·····	97
5.4 防止和抑制涡激振动的方法·····	99
5.5 跳跃振动(超驰振动) ·····	100
5.5.1 发生跳跃振动的条件及判别标准 ·····	101
5.5.2 跳跃振动的稳态解 ·····	102
5.5.3 例题 简支梁的跳跃振动 ·····	103
5.5.4 减小跳跃振动的方法 ·····	105
第六章 海冰载荷及结构响应 ·····	106
6.1 前言 ·····	106
6.1.1 强迫振动理论 ·····	106
6.1.2 自激振理论 ·····	106
6.2 海冰的物理力学特性 ·····	107
6.2.1 海冰的组成与结构 ·····	107
6.2.2 海冰的变形性质 ·····	108
6.2.3 海冰的强度性质 ·····	109
6.2.4 冰排压入实验及冰力公式 ·····	110
6.3 冰致结构振动模型——Matlock 模型 ·····	112
6.4 Määttänen 模型(自激振动模型) ·····	115
6.4.1 自激振动发生的条件——结构动力稳定性校核 ·····	115

6.4.2 自激振动过程分析	118
6.5 冰力振子模型	120
6.5.1 问题的提出	120
6.5.2 方程的建立	120
6.5.3 耦合振动的数值解	122
6.6 抗冰振损伤的措施	124
6.6.1 引言	124
6.6.2 渤海平台结构动态特征	125
6.6.3 冰遇到障碍物时的破坏形式	125
6.6.4 抗冰振损伤的措施	127
第七章 浮动结构的波浪载荷及响应	128
7.1 线性运动理论	128
7.1.1 复原力	129
7.1.2 流体动力——附加质量力及阻尼力	130
7.1.3 浮体运动方程	131
7.1.4 切片法	133
7.2 简单几何形状浮体的运动和载荷	134
7.2.1 浮筒的线性波浪诱导运动	135
7.2.2 半潜式平台的运动特征	137
7.3 随机海浪作用下运动的计算	139
7.3.1 导管放置驳船上拖航	139
7.3.2 船舶的横摇运动	141
7.4 系泊系统	143
7.5 锚泊系统的刚度	144
7.6 波浪二阶力	148
7.6.1 规则波中的漂力计算	148
7.6.2 不规则波中的慢漂力计算	150
7.7 系泊系统的响应	151
7.7.1 系泊油船的平衡位置及其稳定性	151
7.7.2 系泊油船的慢漂振荡	154
7.7.3 高频(波频)运动	154
第八章 海洋立管分析	155
8.1 前言	155
8.2 刚性立管力学模型及载荷分析	155
8.2.1 立管分析的基本方程	155
8.2.2 立管的动力分析	158
8.3 刚性立管的动力控制方程及刚性特性	159
8.3.1 动力控制方程	159
8.3.2 考虑轴向力影响的刚性立管单元	159
8.3.3 刚性立管单元刚度矩阵	160

8.4 刚性立管在波和流联合作用下的动态响应分析	161
8.4.1 概述	161
8.4.2 波和流联合作用下的相对速度的附加卷积项	162
8.4.3 环境载荷和运动方程的解	164
8.4.4 举例	164
8.5 柔性立管分析	166
第九章 FPSO 系统动力响应分析	168
9.1 前言	168
9.2 系统的运动方程	168
9.3 FPSO 系统载荷	169
9.4 FPSO 系统动态响应分析	170
9.4.1 稳定性分析	170
9.4.2 数值解	171
参考文献	175

绪 论

在大陆架范围内的海域常统称为近海,勘探表明,在大陆架及其岛弧间的过渡带储藏着丰富的油气资源。自 20 世纪 40 年代后期在美国墨西哥湾首次建造和应用近海钻井平台以来,世界近海工程技术已经有了巨大进步。目前在各大洲大陆架的不同工作水域有各种类型的近海工程结构物,他们主要应用于海底油气资源的勘探和开发,也有的用于海洋能(如波能、潮汐能)的利用及海底矿产的开采。随着海洋开发活动向更深的海域发展,面临的环境条件愈益严酷,对近海结构物的设计制造提出了更高更苛刻的要求。美国墨西哥湾及欧洲北海油田的开发有力地促进了近海结构工程技术的发展。现有的墨西哥湾的导管架式平台和北海的重力式平台的最大工作水深已经分别达到 415 米(COGNAC 平台)和 273 米(STATFJORD 平台),设计浪高达 30 米以上。

平台的灾难性事故和由此带来的人员伤亡及经济损失也从反面促进了平台设计技术的革新和进步,并且构成近海工程这一人类征服海洋的高风险事业的发展历史中的一个组成部分。1979 年我国的自升式钻井平台渤海 2 号在移位中因操作不当而翻沉,遇难者达 70 多人;1980 年北海挪威 Ekofisk 油田的一座半潜式平台 Alexander Kielland 号因结构疲劳破坏而倾覆,死亡 120 余人,堪称海洋工程界的“Titanic”灾难,以至于从 20 世纪 90 年代起挪威船级社开展了海洋工程项目的风险评估研究,力争将其风险降至最小。

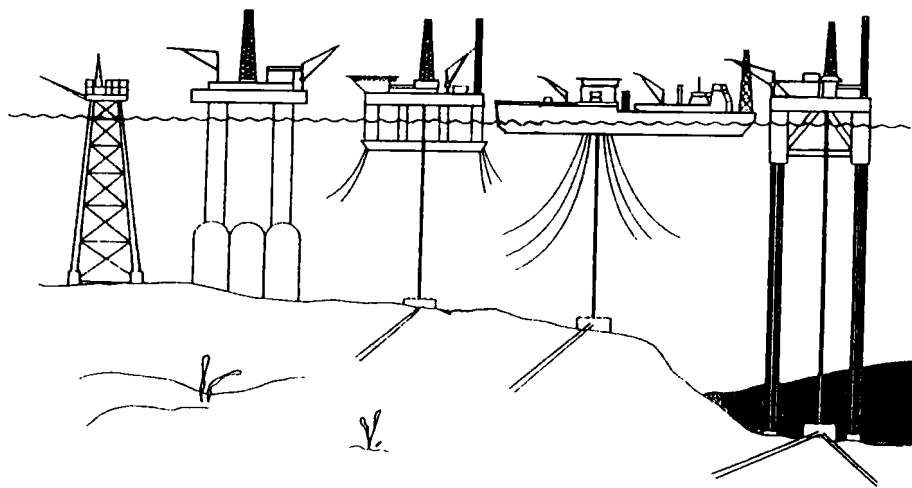


图 0-1

目前工作水深范围超过 200 米的有代表性的海洋工程结构物示于图 0-1。海洋工程结构物可分为可变换位置的移动式结构和固定于海底的固定式结构。移动式结构包括坐底沉浮式平台(仅适用于 40 米水深以下),自升式平台和半潜式平台等。由于他们的可移动性,多用于勘探钻井。图 0-2 为一自升式平台,它们一般有 3~6 根桩腿,桩腿为管柱或桁架式结构。甲板与桩腿的上下相对位置可通过传动装置进行调节。平台就位后,沉垫坐于海底,或桩

腿插入海床,甲板升起到水面以上;平台需移位时,甲板降至海面,沉垫或桩腿自土中拔出,桩腿大部分升至甲板以上后,由拖轮拖至新的井位,这类平台的工作水深可达90米。图0-3为一半潜式平台,它在水面以上的甲板通过水线面积较小的立柱支撑在水下浮体上,而浮体位于波浪作用强烈的表层区以下,因而平台在波浪中比一般水面船只更易于保持平稳。半潜式平台一般通过以放射状布置的8~10根系泊缆(链)系泊于井位。平台相对于井口的瞬时精确定位,或通过计算机自动调节各系缆的张力,或采用可实现动力定位的变向推进器来实现,可保证在平台运动中的钻井定位。

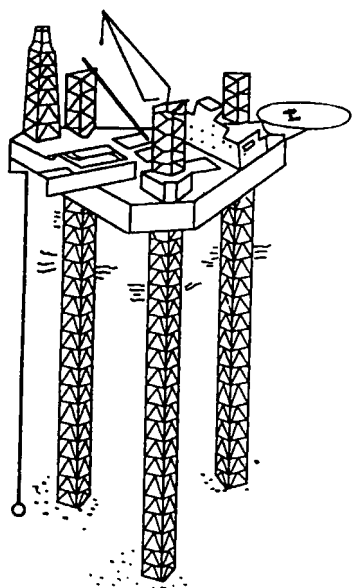


图 0-2

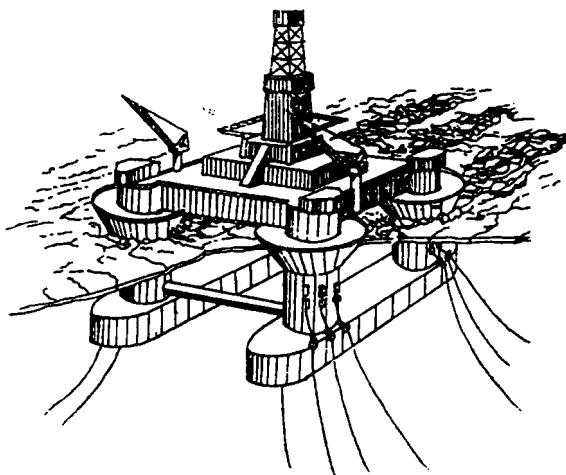


图 0-3

近海油气的采集主要使用固定式平台。最常用的固定式平台是导管架式平台(图0-4)。导管架式平台为一空间桁架结构,并通过在其管状腿柱中打桩固定于海底。目前世界各地共有几千座导管架式平台。上述位于墨西哥湾的COGNAC平台,其桩打入土中150米,平台用钢量达59 000吨。重力式平台(图0-5)不用桩而是用基础沉箱直接放置于海底,依靠其自身巨大的重量维持稳定。沉箱一般还兼用于储存原油。通常有2~4根立柱由沉箱通至甲板。沉箱和立柱均为钢筋混凝土结构,甲板则为钢质结构。目前这类混凝土重力式平台主要用于欧洲北海。上面提到的位于挪威西部近海的STATFJORD平台在273米水深工作,共有42口油井,能容纳200人在平台上工作生活。

顺应式平台是近年发展起来的用于深水油气生产的一类新的平台型式,主要的两种型式是牵索塔式和张力腿式平台。牵索塔式平台(图0-6)底部支承在桩基上,平台可随波浪产生水平方向的振荡,并且通过若干条在平面上呈放射状布设的牵索提供必要的水平刚度。1980年代初安设在墨西哥湾300米水深处的第一座牵索塔式平台,采用在平面呈对称布置的20根牵索,牵索的上端在水面以下24米处,连接在中央框架结构的塔柱上,每根牵索的伸展长度约750米,其下端与一组置放于海底的配重块相连,重块的远端为一地锚。当塔柱的振荡运动较大时,配重块自海底被提起,从而使高负载时系统的水平刚度提高。第一座张

力腿式平台(图 0 - 7) 在 1980 年代中期安设在苏格兰近海,它通过在平台四角设置的多根垂直高张力钢缆使平台在环境载荷作用下的运动类似一倒置的单摆而使平台与井口间的相对位置在一较小范围内变化,钢缆压力由预加的平台浮体的浮力造成。

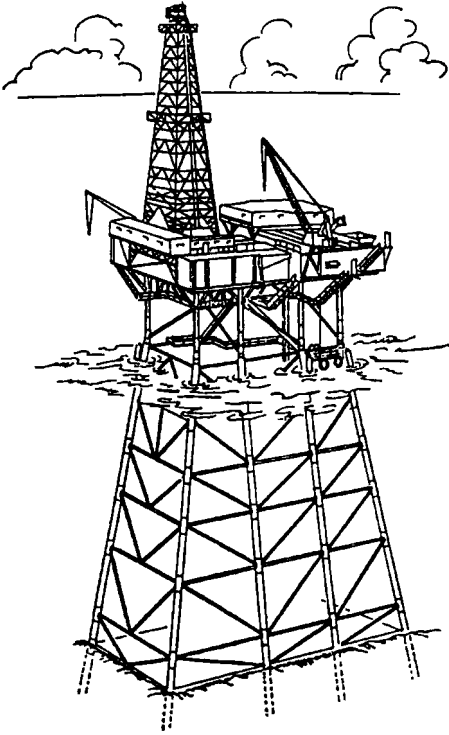


图 0 - 4

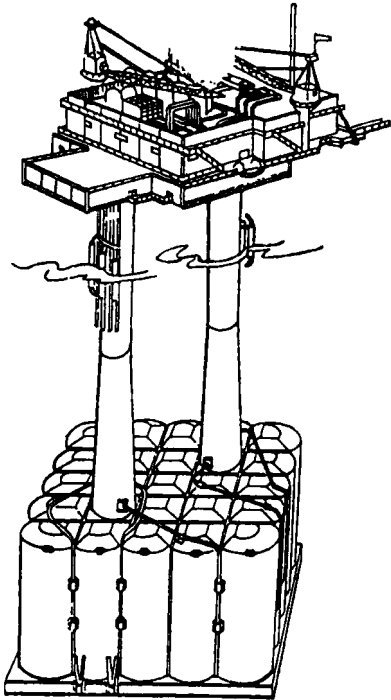


图 0 - 5

随着海上油田离岸距离的增大,有时采用海中浮式生产储油系统(FPSO)比铺设长距离输油(气)管线更加经济。FPSO自20世纪80年代兴起,现已得到广泛应用,此系统由一浮式生产储油轮和一穿梭油轮组成(图 0 - 8),生产储油轮在其底部设有一转台结构,与水下井口及油轮相连。在大风浪等恶劣海况下,转台结构可快速与水下井口脱离,以确保安全。

近海工程结构研究的目的是为发展在海洋环境中工作的工程结构物的设计和建造技术,以实现安全、经济和高效的要求。近海工程结构的设计是一个跨学科的技术难题,它综合应用气象、海洋、地质、建筑工程、船舶工程、工程材料、石油工艺以及土 - 流体 - 结构的综合力学分析等多方面的知识和技术。近海工程结构的环境载荷主要来自风、浪、流及冰。这些环境载荷对近海工程结构物的作用和二者之间的相互作用,具有明显的动力性质、随机性质和非线性性质。为了进行海洋环境载荷及结构响应机理的研究,应该采用理论研究及实验研究(包括室内模型研究和现场原结构物测试)相结合的办法,对于不断改进海洋环境载荷及其结构响应的数学模型是十分重要的。

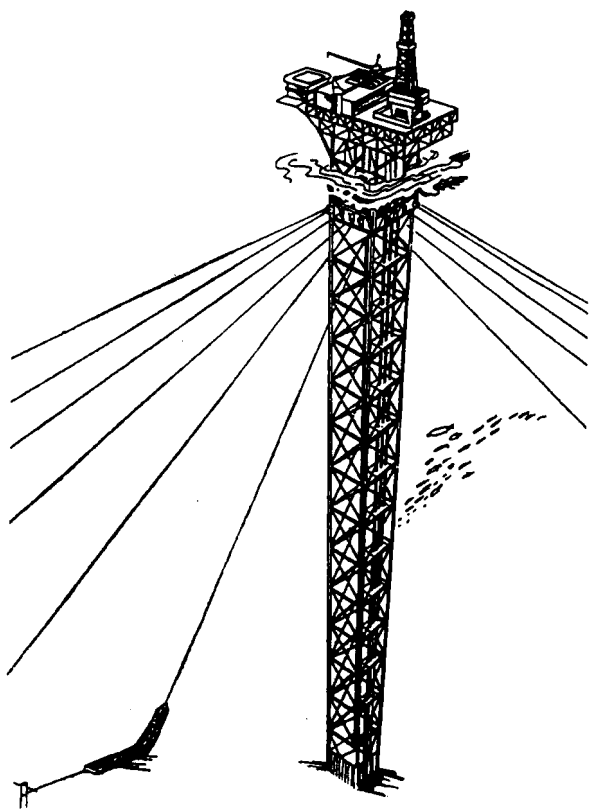


图 0-6

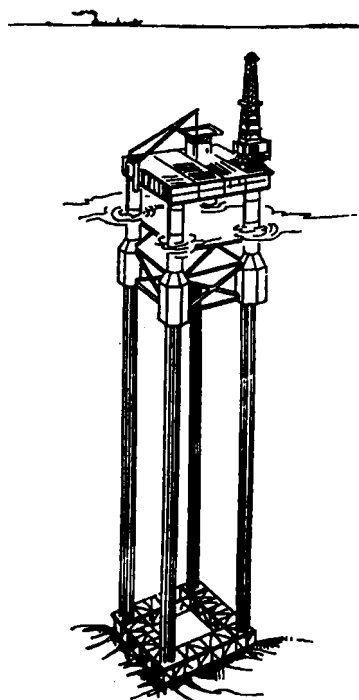


图 0-7

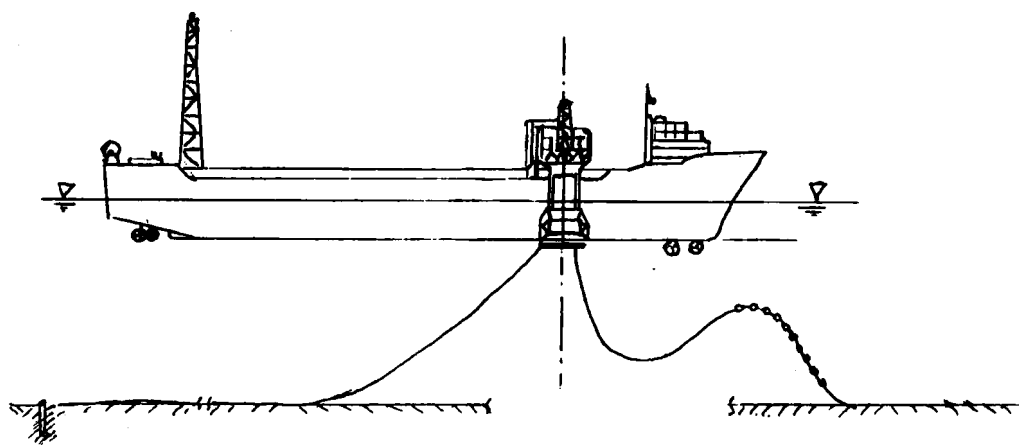


图 0-8

第一章 结构系统动力分析

1.1 线性时不变系统的动态特性

线性时不变系统是指系统的基本参数不随时间变化,而且初始条件也只是在开始时刻作用于系统。如果激振是平稳随机过程,在激振力作用于系统较长时间以后,系统的响应已与初始条件无关,是平稳随机过程。它可分为单自由度和多自由度系统。

设单自由度系统的运动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 e^{i\omega t}$$

或

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = (f_0/m)e^{i\omega t} \quad (1.1)$$

其中, $\omega_n^2 = k/m$;

$\zeta = c/2m\omega_n$;

f_0 : 激振力幅值。

则响应一定是激振力的倍数。令 $x = x_0 e^{i\omega t}$, 代入式(1.1) 中得

$$x_0(\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\zeta\omega\omega_n) = f_0/m$$

令

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{m(\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\zeta\omega\omega_n)} \\ &= \frac{1/k}{(1 - \beta^2) + 2i\zeta\beta} \end{aligned} \quad (1.2)$$

式中 $\beta = \omega/\omega_n$;

$H(\omega)$: 复频率响应函数,即在单位幅值简谐激励下系统的响应幅值。

由上式可知,系统响应可写成

$$x(t) = H(\omega)f(t) \quad (1.3)$$

这说明,当系统的输入是频率为 ω 的简谐激励时,系统的响应也是频率为 ω 的简谐振动。通过 Fourier 变换,把式(1.3) 表示的系统响应在频域内表示为

$$\begin{aligned} x(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= H(\omega) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

即

$$x(\omega) = H(\omega)f(\omega) \quad (1.4)$$

在时域内又可写成

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) f(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.5)$$

由结构动力学知道,线性系统在单位脉冲 $\delta(t)$ 作用下,系统的响应

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\omega_d t \quad (1.6)$$

式中, $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ 。

这样,在任意激振力 $f(t)$ 作用下,系统的响应就可用卷积积分表示为

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

由于 $t < 0$ 时 $h(t) = 0$,故可把上式改写为

$$x(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

又因为当 $t < \tau$ 时 $h(t) = 0$,所以这个积分的上限可以改写为任何大于 t 的值而不影响计算结果。因此又可把积分式改写为

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (1.7)$$

由于卷积积分的对称性,该积分式还可写成

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (1.8)$$

单位脉冲响应函数 $h(t)$ 在时域内描述系统响应的特性,而复频率响应函数 $H(\omega)$ 描述频域内系统响应的特性。如果激振力 $f(t) = \delta(t)$,它的 Fourier 变换为

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi}$$

把该式代入式(1.5),可得

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) f(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (1.9)$$

该式说明,脉冲响应函数 $h(t)$ 可以通过对复频响应函数 $H(\omega)$ 进行 Fourier 逆变换求得。这也说明,对 $h(t)$ 进行 Fourier 变换可以求得

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.10)$$

式(1.9)和(1.10)说明,脉冲响应函数 $h(t)$ 和复频响应函数 $H(\omega)$ 互为 Fourier 变换。应该说明,与其他地方不同,在式(1.9)和(1.10)中, $\frac{1}{2\pi}$ 是乘在逆变换式中。

上面讨论的脉冲响应函数和频率响应函数以及它们之间的关系,也可以推广到多自由度系统。设系统有 N 个自由度,在受激励之前处于静止状态。对任一输入 $f_j(t)$, ($j = 1, 2, \dots, N$) 的作用,在各个坐标上同时产生的 N 个响应 $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{Nj}$ 决定相应的脉冲响应函数 $h_{1j}(\tau), h_{2j}(\tau), \dots, h_{Nj}(\tau)$,即有下列关系:

$$x_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(\tau) h_{ij}(t - \tau) d\tau \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1.11)$$

可见,对于多自由度系统,在时域内决定输入、输出关系的动态特性的是 $N \times N$ 个脉冲响应

函数构成的 $[h(t)]$ 矩阵

$$[h(t)] = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \cdots & h_{1N}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \cdots & h_{2N}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{N1}(t) & h_{N2}(t) & \cdots & h_{NN}(t) \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

矩阵 $[h(t)]$ 中任一元素 $h_{ij}(t)$ 是由 j 自由度处的单位脉冲所激发的 i 自由度处的响应。任一输入 $f_j(t)$ 和它所激发的响应 $x_{1j}(t), x_{2j}(t), \cdots, x_{Nj}(t)$ 在频域内的关系均可由下式来确定,即

$$x_{ij}(\omega) = H_{ij}(\omega) f_j(\omega) \quad (i, j = 1, 2, \cdots, N) \quad (1.13)$$

式中

$$x_{ij}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_{ij}(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f_j(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_j(t) e^{-i\omega t} dt$$

可以看出,在频域内决定系统输入和输出之间关系的动态特性,就是 $N \times N$ 个频率响应函数,用矩阵表示为

$$[H(\omega)] = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \cdots & H_{1N}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \cdots & H_{2N}(\omega) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{N1}(\omega) & H_{N2}(\omega) & \cdots & H_{NN}(\omega) \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

$h_{ij}(t)$ 和 $H_{ij}(\omega)$ 之间为 Fourier 变换关系,即

$$\begin{cases} H_{ij}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{ij}(t) e^{-i\omega t} dt \\ h_{ij}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{ij}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{cases} \quad (1.15)$$

或

$$\begin{cases} [H(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} [h(t)] e^{-i\omega t} dt \\ [h(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [H(\omega)] e^{i\omega t} d\omega \end{cases} \quad (1.16)$$

频率响应矩阵中的每个元素可按频率响应函数的定义确定,即在一个单位幅值简谐激励作用下系统相应输出响应的幅值。

例题 1-1 图示汽车模型,车身重 $W = mg$, 车身相对于质心的回转半径为 ρ 。设两支点的垂直位移 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 为系统的输入,重心 c 的垂直位移 $y(t)$ 和绕重心 c 的转角 θ 为响应。求频率响应矩阵 $[H(\omega)]$ 。

解

(a) 运动方程

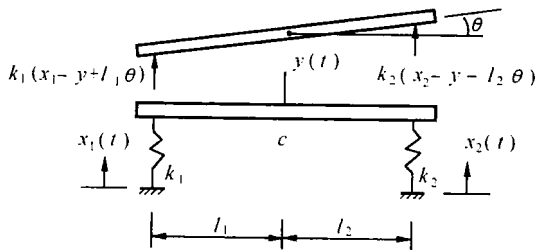


图 1-1

根据图示受力情况,列出运动方程

$$\begin{cases} m\ddot{y} + (k_1 + k_2)y + (k_2l_2 - k_1l_1)\theta = k_1x_1 + k_2x_2 \\ m\rho^2\ddot{\theta} + (k_2l_2^2 + k_1l_1^2)\theta + (k_2l_2 - k_1l_1)y = -k_1l_1x_1 + k_2l_2x_2 \end{cases} \quad (1.17)$$

$$\text{令} \quad \begin{cases} a = (k_1 + k_2)/m, b = (k_2l_2 - k_1l_1)/m \\ c = (k_2l_2^2 + k_1l_1^2)/m, d = k_1/m, d_2 = k_2/m \\ e_1 = k_1l_1/m\rho^2, e_2 = k_2l_2/m\rho^2 \end{cases} \quad (1.18)$$

把式(1.18)代入式(1.17),可将式(1.17)简化为

$$\begin{aligned} \ddot{y} + ay + b\theta &= d_1x_1 + d_2x_2 \\ \ddot{\theta} + \frac{c}{\rho^2}\theta + \frac{b}{\rho^2}y &= -e_1x_1 + e_2x_2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

(b) 求 $H_{11}(\omega)$ 和 $H_{21}(\omega)$

在式(1.19)中,令 $x_1 = e^{i\omega t}$, $x_2 = 0$, 则有 $y = H_{11}(\omega)e^{i\omega t}$, $\theta = H_{21}(\omega)e^{i\omega t}$ 代入式(1.19),消去 $e^{i\omega t}$ 后可得

$$\begin{cases} (a - \omega^2)H_{11}(\omega) + bH_{21}(\omega) = d_1 \\ \frac{b}{\rho^2}H_{11}(\omega) + (\frac{c}{\rho^2} - \omega^2)H_{21}(\omega) = -e_1 \end{cases} \quad (1.20)$$

求解式(1.20)得

$$\begin{cases} H_{11}(\omega) = \frac{(\frac{c}{\rho^2} - \omega^2)d_1 + be_1}{\omega^4 - (\frac{c}{\rho^2} + a)\omega^2 + \frac{ac - b^2}{\rho^2}} \\ H_{21}(\omega) = \frac{-(a - \omega^2)e_1 - \frac{bd_1}{\rho^2}}{\omega^4 - (\frac{c}{\rho^2} + a)\omega^2 + \frac{ac - b^2}{\rho^2}} \end{cases} \quad (1.21)$$

(c) 求 $H_{12}(\omega)$ 和 $H_{22}(\omega)$

用类似的方法,令 $x_1 = 0$, $x_2 = e^{i\omega t}$ 则有

$$y = H_{12}(\omega)e^{i\omega t}, \theta = H_{22}(\omega)e^{i\omega t}$$

代入式(1.19),消去 $e^{i\omega t}$ 后可得

$$\begin{cases} (a - \omega^2)H_{12}(\omega) + bH_{22}(\omega) = d_2 \\ \frac{b}{\rho^2}H_{12}(\omega) + (\frac{c}{\rho^2} - \omega^2)H_{22}(\omega) = e_2 \end{cases} \quad (1.22)$$

由式(1.22)解得

$$\begin{cases} H_{12}(\omega) = \frac{(\frac{c}{\rho^2} - \omega^2)d_2 - be_2}{\omega^4 - (\frac{c}{\rho^2} + a)\omega^2 + \frac{ac - b^2}{\rho^2}} \\ H_{22}(\omega) = \frac{(a - \omega^2)e_2 - \frac{bd_2}{\rho^2}}{\omega^4 - (\frac{c}{\rho^2} + a)\omega^2 + \frac{ac - b^2}{\rho^2}} \end{cases} \quad (1.23)$$

(d) 频率响应矩阵 $[H(\omega)]$

$$[H(\omega)] = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

1.2 特征值问题的计算

结构系统经离散后,其运动方程为

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \quad (1.25)$$

其中, $\{F(t)\}$ 表示激振力,一般情况下,它是随时间变化的已知函数。于是可在初始条件下求出方程(1.25)的解 $\{u\}$,即结构的动力响应问题。若 $\{F(t)\} = \{0\}$,结构在非零初始条件下,方程(1.25)有非零解,这时结构处于自由振动状态。由于没有外载荷作用方程(1.25)的解反映了结构系统本身的固有特性,这就是频率和模态(或振型)。求解频率和振型的问题,称为结构动力学的特征值问题。结构的频率和振型一般又称为特征对,或模态对。结构的模态,在工程实际应用上以及在求解动力响应方面,在结构动力分析中,都有很重要的意义和地位。

一般来说,研究结构的固有特性时,不计阻尼作用,于是方程(1.25)变为

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad (1.26)$$

设结构作微幅简谐振动,则有

$$\{u\} = \{\Phi\}e^{i(\omega_n t + \theta)} \quad (1.27)$$

式中 ω_n ——圆频率;

θ ——初相角;

$\{\Phi\}$ ——不随时间而变的系统位形。

把式(1.27)代入式(1.26)并消去 $e^{i(\omega_n t + \theta)}$ 后,得

$$([K] - \omega_n^2[M])\{\Phi\} = \{0\} \quad (1.28)$$

或写成

$$[K]\{\Phi\} = \lambda_n[M]\{\Phi\} \quad (1.29)$$

其中, $\lambda_n = \omega_n^2$ 。求解方程(1.29)的问题称为广义特征值问题。其核心就是求解满足(1.29)式的 λ_n 和非零解 $\{\Phi\}$ 。显然,特征对 $(\lambda_n, \{\Phi\})$ 决定于结构的刚度矩阵 $[K]$ 和质量矩阵 $[M]$,因此特征对 $(\lambda_n, \{\Phi\})$ 是结构的固有特征。

1.2.1 矢量迭代法

矢量迭代法又称幂法。最基本的矢量迭代法只能求最大的特征对 $(\lambda_N, \{\varphi_N\})$ 或最小的特征对 $(\lambda_1, \{\varphi_1\})$,其方法分别称为矢量正迭代法和矢量逆迭代法。由于在实际问题中,通常只需要求出前若干阶的低阶特征对,因此,这里只讨论广义特征值问题的矢量逆迭代法。为了讨论问题方便,首先说明矩阵的三角分解问题。

1. 矩阵的三角分解

由线性代数理论可知,设有正定矩阵 $[K]$,它的各阶主子式不为零,则可以对 $[K]$ 进行三角分解,使