

微积分基本方法

袁相碗 著



南京大学出版社

微积分基本方法

袁相碗 著



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分基本方法 / 袁相碗著. —南京: 南京大学出版社, 2010. 3

ISBN 978 - 7 - 305 - 06783 - 9

I. ①微… II. ①袁… III. ①微积分 IV. ①0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 035176 号

出版者 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093
网 址 <http://www.NjupCo.com>
出版人 左 健

书 名 微积分基本方法
著 者 袁相碗
责任编辑 孟庆生 编辑热线 025-83593947

照 排 南京玄武湖印刷照排中心
印 刷 南京人民印刷厂
开 本 880×1230 1/32 印张 9 字数 215 千
版 次 2010 年 3 月第 1 版 2010 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 978 - 7 - 305 - 06783 - 9
定 价 22.00 元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 Press@NjupCo.com
Sales@NjupCo.com(市场部)

* 版权所有, 侵权必究

* 凡购买南大版图书, 如有印装质量问题, 请与所购图书销售部门联系调换

序

朱 哲 楨

1979年至1989年初,本人曾执教于南京大学数学系。在此期间,我和袁相碗教授曾合作并联名发表过10余篇有关数学基础与数学方法论方面的文章,还合作开设了“数学方法论”选修课,并撰写过相关的教材或讲义。后来,他逐步调任教育管理工作,并结合教育管理工作的实际撰写过一系列重要的论文。尽管如此,20多年来,我们仍保持着较为密切的联系,堪称是老友了。他从教育管理岗位退下来之后,仍关注教育,情系数学,并孜孜不倦地查找和阅读有关文献资料,撰写出《微积分基本方法》这样一部有意义有价值的著作,这无论从哪个方面和哪个角度看,都是十分难能可贵的。

国际科学家联盟(IUS)有两个下属的联合会,其中之一叫做“国际逻辑学、方法论、科学哲学联合会(DLMPS)”,该联合会每隔4年召开一次“逻辑学、方法论与科学哲学”国际会议,规模甚大。该国际会议始终倡导并持有一个主题思想,这就是每个科学工作者都要学习和掌握三门课程,这就是“科学史”、“方法论”和“科学哲学”。就数学工作者而言,应当学习和掌握“数学史”、“数学方法论”和“数学哲学”等知识,其中道理十分清楚。因为不学习数学史,就很难认知数学的未来;而数学方法论是研究和讨论数学发展规律、数学思想方法以及数学中的发现、发明

与创新等法则的一门学问,因此学习和掌握数学方法论这门课程,将大大有利于在数学领域中去发现、发明和创新。历史上有贡献的数学家都有他们自己的哲学境界,一个数学工作者完全不学习数学哲学,充其量只能成为一个研究领域很窄的数学“专”家(他们喜称为数学匠),很难成为真正的数学家,也不会培养出一个真正的数学家来。

我国当前的数学教学模式和数学教科书,大多偏重于数学知识的灌输和解题技巧的训练,这样培养出来的学生想象力贫乏,不善于灵活运用所学的知识去处理实际问题,更谈不上去发现真理和寻找真理了。因此,我们应该提倡贯彻数学方法论的启发式教育方式,在教材的编写过程中,注意对“形式概念”的认识过程进行分析,进而激发学生的创造性思维。

袁相碗教授所撰写的《微积分基本方法》一书,可谓一部与上述“逻辑学、方法论与科学哲学国际会议”所倡导的主题思想相吻合的佳作。正如他在该书前言中明确指出的:“有鉴于当今微积分学的教育活动,只能注重于微积分学知识的传授和技能的培训,难以使受教育者了解微积分学孕育、创立、演变与发展的历史过程,以及以无穷小为核心概念的微积分基本方法在其中所起到的基础作用,所以一直希望在数学史和方法论的结合上,能撰写一本辅助性的读物,以弥补当今微积分学教育现状之不足。”所以,本人认为《微积分基本方法》一书,以数学史为依据,论述微积分基本方法(无穷小方法)的历史轨迹,揭示数学理论创新和数学方法创新的密不可分性,是一件非常有意义的事,这也是本人乐于为该书作序的原因。

2009年6月于南京

前 言

本人曾在大学从事过微积分学(高等数学)的教学工作和数学基础与数学方法论的研究工作。有鉴于当今的微积分学教育活动的实际情况,只仅仅注重于微积分学知识的传授和技能的培训,难以使受教育者了解微积分学孕育、创立、演变与发展的历史过程,以及以无穷小为核心概念的微积分基本方法在其中所起到的基础作用,所以一直希望在数学史和方法论的结合上,能撰写一本辅助性的读物,以弥补当今微积分学教育现状之不足。

微积分学是研究变量与函数的微积分性质(连续性、可微性、可积性、收敛性等)及其运算法则的一个数学分支。它的基础是无穷小,本质上是以无穷小为中心概念的一种“算法”(称为“无穷小方法”)。微积分学的发展史表明:在数学外部的科学数学化和数学内部的矛盾运动的相互作用下,微积分理论是随着微积分基本方法(无穷小方法)的演变而进化的,而微积分基本方法的演变,又取决于数学上认识与处理无穷小这一概念的技巧。据此,《微积分基本方法》试图以微积分的发展史为依据,以数学如何认识与处理无穷小为主线,遵循数学史与方法论相结合的原则,系统地论述微积分基本方法(无穷小方法)的历史轨迹。其目的是:为从事微积分学教育活动的教师、学生和其他读者提供一本课外的读物。

本书分 12 章,论述了微积分基本方法的源与流,其中有关数学史史料的选取以及有关数学家的贡献,都是围绕并服务于无穷小概念及其方法的这一主题需求的。对于与此无关和关系不密切的史料以及有关数学家在其他方面的贡献,均不在论述之列。其主要参考资料是:M. 克莱因的《古今数学思想》和《数学:确定性的丧失》,其他的参考书目都列在书末。所以,除非常必要者外,恕未逐条注明出处。

为适应学习微积分学和其他读者的需求,《微积分基本方法》采用文献综述的方式和通俗性的语言,不仅论述了当今微积分学教育中的实数域上的极限法的诞生过程,而且介绍了非标准数域上的以“单子结构”为中心概念的无穷小方法。由于“非标准分析”涉及集合论和数理逻辑等至今尚未普及的较为抽象的数学知识,所以这里仅作简单而通俗的介绍,有兴趣的读者可阅读有关专著或教材。

在完成该书的初稿之后,著名数学家、南京航空航天大学计算机科学研究所所长朱梧楨教授在审阅中提出了许多宝贵的意见,他不仅欣然为该书作序,而且对其中第 11 章 § 11. 4 与 § 11. 5 的有关内容进行了必要的充实与提炼。对此,特向他表示感谢!

目 录

第 1 章 微积分基本方法引论	1
§ 1.1 创立微积分的主要动因	1
§ 1.2 微积分的创立	6
§ 1.3 微积分的发展	9
§ 1.4 微积分的基本方法	16
第 2 章 初等几何学中的“穷竭法”	19
§ 2.1 第一次数学危机	19
§ 2.2 曲边形求积中的穷竭法	27
§ 2.3 穷竭法是初等几何学中具有普遍性的数学方法	40
第 3 章 几何形态的“不可分法”	43
§ 3.1 穷竭法的拓展	44
§ 3.2 卡瓦列利创立的“不可分法”	46
§ 3.3 不可分法的改进与完善	53
第 4 章 笛卡儿创立的“坐标几何法”	60
§ 4.1 笛卡儿是“解析几何学”的主要创立者	60
§ 4.2 笛卡儿创立“解析几何学”的主要动因	63

§ 4.3	笛卡儿创立的“坐标几何法”	67
§ 4.4	“坐标几何法”的意义	71
第5章	代数形态的“微元法”	76
§ 5.1	罗伯瓦尔和笛卡儿的求切线方法	76
§ 5.2	费尔马创立的代数形态的“微元法”	79
§ 5.3	巴罗的“微分(特征)三角形”及其求切线方法	84
§ 5.4	瓦里斯的《无穷算术》	90
第6章	牛顿创立的“流数术”	94
§ 6.1	牛顿的“科学数学化”思想	96
§ 6.2	牛顿创立的“流数术”	98
§ 6.3	牛顿发现了求面积是求流数的逆过程	103
§ 6.4	首创的逐项积分法	105
§ 6.5	牛顿的“最初比和最后比”思想	109
第7章	莱布尼茨创立的“无穷小算法”	114
§ 7.1	从自然数列的“阶差”思想到无穷小算法	115
§ 7.2	应用无穷小算法创立的微分学	120
§ 7.3	应用无穷小算法创立的积分学	125
§ 7.4	莱布尼茨的无穷小概念	130
第8章	神秘的无穷小方法	135
§ 8.1	流数术和无穷小算法本质上都是无穷小方法	135
§ 8.2	无穷小悖论(第二次数学危机)的引发	140
§ 8.3	消除无穷小悖论的尝试	151

§ 8.4 无穷小悖论为极限方法的创立提供了动力与契机	160
第 9 章 实数域 $\mathbf{R}$ 上的极限方法	164
§ 9.1 波尔察诺的“承前启后”之贡献	165
§ 9.2 柯西创立了极限方法	168
§ 9.3 魏尔斯特拉斯进一步完善与发展了“极限论”	182
第 10 章 极限方法的奠基(实数论的创立)	189
§ 10.1 戴德金用“分划法”创立了“实数论”	190
§ 10.2 皮亚诺把实数理论建立在公理系统上	196
§ 10.3 “实数论”为极限方法奠定了逻辑基础	203
第 11 章 古典集合论的思想方法	215
§ 11.1 康托尔的实无穷集合及其造集原则	216
§ 11.2 应用一一对应原则引进“势”的概念	223
§ 11.3 集合论观点下的实数集	226
§ 11.4 超限基数与超限序数	229
§ 11.5 集合论悖论(第三次数学危机)的引发	235
第 12 章 非标准数域 ${}^*\mathbf{R}$ 上的“无穷小方法”	249
§ 12.1 数理逻辑的兴起	251
§ 12.2 应用“模型论”构建非标准实数模型 ${}^*\mathbf{R}$	255
§ 12.3 ${}^*\mathbf{R}$ 上的“单子结构”	260
§ 12.4 ${}^*\mathbf{R}$ 上的无穷小方法	265
参考文献	274
后 记	275

第 1 章 微积分基本方法引论

微积分和其他任何一个数学分支一样,都是诞生于某一特定的历史时代,都是在当时的社会与科学发展的需求和数学内部矛盾运动的相互作用下,有一个孕育、创立、演变、发展的历史过程。微积分基本方法是微积分学这一数学分支层面上的数学方法,它是建立微积分学理论的基本方法。它和微积分理论的创立与发展是相伴而行的,而且微积分基本方法的创新往往是微积分理论创新的“唯一入口”或主要途径。

因此,微积分基本方法是和微积分理论的创立与发展密不可分的,从数学史和方法论的结合上,论述微积分基本方法的历史演变过程,有必要首先对微积分学的创立与发展的历史轨迹及其与此密切相关的数学发展的主流思想先作如下的介绍。

§ 1.1 创立微积分的主要动因

微分和积分的思想萌芽可以追溯到古代,但是作为研究变量和函数的微分与积分及其互逆关系的微积分学,则只能诞生于 17 世纪下半叶的欧洲。

微积分的创立是 17 世纪以来数学内部的矛盾运动和数学外部的“科学数学化”相互作用的结果,而其中起主导与支配作用的主要动因则是当时科学数学化这一主流思想。

1.1.1 17 世纪以来的科学数学化

经过中世纪的黑暗年代和文艺复兴,世界科学和数学的中心由古代的希腊和东方移到了欧洲。欧洲人既吸纳古希腊人推崇的以《几何原本》为经典的公理化思想方法,更推崇古代东方人的以“算术”与“代数学”为代表的算法化思想方法,尤其是开普勒(T. Kepler, 1571—1630)应用数学的思想方法,提出了著名的“开普勒三大定律”,创新与发展了天文学之后,笛卡儿(Descartes, 1596—1650)和伽利略(Galileo, 1564—1642)针对当时科学和数学的发展现状,为改革科学方法论而提倡“科学数学化”。对此, M. 克莱因在他的《古今数学思想》(第二册)中说:“截至 1600 年,欧洲的科学无疑地注意到数学在自然科学研究上的重要性……Descartes 和 Galileo 两人针对科学活动的基本性质,进行革命化。他们选定科学应该使用的概念,重新规定科学活动的目标,改变科学中的方法论。他们这样做,不仅使科学得到出乎意料和史无前例的力量,而且把科学和数学紧紧地结合起来,他们这个计划,实际上是要把理论科学归结到数学。”

据此,笛卡儿和伽利略所提倡的科学数学化,其主要内涵是:① 科学的本质是数学。“上帝是按数学设计了宇宙”,“宇宙这本大书是用数学语言写的”。② 科学应以数学为典范。确认数学(欧几里得几何学)是“唯一正确的真理体系”,并推崇数学公理化的思想方法。③ 变革科学的方法论。“把科学和数学紧紧地结合起来,使科学得到出乎意料和史无前例的力量”,用数学方法达到科学创新的目标。

与此同时,笛卡儿和伽利略分别提出并耸起了“假设演绎法”(强调理性与演绎)和“实验归纳法”(强调实验与归纳)这两座近代科学方法论的丰碑。

1.1.2 “科学数学化”即是数学的注重实用的“算法化”思想

“科学数学化”对科学而言,是要求科学变革方法论,实行科学和数学的紧密结合,并在科学创新与研究活动中,广泛地应用数学的理论知识及其思想方法,去达到科学研究的目标。而对于数学而言,则要求数学注重实用或应用,在数学和科学的密切结合中,创新数学的理论与方法。这正好是数学发展中注重实用的数学模型化或算法化的主流思想,其思维过程如图 1-1 所示。

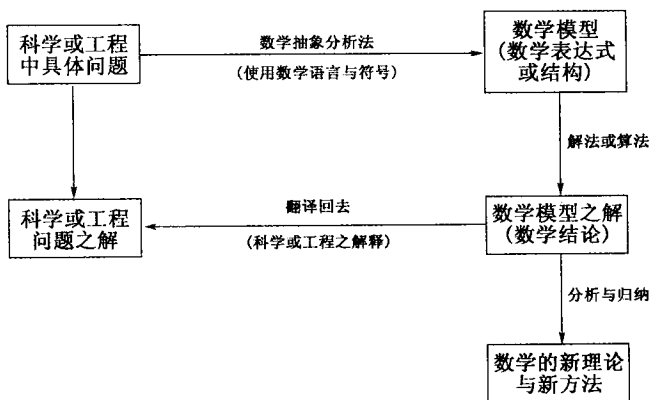


图 1-1

因此,对于数学而言,笛卡儿和伽利略倡导科学数学化,实质上是扬弃古希腊人的注重逻辑及其公理化的思想方法;提倡古代东方(中国、印度和阿拉伯)的注重实用及其算法化的数学思想。

(1) 数学模型之构建

针对科学或工程技术中的某具体问题,通过“由具体到一般”或“由果到因”的数学的抽象分析,找出最主要的、最基本的

和最稳定的因素,近似地将其归纳为用数学语言符号表述的数学概念或数学表达式(数学模型)称之为数学模型构建。

(2) 数学模型之求解

按数学“精确性”的要求,针对数学模型之特征与类别,进行数学处理称之为数学模型之求解。其着力点在于求解艺术、计算方法、计算程序和计算工具的设计与创新;其目标在于,既获得原科学和工程技术的具体问题之科学结论,又力求创造某一具有普遍性的新算法或“术”。

(3) 数学模型解之应用

针对具体的数学模型,选择与应用某一算法与解法而得到的数学模型之解,除应用于“翻译回去”取得原科学或工程技术的具体问题的答案或结论之外,还可致力于数学理论及其方法的创新,即在进一步应用、推广、总结与归纳的基础上,力求获得或找到某一类或某一分支的具有普遍意义的新的数学理论或算法。

1.1.3 科学数学化是创立微积分的主要动因

关于创立微积分的主要动因,M. 克莱因在《古今数学思想》(第二册)中写道:“……虽然在某种程度上,它是已被希腊人处理过的那些问题的解答,但是微积分的创立,首先是为了处理 17 世纪主要的科学问题的。”他将其概括为四类问题。

(1) 求物体瞬时速度、加速度及运动距离

已知物体移动的距离是时间的函数,求物体在任意时刻的速度和加速度;反过来,已知物体的加速度是时间的函数,求物体在任意时刻的速度和距离。

其难度是人们当时只知计算平均速度的公式,而对于 17 世

纪所涉及的每时每刻都在变化的瞬时速度和加速度却不知如何计算。若应用平均速度的计算公式,则瞬时速度的距离和时间之比为 $\frac{0}{0}$ 。于是,数学面临着处理:“匀速”和“瞬速”的矛盾。

(2) 求曲线的切线

这个问题虽然是一个纯几何的问题,但是在17世纪则首先是因为透镜的设计需要研究光线射入透镜的入射角,而入射角是光线和曲线的法线所交成的角。所以,光学需要数学解决如何求法线(垂直于切线的直线)或切线的问题。此外,在运动学的研究中,遇到了“运动物体在它的轨迹上任一点处的运动方向就是轨迹的切线方向”的问题。

对此,虽然已知圆锥曲线的切线可以定义为“和曲线只交于一点且位于曲线一侧的直线”,但是对于17世纪所面临的较为复杂的非圆锥曲线,“切线”的定义及其求法却不得而知。

(3) 求最大值和最小值问题

从炮筒射出炮弹,炮弹的射程(水平距离)依赖于发射角(炮筒对地面的倾斜角)。问题是如何求得最大射程的发射角。伽利略通过不同角度发射的实验后断定(在真空中)最大射程的发射角是 45° 。此外,研究行星运动,如求行星离开太阳的最远和最近的距离,也涉及求最大值与最小值问题。对此,需要寻找普遍性的数学方法。

(4) 求曲线长、曲面面积、物体重心及物体之间的引力

包括:求曲线长(例如,行星在已知时间内移动的距离);求曲线围成的面积和曲面围成的体积;求物体的重心和求一个体积相当大的物体(如行星)作用于另一个物体的引力等问题。这

都涉及如何处理“曲”与“直”之间的矛盾,解决曲线求长与曲面求面积等问题。对此,古希腊以来虽有过研究,但一直没有找到普遍性的数学方法。

科学对数学提出的上述四类问题,在数学上可将其归结为微分学和积分学两大类,而关键在于:如何引进变量与函数的概念,并描述它们在无限变化的过程中,实现“匀”与“瞬”、“曲”与“直”,以及微分和积分之间的相互转化。

§ 1.2 微积分的创立

17 世纪以来的科学数学化是创立微积分的主导思想和主要动因。但是,数学外部的科学数学化的需求,必须而且只能通过数学内部的矛盾运动的激发才能发生作用。所以,面对 17 世纪以来科学对数学提出的四类问题,数学不仅需要为其提供具有普遍性的求微分问题(求速度与求切线)和求积分问题(求距离与求面积)的数学方法,而且更需发现微分和积分之间的内在联系。而“充分明白了一个程序是另外一个的逆程序而推导出来的微分和积分的一般方法,只能被一个掌握了希腊人和卡瓦列利(Cavalieri, 1598—1647)的几何方法,以及笛卡儿和瓦里斯(Wallis, 1616—1703)的代数方法的人所发现。这种人只可能在 1660 年以后出现,并且他们当真的体现在牛顿(Newton, 1642—1727)和莱布尼茨(Leibniz, 1646—1716)的身上”(D. J. Struik《数学简史》,科学出版社,1956 年 12 月,第 89 页)。由此可见,微积分学是 1660 年之后由牛顿和莱布尼茨分别独立地创立的。

1.2.1 创立微积分学的标志是发现了微分和积分是一个互逆的过程

有关曲边形求积(积分)问题,古希腊和古代中国当时已创

立了“穷竭法”。17世纪以来,卡瓦列利提出了几何形态的“不可分量原理”;笛卡儿与费尔马(Fermat, 1601—1665)不仅创立了《解析几何学》,而且提出了求切线的代数方法;瓦里斯大胆地对 ∞ 和 $\frac{1}{\infty}$ 进行直接的代数运算;巴罗(Barrow, 1630—1677)则提出了著名的“微分(特征)三角形”概念……但是,所有这些都只是几何学中为求个别的曲边形面积或曲线的切线而采取的特殊数学技巧或解法,或者是几何形态的或代数形态的无穷小方法雏形。它们既不是某类(微分或积分)问题的一般性的数学方法,又没有发现求积(积分)和求切线(导数)这两类问题之间的内在联系。因此,这些数学家们的贡献只是孕育了微积分并为微积分的诞生提供了基础。牛顿和莱布尼茨的划时代贡献则是分别从不同的途径,不仅寻到了求微分(导数)和求积分的普遍性法则,而且“充分明白了一个程序是另外一个逆程序而推导出来的微分和积分的一般方法”,发现了微分和积分之间的互逆关系。因此,他们是微积分学的创立者。据此,微积分学的主要内容应由三个部分构成:① 微分学;② 积分学;③ 微积分基本定理(牛顿-莱布尼茨公式)。

1.2.2 初创的微积分学是具有一定普遍性的算法或“术”

由于创立微积分学的主要动因是17世纪以来的科学数学化(亦即数学发展中的注重实用的模型化或算法化的主流思想),所以牛顿的“流数”(速度、导数)概念是来自物体运动中的“流量”随着时间变化的变化率;而莱布尼茨的“差分”(微分)概念则来自他哲学研究中的“单子论”。所以,他们的导数或微分的概念是分别从各自所研究的力学和哲学中抽象地概括出来的。为了寻找并建立求流数(导数、微商)和求和(求积分)的计算方法或“技术”,牛顿和莱布尼茨分别创立了“流数术”和“无穷