中学生学习方法指导

周谷城 题

中学生学习方法指导

顾问：韩作黎
主编：侯　纯

福建教育出版社

中学生学习方法指导
顾问　韩作黎
主编　侯　纯
福建教育出版社出版
（福州大梦山7号）
福建省新华书店发行
福建新华印刷厂印刷
787×1092毫米 1/32 10.5印张 4插页 216千字
1987年3月第一版　1987年3月第一次印刷
印数：1—13,550册
书号：7159·1213　　定价：1.70元

给你插上一副金翅膀

（代序）

同样坐在一间教室里，同样学习一种教材，同样听一位老师的授课，然而，同学们的学习成绩却为什么相距甚远？

教育家们在做了大量的调查研究之后，得出结论：排除一般因素之外，重要的原因是学生们所运用的学习方法不同。“学会很重要，会学更重要”，这是经验之谈。

方法，非常值得重视！

谁都知道，人的一生中，在学校读书阶段毕竟是短暂的，有限的。人们在实践中所运用的知识，大都是在学校学习的基础上，靠后来自学的。在当今知识和信息量“激增”的时代，尤其不能光吃学生时代积累的老本。就是说，自学很重要。而自学的方法，则主要是在学生时代形成的。谁的方法科学，谁就有足够的后劲儿。升学也好，工作也好，只有敢于竞争，善于竞争，才能成为优胜者。

如果学生们都能认识到这一点，他们就会努力给自己插上一副金翅膀，在知识的天空中自由翱翔，灵活、轻松、愉快地学习，变知识的奴隶为知识的主人。这副翅膀，就是科学的学习方法。

如果老师们都能认识到这一点，他们就会非常重视用科学的方法传授知识，并且教给学生们科学的学习方法。

如果家长们都能认识这一点，他们就会放手让自己的孩子学得活些，学得多些，学得快些；而不是靠压力，让孩子天天在灯下打消耗战，打疲劳战，用时很多，收效甚微。

近年来，各地印行了不少专门辅导学生升学的书或材料（初中升高中的，高中升大学的），这些书或材料不少导致学生死记硬背，其后果是严重束缚了学生们的独立思维。学生们陷在这些死材料中，即使应付考试，也往往吃亏，题型稍微变化一下，不少学生就目瞪口呆了，苦读苦学一场，结果还是“名落孙山”。

基于上述情况，我们编撰了这本侧重于讲“方法”的书。

这本书面向广大高中、初中学生，特别是正在抓紧复习的毕业班学生；

这本书面向在中学任课的各科教师；

这本书面向有一定辅导能力的学生家长。

我们感谢全国人大常委会副委员长、德高望重的教育家和著名学者周谷城教授为本书亲笔题写书名，这对广大青少年无疑是巨大的鼓励。

我们感谢老教育家、原教育部副部长董纯才同志为本书亲笔题词。八十高龄的董老给学生们提出了殷切的希望，应该当作座右铭。

这本书的作者，都是有教学实践经验的教育工作者。《怎样学习英语》一文的作者孟雁君老师，蜚声教坛，一九八三

年高考，北京市五万名考生中，只有两名英语满分获得者，而这两名学生都是她教出来的。《怎样学习地理》的作者王树声老师，读者们早在电视屏幕上熟悉他了。他是中央电视台北京中学生智力竞赛节目的主持人，在第二届全国优秀电视专栏节目评奖活动中，被评为优秀节目主持人。同时，他还是全国优秀科技辅导员和北京市教育系统先进工作者……

我们向这些热心研讨学生学习方法，为青少年学生开拓知识之路的优秀园丁们致敬！

由于成书匆促，编者水平所限，疏漏之处难免，请读者不吝指正，以使我们今后的工作做得好些。

编　者

一九八五年九月于北京

目　录

1 怎样学习代数

宋 正 友

代数这门课同学们接触较早，也比学习几何和三角容易入门，但要学得活，学得好，却需要下一番功夫，把握学习代数的一些基本规律。

一、透彻理解基本概念

《中学数学教学大纲》指出："正确理解数学概念是掌握基础知识的前提。"由此，可以说：数学概念是数学基础知识的基础。代数作为中学数学的起始学科，透彻理解其中的每一个概念就显得更为重要了。只有透彻理解和掌握了有关概念，才有可能形成运算的技能和技巧，提高解题能力；才有可能发挥独立思考能力和提高自学能力；才有可能提高分析问题和解决问题的能力。

现在有许多同学没有认识到这一点。有的认为概念好学，满足于"明白了"、"记住了"，而不求甚解，一到用时便出现漏洞；有的认为概念很抽象，没意思，只顾去做习题，而且做题时好凭主观想象，不懂得从基本概念入手探讨解题

方法，寻找解题依据，结果事倍功半，效率很低；还有的认为概念不易理解，知难而退。

显然，存在这些想法和做法对于代数课的学习都是不利的。因此，必须改变这种情况，切实重视对概念的学习，真正把概念看成是基础知识的基础，认真加以钻研。对于每一个概念争取都能做到“六能”：能准确地理解，能明确地记住，能用自己的语言表达出来，能与相近的概念进行比较找出差异，能举出正、反例子，能养成使用概念术语的习惯。为此必须做到：

（一）咬文嚼字、逐字逐句地理解

例如，“含有两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是1的方程叫做二元一次方程。”这个概念中的重点词语是“元”、“次”、“项”。初学这个概念时，有的同学往往忽视“项”这个重点词语，把二元一次方程的定义说成：“含有两个未知数，并且未知数的次数都是1的方程叫做二元一次方程。”因而，造成概念混淆，出现差错。又如，“正数的正的方根叫做算术根”。这个概念是中学数学的重要概念之一。它在根式的恒等变形、解无理方程、研究无理函数的图象以及三角式的恒等变形中，都有广泛的应用。但有些同学往往从表面上去理解这个概念，片面地认为，字母或代数式前面没有“-”号就是正的，而不注意从实质上去考虑，忽略了“正数”、“正的方根”这两个关键词语。所以解题中常常出现类似下面的错误：

1．$\sqrt{a^2}=a$（而不问a是负数还是正数）；

2. $\sqrt{(2-x)^2}=2-x$（不考虑x的取值范围如何）；

3. $\sqrt{\lg^2 5-2\lg 5+1}=\sqrt{(\lg 5-1)^2}$

$=\lg 5-1$（忽视了$\lg 5-1<0$这个隐蔽的条件）。

由此可见，对概念咬文嚼字，弄清楚每个关键词语的含义是十分重要的，且不可粗心大意。

（二）注意概念的深化

代数学中的许多概念都有一个逐渐深化、螺旋上升的过程。及时用新的概念去统一旧的概念，才能避免旧知识对新知识的干扰，使概念逐步深化。

要从发展的观点去认识概念，如对实数绝对值概念的认识就是不断深化的。在学习算术根时我们知道$\sqrt{a^2}=|a|$。随着方程、不等式、函数等知识的学习，对它的认识也在深化。下面关于绝对值的一组习题是按着逐渐深化的要求选择的，完全可以应用关于绝对值的概念去解答。同学们不妨一试。

1. 设某数为x，若$|x|=3$，则$x=$？
2. $a<0$时，$|a|+a=$？，$|a|-a=$？
3. 若$2a+|a|=a$，则a是什么数？

   若$b\cdot|b|=b^2$，则b是什么数？

   若$|a|+|b|=0$，则$a=$？，$b=$？
4. 绝对值大于5的整数是什么？
5. 若$|x|<3$，且x属于负数集合，求x。
6. 写出绝对值大于4而小于7的整数。

7. 比较$-\left|-\dfrac{2}{3}\right|$和$\left|-\dfrac{4}{5}\right|$的大小。

8. 当$y=4$时，$|y-4|+y=?$

9. x为何值时，$|x-2|=2-x$？

10. 若$|m|<|n|$，那么$m<n$成立吗？为什么？

11. 已知：$|a|=6$，$|b|=8$，求a^2-b的值。

12. 求x：$\dfrac{1}{2}|x-1|-1=6$。

13. 解不等式：$|x|>0$，$|x|>1$，$|x|<1$，$|x|<0$，
$|x|>a(a>0)$，$|x|<a(a>0)$。

14. 写出$|a-1|$的相反数。

15. 化简：$\dfrac{|x+1|}{x+1}$。

16. 化简：$|1-2x|+\sqrt{(1-x)^2}$。

17. 解方程 $|2x-4|+|x+1|=7$。

18. 解方程 $|x+1|+|x+2|+3=0$。

19. 解不等式 $|x+1|+|2x-1|>3$。

20. 作出函数 $y=\left|\dfrac{x^2}{2}-1\right|$的图象。

有些概念还可以从横的方面去深化，使其深入到不同的学科、不同的领域，融会贯通起来。例如，复习到关于圆的概念时，可以从代数的角度下定义，也可以从三角或几何的角度下定义。

1. 正多边形的边数趋向无穷大时的极限；

2. 满足$|Z-Z_0|=r$的复数Z的集合；

3. 方程$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$的曲线；

4. 极坐标方程$\rho\cos\theta = 2r$的图象；

5. 参数方程$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases}$

当θ为参数时的轨迹；

6. 到定点距离等于定长的点的轨迹；

7. 球的平截面；等等。

总之，既要用发展的观点去认识概念，又要善于从差异、对比和各种不同的角度去认识概念，使其不断深化。

（三）注意使用概念解题

对于运用公式、法则、定理解题大家都很重视，但对于用概念解题，很多同学没有足够地重视。因此，解题速度慢且易错。实际上，在解题中如能恰当地使用概念，往往能使解法十分简捷。

例如：求方程 $x^2 + ax + b = 0$ 与方程 $x^2 + px + q = 0$有且仅有一个公共根的条件，并求出这个公共根。

此题用方程根的概念来解非常简捷。

解：设α为它们的公共根，根据根的定义有：

（一） $\begin{cases} \alpha^2 + a\alpha + b = 0 & (1) \\ \alpha^2 + p\alpha + q = 0 & (2) \end{cases}$

（1）－（2）得：$(a - p)\alpha = q - b$

当$a \neq p$ 时，两方程有且仅有一个公共根$\alpha = \dfrac{q - b}{a - p}$

如若利用韦达定理来列方程组求解，那就麻烦了。实际上，设两方程的根分别为α、β和α、γ，根据韦达定理可列

出：

$$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$$

$$\alpha+\gamma=-p,\ \alpha\gamma=q$$

在这四个方程中消去β、γ以后，才得到方程组（一），显然是走了一段弯路。

又如，求函数 $y=\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-x+1}$的极值。

解：只要注意到分母x^2-x+1是永远大于零的，便可知函数的定义域为一切实数，其函数值y也为实数。

原式化为$(1-y)x^2+(y-5)x+(1-y)=0$

可以看作是关于x的实系数的一元二次方程。

设$1-y\neq 0$，利用根的判别式的概念可得：

$$\Delta=(y-5)^2-4(1-y)^2\geqslant 0$$

即

$$(y+3)\left(y-\frac{7}{3}\right)\leqslant 0$$

函数的值域为 $-3\leqslant y\leqslant\dfrac{7}{3}$

$y_{极小值}=-3$，此时$x=\dfrac{5-y}{2(1-y)}=1$

$y_{极大值}=\dfrac{7}{3}$，此时 $x=\dfrac{5-y}{2(1-y)}=-1$

此题如果不能灵活应用关于判别式的概念，那就会觉得很困难了。

二、 掌握基本的代数思考方法

回顾数学发展的历史可以看到，往往是数学思考方法的

突破，带来较长时间的数学繁荣。学习代数的过程，也有类似的情况。一旦掌握一种新的思考方法，解答问题的能力就会有长足的进步。相反，有些同学在数学学习中掉队，其中一个重要原因就是因为他们某个阶段对某种新的思考方法没有掌握好。比如，刚一开始学习代数，引进字母以后，分类的思考方法显得十分重要。如果不会分类考虑问题，那么，对于诸如：① a是正数吗？ ② $|a|=$？ ③ 比较a^2与a的大小等简单题目也解答不好，以后遇到较为复杂的需要分类讨论的题目就更是寸步难行了。所以，从一定意义上讲，掌握一种新的思考方法，要比解几道具体习题更为重要。

（一）用字母表示数的基本思想方法

用字母表示数是代数学习的重要方法。对初学者来说，从具体的数到字母代数，是认识上的一次飞跃。引进字母以后，马上便可以进行一些简单的推理论证。比如，“两个偶数的和一定是个偶数。”过去是用具体的数去验证的。现在引入字母，就能用一般式进行表达和推证了。设一个偶数为$2n$，另一个偶数为$2k$，其和为$2n+2k=2(n+k)$，显然是偶数。

用相同的方法还可以证明：“两个连续自然数的积一定能被2整除”；“三个连续自然数的和是3倍的数”；“三个连续自然数的积一定能被6整除”等题目。

对于加法交换律、结合律，乘法交换律、结合律以及乘法对加法的分配律等运算规律，过去也是用具体的数去验证的。现在将其内容用字母的数学形式一一依次表示为：

$$a+b=b+a$$

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

$$a\cdot b=b\cdot a$$

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

$$(a+b)\cdot c=ac+bc$$

这样，由式子中字母取值的任意性，很自然地过渡到抽象性。奠定了代数运算的基础。

字母不但可以表示一个数，而且可以表示一个代数式或一个函数式。由此，我们得到了换元法。这一方法在化高次为低次、分式为整式、无理式为有理式、超越式为代数式等方面都有十分重要的作用。

例，解方程组：
$$\begin{cases}\log_2(x+y)+\log_3(x-y)=1\\ 2x^2-y^2=4\end{cases}$$

对于这样一个很复杂的方程组，我们若使用换元法就不难求解。

解：设
$$\log_2(x+y)=A$$
$$\log_3(x-y)=B$$

则有
$$A+B=1$$

由
$$2x^2-y^2=4$$

等式两边以2为底取对数，有

$$(x-y)(x+y)=2$$

等式两边再以3为底取对数，有

$$\log_3(x-y)+\log_3(x+y)=\log_3 2$$

由对数换底公式

有 $\log_3(x+y)=\dfrac{\log_2(x+y)}{\log_2 3}$

$$=\log_3 2\cdot\log_2(x+y)$$

$$=A\cdot\log_3 2$$

则原方程组转换为

$$\begin{cases}A+B=1\\B+A\cdot\log_3 2=\log_3 2\end{cases}$$

最后解得 $\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

字母还可以表示待定系数，由此，我们得到待定系数法。这一方法在恒等变形、求函数、研究方程等方面有着广泛的应用。

例：已知多项式 $x^4-6x^3+13x^2-12x+4$ 是一个完全平方式，求它的平方根。

解：因为首项系数是1，所以设平方根为

$\pm(x^2+px+q)$，其中p，q是待定的系数。

于是有：$x^4-6x^3+13x^2-12x+4\equiv(x^2+px+q)^2$

即$x^4-6x^3+13x^2-12x+4\equiv x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+$

$$+2pqx+q^2$$

$$\therefore\begin{cases}-6=2p\\13=p^2+2q\\-12=2pq\\4=q^2\end{cases}$$

解得：$p=-3$，$q=2$

从而得到平方根是$\pm(x^2-3x+2)$。

字母还可以起媒介作用，把无关的量联系起来。由此，我们又得到了设辅助元素法。

例：已知：$\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$

求证：$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

解：设$\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}=k$

则有
$$x=(b+c-a)k$$
$$y=(c+a-b)k$$
$$z=(a+b-c)k$$

代入求证式左边得：

$$(b-c)(b+c-a)k+(c-a)(c+a-b)k+(a-b)(a+b-c)k$$

展开合并后正好为零，等于求证式的右端，由此得证。

此题的解法就是通过字母k的媒介作用，把x，y，z和a，b，c联系起来，在化简时不再出现x，y，z，让辅助元素k充当一个中间角色。

同学们可练习用设辅助元素法解下列方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{x+a}{l}=\dfrac{y+b}{m}=\dfrac{z+c}{n}\\ lx+my+nz=0\end{cases}$$

总之，从用字母表示数、表示未定元、表示待定系数，到换元、设辅助元，再到用$f(x)$表示式、表示函数，直到变量代换等等，这是一套基本的代数方法，必须熟练掌握，灵活运用。