李蕃編著

復興高級中學教科書

三角學

商務印書館發行

序

我國向所通行之三角學教科書,大多迻譯東隣,材料旣感不足,條理亦欠顯明,求一適合於高中程度者,渺不可得;教授者每以是採用英文原本.但東西各國之學制不同,詳略取捨,自難苟且,而國人講學,仰藉他國文字,尤屬不便.李君銳夫,有鑒於斯,當其肄業於中央大學時,以其研究高深學理之餘,具改進中等教育之志,以事纂述,欲謀中學與大學程度之溝通.卒業後,任教中學,成績昭然.近以所著高中平面三角學一稿見示,屬爲校閱;余觀其內函富麗,程序井然,深合國內高級中學之用,且第九,第十兩章,尤可供大學一年級之參考.故疾促其付梓,以應國人.并望李君本斯志,更從事於幾何代數等之纂述,庶乎國人講學,不必仰藉外國文字,而讀者亦易收指臂之效也.是爲序.

段子燮序於中大算學系.

編輯大意

是書乃參考 Hobsen, Loney, Todhunter, Rothrock, Granville, Wentworth-Smith, Ferval, Commissaire 諸書而編述，期爲本國高中之教科書.

普通三角教科書咸將銳角函數及任意角函數分別敍述，殊非得策；蓋此易使讀者分銳角函數及任意角函數爲二物.本書力矯此弊，所有定理與公式之證明，不分銳角與任意角，使讀者有普遍之觀念.

普通三角教科書多列入對數一章，亦非作者所敢贊同；蓋對數非三角學之範圍，惟在解三角形時，應用之以簡其運算耳，故本書不另設一章，而僅在第三章中稍加復習.再本書爲讀者便於進習高深數學計，特將三角之應用於代數，在第十章中述其略焉.

本書未付梓前，曾在高級中學印爲講義，試教數次，結果頗爲圓滿.所有習題，選擇至爲嚴密，并經演算，以爲校對.我師段調元張益光二教授亦曾細爲校閱，深表謝忱，近復蒙商務印書館諸編輯先生來函指正，尤所感激，倘望海內學者，不吝賜教爲幸.

作者識.

目錄

三角學

第一章

角之量法

§1. **三角學** 三角學英文爲 Trigonometry 源於希臘文 $\tau\rho\iota\gamma\alpha\nu o\nu$(三角形)及 $\mu\epsilon\tau\rho o\nu$(量)二字,蓋量三角形之意也;換言之,即在研究三角形之邊與角之關係耳.但時在今日,其範圍大加擴充,所有關係於角之代數研究亦所屬焉.

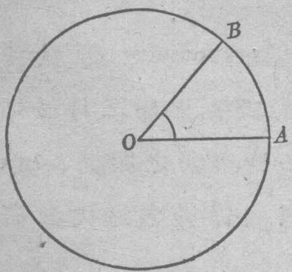
§2. **角之單位** 三角學之研究既在角,故量角不能不有單位.量角之單位有三:即六十分制 (sexagesimal system),百分制 (centisimal system) 及弳制 (circular system).茲分述之如次:

I. 六十分制 六十分制以度 (degree) 爲單位,一度等於圓周三百六十分之一之弧所張之圓心角,一度六十分,一分六十秒.此蓋昔日巴比侖 (Babylon) 之天文學家取一年爲三百六十日之意也.表度,分,秒之符

號爲°,′,″;例如三度十五分十七秒書爲3° 15′ 17″.

II. 百分制　百分制一名爲法國制(French system),分一直角爲一百級 (grade),每級一百分,每分一百秒.級,分,秒之符號爲 g,`,``;例如二十五級十八分五秒書爲$25^g$ 18` 5``.百分制爲用未廣.

III. 弳制　弳制一名弧度法 (Circular Measure),以弳(radian)爲單位,一弳等於與半徑等長之弧或此弧所函之圓心角.如圖設 AB 弧之長等於半徑 AO,則



$$\angle AOB=1\text{弳}$$

弳制雖實行未久,然今日之高等數學中,類皆用之.

§3. **各單位之關係**　設R爲圓之半徑,π爲圓周率,即3.14159265……則由幾何學圓周 $=2\pi R$, 復依弳之定義,圓周之長爲2π弳,但圓周又爲三百六十度,故

$$2\pi\text{弳}=360^\circ$$

即

$$1\text{弳}=\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{180^\circ}{3.1416}=57^\circ 2957,$$

$$1\text{度}=\frac{\pi\text{弳}}{180}=\frac{3.1416\text{弳}}{180}=0.01745329\text{弳}$$

由此得下列之關係:

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ 弳}=57.2957\text{ 度}\\ 1\text{ 度}=0.01745329\text{ 弳}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

讀者尙須明下列之記法:

$$360^\circ=2\pi\text{ 弳},\qquad 60^\circ=\frac{\pi}{3}\text{ 弳},$$

$$270^\circ=\frac{3\pi}{2}\text{ 弳},\qquad 45^\circ=\frac{\pi}{4}\text{ 弳},$$

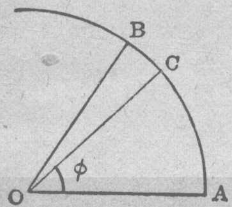
$$180^\circ=\pi\text{ 弳},\qquad 30^\circ=\frac{\pi}{6}\text{ 弳},$$

$$90^\circ=\frac{\pi}{2}\text{ 弳},\qquad 15^\circ=\frac{\pi}{12}\text{ 弳}.$$

玆更進而求以上三種單位之關係,以便互相推算.設有一角,以度計之爲 D, 以級計之爲 G, 以弳計之爲 R. 因一直角爲 90°, 則 $\frac{D}{90}$ 表此角與直角之比;一直角又爲 100^g, 則 $\frac{G}{100}$ 亦表此角與直角之比;但 $\frac{\pi}{2}$ 表直角以弳爲單位,故此角與直角之比爲 $\frac{R}{\frac{\pi}{2}}$, 即 $\frac{2R}{\pi}$, 以上三比之值應相等,故得公式

$$\frac{D}{90}=\frac{G}{100}=\frac{2R}{\pi}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

§4. 弧之長　設 ϕ 爲一角,以 AO 爲半徑作一圓,



作 $\angle AOB$ 使等於一弳. r 表半徑之長, R 表 AC 弧之長; 則因圓心角之大小與其所對之弧成正比,故

$$\frac{\phi}{\angle AOB}=\frac{R}{r}.$$

若 ϕ 以弳為單位,則 AOB 為單位角,故

$$\phi=\frac{R}{r}$$

故 $$R=r\phi \qquad \cdots\cdots(3)$$

故任何弧之長等於其半徑乘其所張之角,但此角係以弳為單位.

習 題

1. 試化 $12°$, $56°$, $43° 15' 8''$, $22°.9$ 為弳及級.

2. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{18}$, $2n\pi$, 各為若干度.

3. 試化弳 2.588, 1.85, 0.4 為度及級.

4. 設有一圓, 其半徑為4英尺, 問其圓心角為 $80°$ 所對之弧之長為若干? 答: 5.6 英尺.

5. 已知地球與太陽之距離為 92,897,000 英里, 太陽之視直徑為 $32' 4''$, 求太陽之直徑. 答: 866,500 英里.

〔註〕 日月星辰, 總稱天體 (celestial body), 我人觀察天體時, 若恰

有二視線與天體相切,且與天體中心共一平面,則此二視線所成之角曰天體之視直徑(apparent diameter).

6. 已知月球公轉地球一次所需之時間爲27.4日,問月球每日之角速度爲若干弳?

答: 約0.22685弳.

7. 設有三角A, B, C. 已知A超過於B者$\frac{\pi}{10}$弳,B與C之和爲30級,A與B之和爲36度,問A, B, C三角各若干度?

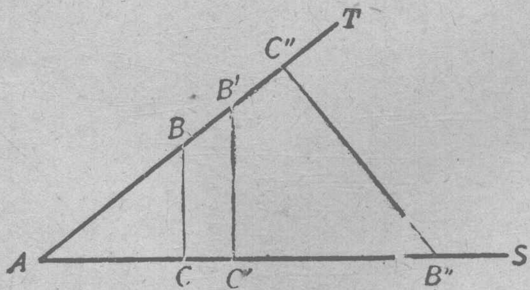
答: 27°, 9°, 18°.

8. 試證等於半徑之弧所張之圓心角爲常數

第 二 章

三角函數及其基本性質

§1. 銳角之三角函數 設 SAT 爲一銳角,在 AT 上取任意點 B, B',作 AS 上之垂線 $BC, B'C'$;再在 AS 上取任意點 B'',作 AT 上之垂線 $B''C''$.於是三角形 ABC, $AB'C'$, $AB''C''$ 爲相似,蓋 A 角爲公共且各有一角爲直角也.相似三角形之邊之比爲相等即



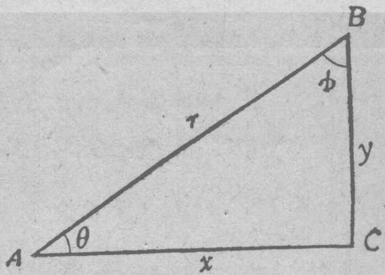
$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC''}{AB''}$$

$$\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'}=\frac{B''C''}{AC''}$$

此三式之分子分母各相易,其比亦等.

由此得知一角之二邊任意延長,其所成直角三角形之邊之比爲不變;反之,若角變動,則各邊之比亦隨之以變,故各邊之比爲角之函數(Function)也.因比之數有六,故一角之函數爲數有六.



設 ABC 爲一直角三角形,其三邊之長爲 r, y, x, 則我人命

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta&=\frac{y}{r}\\ \cos\theta&=\frac{x}{r}\\ \tan\theta&=\frac{y}{x}\\ \cot\theta&=\frac{x}{y}\\ \sec\theta&=\frac{r}{x}\\ \csc\theta&=\frac{r}{y}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

$y = r\sin\theta$

$x = r\cos\theta$

$y = x\tan\theta$

$x = y\cot\theta$

$r = x\sec\theta$

$r = y\csc\theta$

此六比之值謂之三角函數 (trigonometric functions).

$\sin\theta$ 讀爲 θ 之正弦 (sine),

$\cos\theta$ 讀爲 θ 之餘弦 (cosine),

$\tan\theta$ 讀爲 θ 之正切 (tangent),

$\cot\theta$ 讀爲 θ 之餘切 (cotangent),

$\sec\theta$ 讀爲 θ 之正割 (secant),

$\csc\theta$ 讀爲 θ 之餘割 (cosecant).

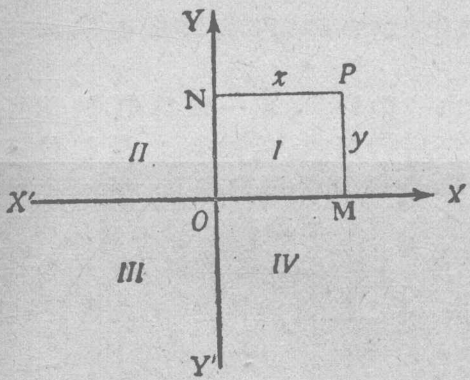
此外尙有二函數,亦隨角以變,即

$$\operatorname{vers}\theta=1-\cos\theta$$

$$\operatorname{covers}\theta=1-\sin\theta$$

前者讀爲 θ 之正矢 (versed sine), 後者讀爲 θ 之餘矢 (coversed sine).

§2. 坐標 設 $X'X$ 爲一水平直線, $Y'Y$ 爲在 O 點垂直於 $X'X$ 之直線;於是在此 $X'X$, $Y'Y$ 平面上任何點之位置可由其與 $X'X$ 及 $Y'Y$ 二垂線之距離及方向以定之. P 點與 $X'X$ 之距離 $PM(=y)$ 曰此點之縱坐標 (ordinate), P 點與 $Y'Y$ 之距離 $PN(=x)$ 曰此點之橫坐標 (abscissa), 合縱橫二坐標曰 P 點之坐標 (coördinates). $X'X$ 及 $Y'Y$ 二正交直線曰坐標軸 (axes

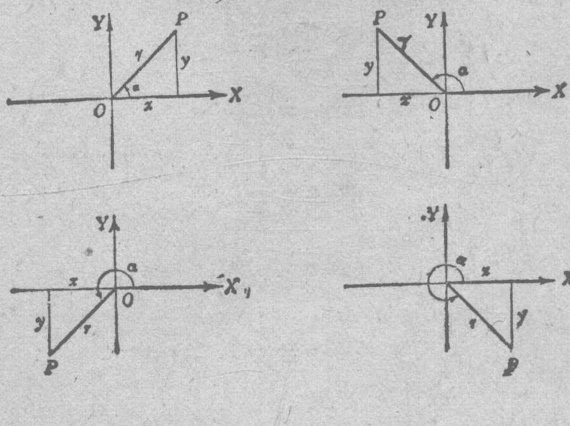


of coördinates), $X'X$ 曰 X 軸, $Y'Y$ 曰 Y 軸. O 點曰原點 (origin).

縱坐標在 $X'X$ 之上爲正,在 $X'X$ 之下爲負;橫坐標在 $Y'Y$ 之右爲正,在 $Y'Y$ 之左爲負.

坐標軸分全平面爲四象限 (quadrants), 圖中 I 爲第一象限, II 爲第二象限, III 爲第三象限, IV 爲第四象限.

§3. **任意角之三角函數** 若 θ 大於一直角,則其



函數之定義,可應用坐標軸將銳角之三角函數定義擴充而得.

角之形成,可視爲由一動線,以其一端爲中心,依逆時針或順時針之方向旋轉而成.此動線之最初位置曰始線 (initial line),其最終位置曰終線 (terminal line).由是始線及終線爲角之兩邊,而動線繞以旋轉之中心點爲角頂.如圖,以始線 OX 爲 X 軸,過角頂 O 作 X 軸之垂線爲 Y 軸.當動線由 OX 之位置旋轉至 OP 之位置時,OP 爲 XOP 角之終線.

角之在何象限,視終線在何象限而定.終線在第一象限,此角在第一象限;終線在第二象限,則此角亦在第二象限;餘類推.

設在終線上取任一點 P,以 y 爲 P 點之縱坐標,x 爲 P 點之橫坐標;並以 α 表 $\angle XOP$. r 表 P 點與原點之距離;則任意角之三角函數定義如下:

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha&=\frac{y}{r}\\ \cos\alpha&=\frac{x}{r}\\ \tan\alpha&=\frac{y}{x}\\ \cot\alpha&=\frac{x}{y}\\ \sec\alpha&=\frac{r}{x}\\ \csc\alpha&=\frac{r}{y}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$