

李蕃編著

復興高級中學
教科書
三角學

商務印書館發行

序

我國向所通行之三角學教科書，大多迳譯東隣，材料既感不足，條理亦欠顯明，求一適合於高中程度者，渺不可得；教授者每以是採用英文原本，但東西各國之學制不同，詳略取捨，自難苟且，而國人講學，仰藉他國文字，尤屬不便。李君銳夫，有鑒於斯，當其肄業於中央大學時，以其研究高深學理之餘，具改進中等教育之志，以事纂述，欲謀中學與大學程度之溝通。卒業後，任教中學，成績昭然。近以所著高中平面三角學一稿見示，屬爲校閱；余觀其內函富麗，程序井然，深合國內高級中學之用，且第九，第十兩章，尤可供大學一年級之參考。故疾促其付梓，以應國人，并望李君本斯志，更從事於幾何代數等之纂述，庶乎國人講學，不必仰藉外國文字，而讀者亦易收指臂之效也。是爲序。

段子燮序於中大算學系。

編輯大意

是書乃參考 Hobsen, Loney, Todhunter, Rothrock, Granville, Wentworth-Smith, Ferval, Commissaire 諸書而編述，期爲本國高中之教科書。

普通三角教科書咸將銳角函數及任意角函數分別敘述，殊非得策；蓋此易使讀者分銳角函數及任意角函數爲二物。本書力矯此弊，所有定理與公式之證明，不分銳角與任意角，使讀者有普遍之觀念。

普通三角教科書多列入對數一章，亦非作者所敢贊同；蓋對數非三角學之範圍，惟在解三角形時，應用之以簡其運算耳，故本書不另設一章，而僅在第三章中稍加復習。再本書爲讀者便於進習高深數學計，特將三角之應用於代數，在第十章中述其略焉。

本書未付梓前，曾在高級中學印爲講義，試教數次，結果頗爲圓滿。所有習題，選擇至爲嚴密，并經演算，以爲校對。我師段調元張益光二教授亦曾細爲校閱，深表謝忱，近復蒙商務印書館諸編輯先生來函指正，尤所感激，尙望海內學者，不吝賜教爲幸。

作者識。

目 錄

第一章 角之量法	1
§ 1. 三角學	1
§ 2. 角之單位	1
§ 3. 各單位之關係	3
§ 4. 弧之長	3
第二章 三角函數及其基本性質	6
§ 1. 銳角之三角函數	6
§ 2. 坐標	8
§ 3. 任意角之三角函數	9
§ 4. 餘角函數	13
§ 5. 特別角函數	15
§ 6. 三角函數之線表示法	17
§ 7. 函數之變值	19
§ 8. 負角之函數	22
§ 9. 化第二象限之函數爲第一象限之函 數	23

§ 10	化第三象限之函數爲第一象限之函數	25
------	------------------------	----

§ 11.	化第四象限之函數爲第一象限之函數	26
-------	------------------------	----

§ 12.	函數之基本關係	29
-------	---------------	----

第三章 直角三角形之解法 對數... 33

§ 1.	直角三角形之不用對數解法	33
------	--------------------	----

§ 2.	對數	35
------	----------	----

§ 3.	直角三角形之對數解法	37
------	------------------	----

第四章 三角分析 44

§ 1.	二角之和之函數	44
------	---------------	----

§ 2.	二角之差之函數	46
------	---------------	----

§ 3.	倍角之函數	48
------	-------------	----

§ 4.	半角之函數	51
------	-------------	----

§ 5.	函數之和與積	52
------	--------------	----

第五章 三角形邊與角之函數之關係

.....	57
-------	----

§ 1.	正弦定律	57
------	------------	----

§ 2.	餘弦定律	59
------	------------	----

§ 3.	正切定律	60
------	------------	----

§ 4.	半角定律	61
------	------------	----

第六章 斜三角形之解法67

- § 1. 已知三角形之一邊及二角 67
- § 2. 已知三角形之二邊及一對角 69
- § 3. 已知三角形之二邊及其夾角 73
- § 4. 已知三角形之三邊 76
- § 5. 高及距離 81
- § 6. 航海 84

第七章 三角形之性質 89

- § 1. 三角形之面積 89
- § 2. 三角形內切圓之半徑 91
- § 3. 三角形旁切圓之半徑 92
- § 4. 四邊形面積及圓之內接四邊形面積 93
- § 5. 正多邊形之面積 95
- § 6. 圓之面積 96

第八章 反三角函數三角方程式100

- § 1. 反三角函數 100
- § 2. 同函數值之角 100
- § 3. 反三角恆等式 105
- § 4. 三角方程式 108
- § 5. 聯立三角方程式 116

第九章 三角函數之圖解119

§ 1. 應用單位圓	119
§ 2. 應用分析法	122

第十章 棣美弗定理及三角級數124

§ 1. 複數	124
§ 2. 複數之三角表示法	125
§ 3. 棣美弗定理	126
§ 4. 棣美弗定理之擴充	129
§ 5. $\sin x \rightarrow x, \tan x \rightarrow x$	131
§ 6. $\sin n\phi$ 與 $\cos n\phi$ 之展開	131
§ 7. 三角級數	133

第十一章 三角函數造表法 表之精

確度 137

§ 1. 緒論	137
§ 2. 應用三角級數造表	138
§ 3. 小角之函數之值	139
§ 4. 求相差 $10''$ 之角之函數之值	140
§ 5. 求大於 30° 之角之函數之值	141
§ 6. 表之精確度	142

附錄

附錄一

附錄二

三角函數及對數表

英漢名詞對照表

三角學

第一章

角之量法

§1. 三角學 三角學英文爲 Trigonometry 源於希臘文 $\tau\rho\iota\gamma\alpha\nu\omicron\nu$ (三角形) 及 $\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$ (量) 二字, 蓋量三角形之意也; 換言之, 即在研究三角形之邊與角之關係耳. 但時在今日, 其範圍大加擴充, 所有關係於角之代數研究亦所屬焉.

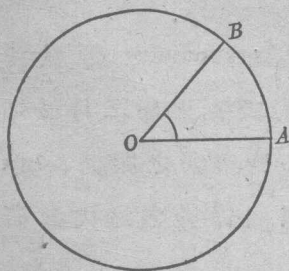
§2. 角之單位 三角學之研究既在角, 故量角不能不有單位. 量角之單位有三: 卽六十分制 (sexagesimal system), 百分制 (centesimal system) 及徑制 (circular system). 茲分述之如次:

I. 六十分制 六十分制以度 (degree) 爲單位, 一度等於圓周三百六十分之一之弧所張之圓心角, 一度六十分, 一分六十秒. 此蓋昔日巴比倫 (Babylon) 之天文學家取一年爲三百六十日之意也. 表度, 分, 秒之符

號爲 $^{\circ},',''$;例如三度十五分十七秒書爲 $3^{\circ}15'17''$ 。

II. 百分制 百分制一名爲法國制(French system),分一直角爲一百級(grade),每級一百分,每分一百秒。級,分,秒之符號爲 $^g, ', ''$;例如二十五級十八分五秒書爲 $25^g 18' 5''$ 。百分制爲用未廣。

III. 徑制 徑制一名弧度法(Circular Measure),以



徑(radian)爲單位,一徑等於與半徑等長之弧或此弧所函之圓心角。如圖設 AB 弧之長等於半徑 AO ,則

$$\angle AOB = 1 \text{ 徑}$$

徑制雖實行未久,然今日之高等數學中,類皆用之。

§3. 各單位之關係 設 R 爲圓之半徑, π 爲圓周率,即 $3.14159265\dots$ 則由幾何學圓周 $=2\pi R$,復依徑之定義,圓周之長爲 2π 徑,但圓周又爲三百六十度,故

$$2\pi \text{ 徑} = 360^{\circ}$$

$$\text{即 } 1 \text{ 徑} = \frac{180^{\circ}}{\pi} = \frac{180^{\circ}}{3.1416} = 57^{\circ}29'57'',$$

$$1 \text{ 度} = \frac{\pi \text{ 徑}}{180} = \frac{3.1416 \text{ 徑}}{180} = 0.01745329 \text{ 徑}$$

由此得下列之關係:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ 徑} = 57.2957 \text{ 度} \\ 1 \text{ 度} = 0.01745329 \text{ 徑} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

讀者尚須明下列之記法：

$$360^\circ = 2\pi \text{ 徑}, \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ 徑},$$

$$270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ 徑}, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ 徑},$$

$$180^\circ = \pi \text{ 徑}, \quad 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ 徑},$$

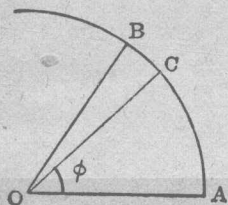
$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ 徑}, \quad 15^\circ = \frac{\pi}{12} \text{ 徑}.$$

茲更進而求以上三種單位之關係，以便互相推算。設有一角，以度計之爲 D ，以級計之爲 G ，以徑計之爲 R 。因一直角爲 90° ，則 $\frac{D}{90}$ 表此角與直角之比；一直角又爲 100^g ，則 $\frac{G}{100}$ 亦表此角與直角之比；但 $\frac{\pi}{2}$ 表直角以徑爲單位，故此角與直角之比爲 $\frac{R}{\frac{\pi}{2}}$ ，即 $\frac{2R}{\pi}$ ，

以上三比之值應相等，故得公式

$$\frac{D}{90} = \frac{G}{100} = \frac{2R}{\pi} \dots\dots\dots (2)$$

§4. 弧之長 設 ϕ 爲一角，以 AO 爲半徑作一圓，



作 $\angle AOB$ 使等於一徑, r 表半徑之長, R 表 AC 弧之長; 則因圓心角之大小與其所對之弧成正比, 故

$$\frac{\phi}{\angle AOB} = \frac{R}{r}.$$

若 ϕ 以徑為單位, 則 AOB 為單位角, 故

$$\phi = \frac{R}{r}$$

故

$$R = r\phi \dots \dots \dots (3)$$

故任何弧之長等於其半徑乘其所張之角, 但此角係以徑為單位。

習 題

1. 試化 12° , 56° , $43^\circ 15' 8''$, $22^\circ.9$ 為徑及級。

2. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{18}$, $2n\pi$, 各為若干度。

3. 試化徑 2.588, 1.85, 0.4 為度及級。

4. 設有一圓, 其半徑為 4 英尺, 問其圓心角為 80° 所對之弧之長為若干? 答: 5.6 英尺。

5. 已知地球與太陽之距離為 92,897,000 英里, 太陽之視直徑為 $32' 4''$, 求太陽之直徑。 答: 866,500 英里。

[註] 日月星辰, 總稱天體 (celestial body), 我人觀察天體時, 若恰

有二視線與天體相切,且與天體中心共一平面,則此二視線所成之角曰天體之視直徑 (apparent diameter).

6. 已知月球公轉地球一次所需之時間為 27.4 日,問月球每日之角速度為若干弧?

答: 約 0.22685 弧.

7. 設有三角 A, B, C . 已知 A 超過於 B 者 $\frac{\pi}{10}$ 弧, B 與 C 之和為 30 度, A 與 B 之和為 36 度,問 A, B, C 三角各若干度?

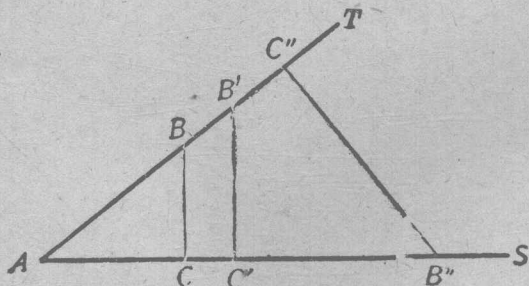
答: $27^\circ, 9^\circ, 18^\circ$.

8. 試證等於半徑之弧所張之圓心角為常數

第二章

三角函數及其基本性質

§1. 銳角之三角函數 設 SAT 爲一銳角, 在 AT 上取任意點 B, B' , 作 AS 上之垂線 $BC, B'C'$; 再在 AS 上取任意點 B'' , 作 AT 上之垂線 $B''C''$. 於是三角形 ABC , $AB'C'$, $AB''C''$ 爲相似, 蓋 A 角爲公共且各有一角爲直角也. 相似三角形之邊之比爲相等 即



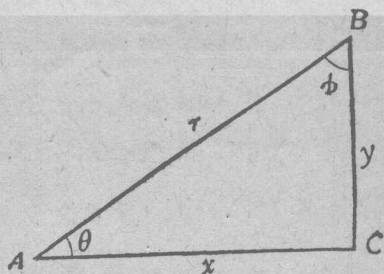
$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{AC''}{AB''}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'} = \frac{B''C''}{AC''}$$

此三式之分子分母各相易，其比亦等。

由此得知一角之二邊任意延長，其所成直角三角形之邊之比為不變；反之，若角變動，則各邊之比亦隨之以變，故各邊之比為角之函數(Function)也。因比之數有六，故一角之函數為數有六。



設 ABC 為一直角三角形，其三邊之長為 r, y, x ，則我人命

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$y = x \tan \theta$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y}$$

$$x = y \cot \theta$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x}$$

$$r = x \sec \theta$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y}$$

$$r = y \csc \theta$$

此六比之值謂之三角函數 (trigonometric functions).

$\sin \theta$ 讀爲 θ 之正弦 (sine),

$\cos \theta$ 讀爲 θ 之餘弦 (cosine),

$\tan \theta$ 讀爲 θ 之正切 (tangent),

$\cot \theta$ 讀爲 θ 之餘切 (cotangent),

$\sec \theta$ 讀爲 θ 之正割 (secant),

$\csc \theta$ 讀爲 θ 之餘割 (cosecant).

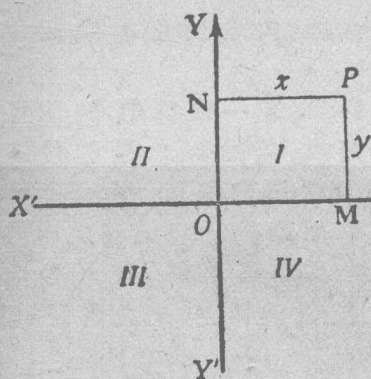
此外尚有二函數, 亦隨角以變, 即

$$\text{vers } \theta = 1 - \cos \theta$$

$$\text{covers } \theta = 1 - \sin \theta$$

前者讀爲 θ 之正矢 (versed sine), 後者讀爲 θ 之餘矢 (coverversed sine).

§2. 坐標 設 $X'X$ 爲一水平直線, $Y'Y$ 爲在 O 點垂直於 $X'X$ 之直線; 於是在此 $X'X$, $Y'Y$ 平面上任何點之位置可由其與 $X'X$ 及 $Y'Y$ 二垂線之距離及方向以定之. P 點與 $X'X$ 之距離 $PM(=y)$ 曰此點之縱坐標 (ordinate), P 點與 $Y'Y$ 之距離 $PN(=x)$ 曰此點之橫坐標 (abscissa), 合縱橫二坐標曰 P 點之坐標 (coördinates). $X'X$ 及 $Y'Y$ 二正交直線曰坐標軸 (axes



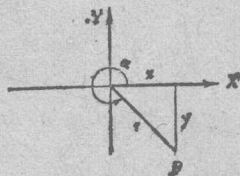
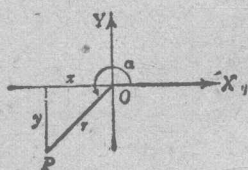
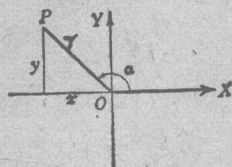
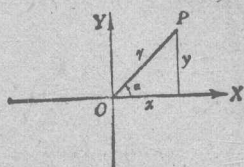
of coördinates), $X'X$
 曰 X 軸, $Y'Y$ 曰 Y
 軸. O 點曰原點
 (origin).

縱坐標在 $X'X$
 之上爲正, 在 $X'X$
 之下爲負; 橫坐標

在 $Y'Y$ 之右爲正, 在 $Y'Y$ 之左爲負.

坐標軸分全平面爲四象限 (quadrants), 圖中 I 爲第一象限, II 爲第二象限, III 爲第三象限, IV 爲第四象限.

§3. 任意角之三角函數 若 θ 大於一直角, 則其



函數之定義，可應用坐標軸將銳角之三角函數定義擴充而得。

角之形成，可視為由一動線，以其一端為中心，依逆時針或順時針之方向旋轉而成。此動線之最初位置曰始線 (initial line)，其最終位置曰終線 (terminal line)。由是始線及終線為角之兩邊，而動線繞以旋轉之中心點為角頂。如圖，以始線 OX 為 X 軸，過角頂 O 作 X 軸之垂線為 Y 軸。當動線由 OX 之位置旋轉至 OP 之位置時， OP 為 XOP 角之終線。

角之在何象限，視終線在何象限而定。終線在第一象限，此角在第一象限；終線在第二象限，則此角亦在第二象限；餘類推。

設在終線上取任一點 P ，以 y 為 P 點之縱坐標， x 為 P 點之橫坐標；並以 α 表 $\angle XOP$ ， r 表 P 點與原點之距離；則任意角之三角函數定義如下：

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{y}{r} \\ \cos \alpha &= \frac{x}{r} \\ \tan \alpha &= \frac{y}{x} \\ \cot \alpha &= \frac{x}{y} \\ \sec \alpha &= \frac{r}{x} \\ \csc \alpha &= \frac{r}{y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (B)$$