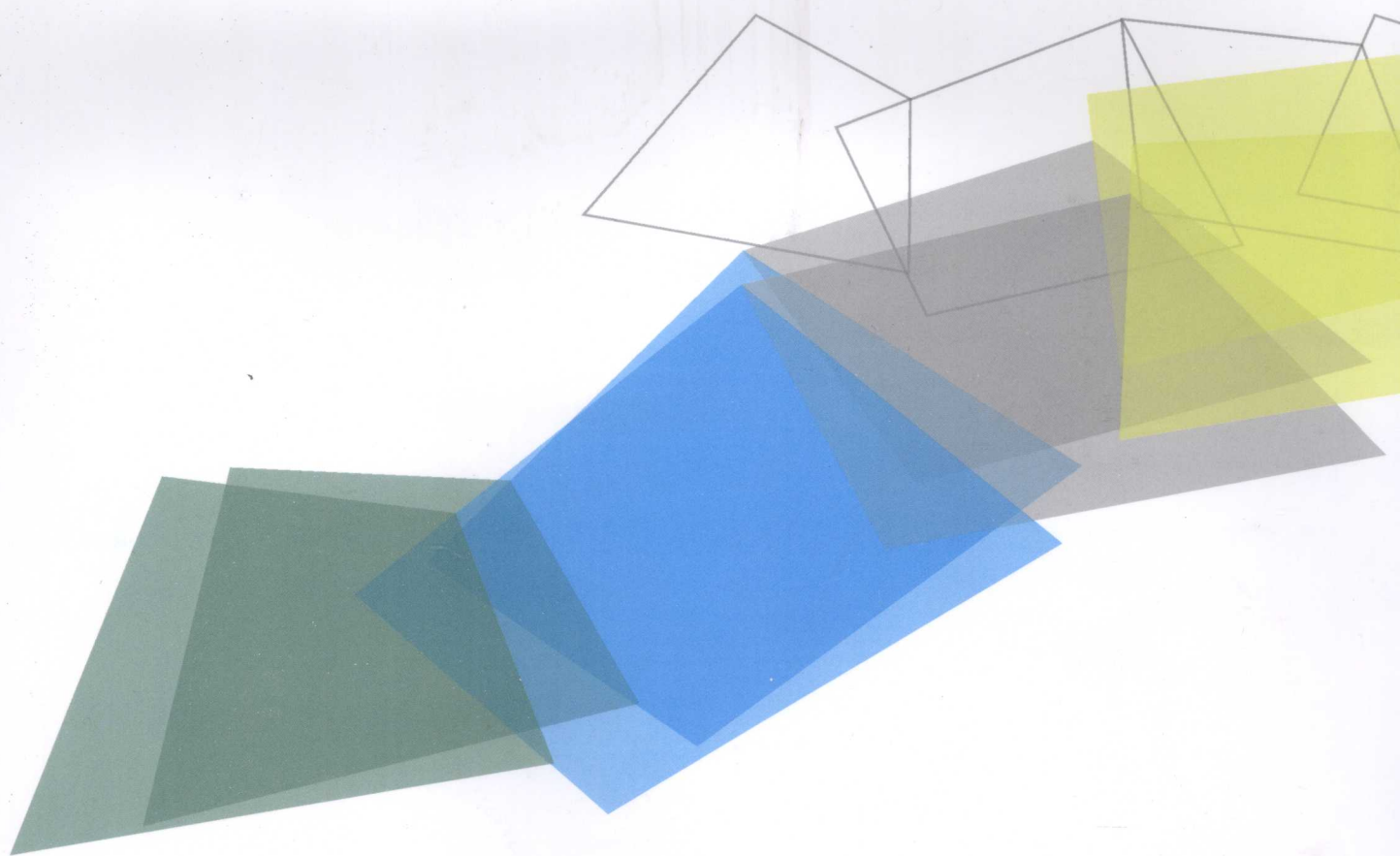


重庆力学学会 ★ 主办
重庆科技学院 ★ 承办

重庆力学学会

2009年学术年会论文集

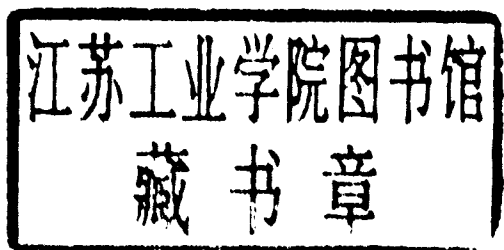
黄林青 陈小亮 丁剑平 编



重庆大学出版社
<http://www.cqup.com.cn>

重庆力学学会 2009年学术年会论文集

重庆力学学会 主办
重庆科技学院 承办



图书在版编目(CIP)数据

重庆力学学会 2009 年学术年会论文集/黄林青,陈小亮,丁剑平编.

—重庆:重庆大学出版社,2009.12

ISBN 978-7-5624-5230-0

I. ①重… II. ①黄…②陈…③丁… III. ①工程力学—文集 IV.

①TB12-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 222458 号

重庆力学学会 2009 年学术年会论文集

黄林青 陈小亮 丁剑平 编

责任编辑:林青山 张 婷 版式设计:林青山

责任校对:邬小梅 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:张鸽盛

社址:重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A 区)内

邮编:400030

电话:(023) 65102378 65105781

传真:(023) 65103686 65105565

网址:<http://www.cqup.com.cn>

邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆升光电力印务有限公司印刷

*

开本:889×1194 1/16 印张:11.5 字数:348 千

2009 年 12 月第 1 版 2009 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5624-5230-0 定价:50.00 元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换

版权所有,请勿擅自翻印和用本书

制作各类出版物及配套用书,违者必究

目 次

基于无网格 RPIM 和 FEM 的单边裂纹梁分析	黄均平,杨 川,肖远见 (1)
滑坡作用下简支埋地管道的力学分析	李观宇,陈朝晖 (7)
封闭方腔内自然对流的格子 Boltzmann 方法模拟	
..... 梁功有,曾 忠,张永祥,张良奇,姚丽萍,邱周华	(11)
洪水荷载下城市排水管道架空箱涵的有限元分析	马东升,陈朝晖 (16)
无影灯对手术室洁净气流影响的数值模拟	时洪宇,曾 忠,梁功有 (21)
输电塔线体系脱冰动力响应分析	张宏雁,程皓月,周 松,唐 杰,严 波 (24)
一维空化问题的 CE/SE 数值模拟	张晓艳,陈景秋,张永祥,梁功有 (29)
新月形覆冰导线的空气动力特性	周 松,蔡萌琦,唐 杰,张宏雁,严 波 (34)
水平轴风力机风轮的气动设计	周振凯,刘占芳,颜世军 (38)
旋转磁场对柱形熔体产生的对流	姚丽萍,曾 忠,梅 欢,梁功有,邱周华 (42)
突出煤样与非突出煤样三轴压缩试验研究	李高帅,李晓泉,蔡波 (46)
多点激励模态参数识别方法及其噪声影响研究	吕中亮,杨昌棋,唐亮 (50)
钢筋与混凝土单元位置关系分析及应用	彭 毅,王家林,易志坚,李 平 (57)
不同水泥掺量的无砂多孔混凝土干燥收缩试验研究	徐 攀,易志坚,赵朝华 (61)
化学侵蚀后聚合物砂浆的力学性能研究	燕 伟,易志坚,张昌谊,徐 攀 (64)
多孔混凝土早期收缩性能的试验研究	张昌谊,易志坚,燕 伟,徐 攀 (67)
钢管混凝土构件的动态刚度计算方法研究	张 飞,陈世民 (71)
一种复合材料钢桥面铺装结构的试验研究	张光辉,张锡祥,巫祖烈 (75)
增大截面法加固拱桥的不利影响研究	张 铃,巫祖烈,苗秀鹏,秦 斌 (80)
基于一循环多晶模型的两算法	刘胜锋,张彦霞,周 东 (85)
随机裂缝对混凝土梁的极限承载力的影响	张彦霞,刘胜锋,周 东 (89)
等安全系数原理设计抽油杆柱方法研究	龙芝辉,郝明圈,王玉海,刘继林 (93)
某矮塔斜拉桥 0# 块局部受力分析	潘 颖,邓 宇 (96)
水平承载桩受力特性研究综述	吴同情,褚广辉 (101)
后张预应力混凝土框架试验研究	陈明政,黄林青,陈小英,王正霖 (106)
微纳米尺度单晶体变形中的表面效应探讨	陈小亮,李远坪,郑安节 (111)
无桥台斜腿刚构桥的温度应力分析	高 荣 (115)

无筛管压裂充填优化设计研究	焦国盈,刘 洪,戚志林,李志军,王亚娟	(119)
天然裂缝储集层水力压裂排量优化研究	刘 洪,罗天雨,王嘉淮,潘竞军	(123)
土木工程学科网站建设探讨与实践	方祥位,申春妮,郭剑峰	(127)
解析法找转角,几何法找参考——浅谈学习刚体角速度	刘馨燕,陈小云,张 佩	(131)
抓青年教师培养,促教师队伍建设	张忠发,徐守彬,方祥位	(134)
改革教学方式和考试模式,培养创新人才	吴云芳,肖明葵,张亮亮	(137)
工科理论力学虚拟电子实验教学研究	肖明葵,吴云芳,邹昭文,程光均,张祥东	(141)
关于普通院校工程力学课程中多媒体应用的思考	丁剑平,陈小亮,田祖安	(145)
面向交通土木工程的工程力学专业探索	陈世民,何 琳	(148)
力学教学中的几点体会	陈 燕,韩 勇	(151)
振动力学(含稳定)课程教学初探	何 琳,黎 强	(154)
在结构力学教学中,以启发式教学培养学生创新能力	李远坪,黄志敏,陈小亮	(157)
运用现代化教学理论指导力学教学	徐 睿	(160)
地方院校《工程力学》课程教学改革探讨	汪雅丽,杨红韵,王国超	(163)
应用现代教育方法和手段 提高基础力学课堂教学质量	王国超,刘 妍,杨含离	(166)
探索材料力学应用型教学,培养应用型人才	郭长文,王国超,徐 睿	(169)
基于开源网络平台土木工程仿真实验室的设计和构建	廖小烽,黄林青,刘先锋,杨全虎	(171)
附录 1:重庆力学学会章程		(175)
附录 2:重庆力学学会第七届理事会名单		(180)

基于无网格 RPIM 和 FEM 的单边裂纹梁分析

黄均平^{1,2}, 杨 川², 肖远见²

(1. 重庆大学 工程力学系, 重庆 400030; 2. 重庆工程职业技术学院 机电工程系, 重庆 400037)

摘 要:本文采用了有限元法(FEM)和基于无网格径向基点插值法(RPIM)对单边裂纹梁三点弯曲进行了模拟计算,并与其近似解析解进行了比较,表明基于 RPIM 无网格法同有限元法一样在分析断裂力学问题时,只要离散系数选取恰当,是具有足够的精度和效率的,两者之间的差别主要表现在应用软件的开发应用和验证的成熟程度上。

关键词:FEM; RPIM; 单边裂纹梁; Galerkin 弱形式; 刚度矩阵; 离散系数

0 引 言

三点弯曲梁在工程应用中会时常遇到,而梁边界裂纹的扩展则对安全造成很大的隐患。线弹性断裂力学对裂纹的产生与扩展已经有了大量的研究成果,其方法主要为解析法、实验法和计算机模拟法,计算机模拟则主要基于有限元法(FEM)进行^[1]。虽然有限元法以其强大的计算能力和软件的商业化正在各工程计算中发挥着越来越重要的作用,但其形成网格时的计算成本高,应力精度低,自适应分析困难和诸如大变形、裂纹扩展等问题的分析局限性,也会影响有限元法的进一步应用。

采用基于全局弱式无网格径向基插值法和有限元法对 2D 弹性梁的弯曲变形进行了计算比较,可以从中看出两种算法之间的差别。

图 1 所示为 2D 三点弯曲梁边界裂纹分析的力学模型,在梁的中点施加一载荷,使其产生 1 mm 的位移。如果裂纹长度 a 远小于梁的高度 h ,那么可以近似地认为是受拉伸内压的半无限平面中单边裂纹,如图 2 所示。本文拟就该裂纹的性质,通过 FEM 法和无网格径向基点插值法(RPIM)进行模拟计算,并与其解析解进行比较。

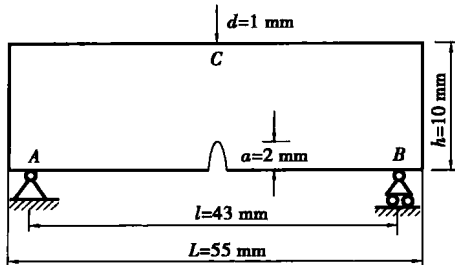


图 1 带单边裂纹三点弯曲梁

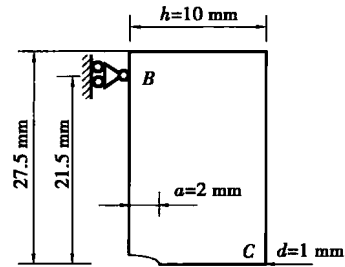


图 2 半无限平面中单边裂纹

1 RPIM 无网格的基本理论

设有一个定义在 Ω 域和 Γ 边界上的标准 2D 线弹性问题为:

平衡方程:

$$L\sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

自然边界条件:

$$n\sigma = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (2)$$

本质边界条件:

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (3)$$

上述诸式中: L 为微分算子矩阵; σ^T 为应力向量; u 为位移向量; b^T 体力向量; $\bar{t}$ 自然边界上给定的表面力; $\bar{u}$ 本质边界上给定的位移; n 处于自然边界上某点的单位外法线向量。

对于固体力学问题的 Galerkin 弱形式^[2,3],可由最小势能原理推导。首先用形函数表示以节点变量形式描述的近似场位移函数,得到用位移向量 d 描述的弹性材料总势能表达式 Π :

$$\Pi = \Pi_s - W_e \quad (4)$$

式中: Π_s 为应变能, W_e 为外力所做之功。在此基础上,利用驻值条件可获得一组离散系统方程:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{d}}\right)^T = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial d_1}, \frac{\partial \Pi}{\partial d_2}, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial d_n}\right) = 0, \quad (5)$$

上述总方程数等于总节点变量数 n , 因此求解方程组(5)即可获得该问题的解。

考虑线弹性固体材料系统应变能和外力所做之功, 总势能可表示为:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (6)$$

对(6)式进行变分计算, 并用链式法则, 可得到:

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (7)$$

再根据总势能最小, 可得到 Galerkin 弱形式:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (8)$$

对于线弹性的静力学问题, 由本构方程和 Cauchy 方程, 可以得到以位移向量 $\mathbf{u}^T = (u, v)$ (2D) 表示的弱形式:

$$\int_{\Omega} \delta (\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D} (\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (9)$$

式中 $\mathbf{D}$ 为弹性常数矩阵, 这是以位移形式表达的 Galerkin 弱形式。因为不论是 FEM 还是无网格法均采用的是位移近似法, 因而使用该式是比较方便的。对于上述定义在全局域上的问题, 需离散成一组不相重叠的背景网格, 才能计算积分。

将问题域用一组场节点表示并编号后用传统 RPIM 形函数, 通过局部支持域中的一组节点形成计算点处的位移近似为:

$$\mathbf{u}_{(2 \times 1)}^h = \sum_I^n \boldsymbol{\Phi}_I \mathbf{u}_I \quad (10)$$

式中 $\boldsymbol{\Phi}_I$ 为节点 I 的形函数矩阵, n 为局部支持域中的节点数, $\mathbf{u}_I$ 为支持域中节点的位移向量。

由式(10)变分可得到

$$\delta \mathbf{u}_{(2 \times 1)}^h = \boldsymbol{\Phi}_{(2 \times 2n)} \delta \mathbf{u}_{(2n \times 1)} = \sum_I^n \boldsymbol{\Phi}_I \delta \mathbf{u}_I \quad (11)$$

由公式 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ 和式(10), 再由近似位移得到应变

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{(3 \times 1)} &= \mathbf{L}\mathbf{u}^h = \mathbf{L}_{(3 \times 2)} \boldsymbol{\Phi}_{(2 \times 2n)} \mathbf{u}_{(2n \times 1)} \\ &= \mathbf{B}_{(3 \times 2n)} \mathbf{u}_{(2n \times 1)} \\ &= \sum_I^n \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $\mathbf{B}$ 为应变矩阵, $\mathbf{B}_I$ 为节点 I 的应变矩阵。类似地可得到

$$\mathbf{L}\delta \mathbf{u}^h = \mathbf{L}_{(3 \times 2)} \boldsymbol{\Phi}_{(2 \times 2n)} \delta \mathbf{u}_{(2n \times 1)} = \mathbf{B}_{(3 \times 2n)} \delta \mathbf{u}_{(2n \times 1)}$$

$$= \sum_I^n (\mathbf{B}_I)_{(3 \times 2)} (\delta \mathbf{u}_I)_{(2 \times 1)} \quad (13)$$

利用材料的本构方程可得到问题域中任一点处的应力向量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_{(3 \times 3)} \mathbf{B}_{(3 \times 2n)} \mathbf{u}_{(2n \times 1)} \\ &= \sum_I^n \mathbf{D}_{(3 \times 3)} (\mathbf{B}_I)_{(3 \times 2)} (\mathbf{u}_I)_{(2 \times 1)} \end{aligned} \quad (14)$$

将(12)式和(13)式代入(9)式中的第一项, 并在全域上对节点统一编号可得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta \mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega &= \int_{\Omega} \sum_I^N \sum_J^N \delta \mathbf{u}_I^T [\mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J] \mathbf{u}_J d\Omega \\ &= \sum_I^N \sum_J^N \delta \mathbf{u}_I^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J d\Omega \right) \mathbf{u}_J \\ &= \sum_I^N \sum_J^N \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{K}_{IJ} \mathbf{u}_J \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $\mathbf{K}_{IJ}$ 为 2×2 节点刚度矩阵。(15)式右边求和为一组装过程, 即:

$$\sum_I^N \sum_J^N \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{K}_{IJ} \mathbf{u}_J = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (16)$$

最终(15)式变为:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta \mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (17)$$

式中 $\mathbf{K}$ 为总体刚度矩阵, (17)式中的 $\mathbf{U}$ 为整个问题域中所有节点位移所组成的总体位移向量。

与推导刚度矩阵的方法一样可得到对(9)式第二项的处理

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega = \sum_I^N \delta \mathbf{u}_I^T \int_{\Omega} (\boldsymbol{\Phi}_I^T) \mathbf{b} d\Omega \quad (18)$$

式中右边积分为

$$\mathbf{F}_I^b = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\Phi}_I^T) \mathbf{b} d\Omega \quad (19)$$

是节点体力向量, $\mathbf{b}$ 为体力向量。

将(18)式中的最后求和展开并分组, 可产生如下矩阵形式

$$\sum_I^N \delta \mathbf{u}_I^T \int_{\Omega} (\boldsymbol{\Phi}_I^T) \mathbf{b} d\Omega = \sum_I^N \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{F}_I^b = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^b \quad (20)$$

式中 $\mathbf{F}^b$ 为总体体力向量。对(9)式中的最后一项的处理与对第 2 项的处理完全一样, 即对满足自然边界条件的面力处理与对体力的处理一样, 只是将体力向量改为表面力向量和将域积分改为边界积分, 同样有与(17)式~(20)式相似的过程, 由此可得:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma &= \sum_I^N \delta \mathbf{u}_I^T \int_{\Gamma_i} (\boldsymbol{\Phi}_I^T) \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\ &= \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^{(t)} \end{aligned} \quad (21)$$

式中 $\mathbf{F}_I^{(t)}$ 为节点表面力向量:

$$(\mathbf{F}_I^{(t)})_{(2 \times 1)} = \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\Phi}_I^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (22)$$

式(21)中的 $\mathbf{F}^{(t)}$ 为总体表面力向量,由节点表面力向量组装而成。

分别将式(17)、(20)和(22)代入式(9),并根据 δU 的任意性,可得到:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{F}^{(b)} - \mathbf{F}^{(t)} = \mathbf{0} \quad (23)$$

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}^{(b)} + \mathbf{F}^{(t)} = \mathbf{F} \quad (24)$$

(24)式即为无网格径向基点插值法(RPIM)最终得到的离散系统方程,式中 $\mathbf{F}$ 为总体力向量。

2 数值计算

2.1 数值积分

上述讨论所有的积分均是针对总体问题域 Ω 和总体表面力边界 Γ_t 的。要计算总体积分,需将该问题域离散成一组背景网格。故总体积分可表示为这些单元积分之和的形式

$$\int_{\Omega} G d\Omega = \sum_k^{n_b} \int_{\Omega_k} G d\Omega \quad (25)$$

n_b 为背景单元数, G 为被积函数, Ω_k 为第 k 个背景单元的域。

一般在 FEM 中利用 Gauss 积分法求解各个单元的数值积分。若在背景单元中使用 n_G 个 Gauss 点,则式(25)可变为

$$\int_{\Omega} G d\Omega = \sum_k^{n_b} \int_{\Omega_k} G d\Omega = \sum_k^{n_b} \sum_{i=1}^{n_G} \hat{\lambda}_i G(\mathbf{x}_i) |J_k| \quad (26)$$

式中 $\hat{\lambda}_i$ 为第 i 个 Gauss 点 $\mathbf{x}_i$ 的加权因子, J_k 是对背景单元 k 在积分点 $\mathbf{x}_i$ 进行面积分的 Jacobian 矩阵。

类似地可以得到沿边界的曲线 Gauss 积分公式为

$$\int_{\Gamma_t} G d\Gamma = \sum_l^{n_{bl}} \int_{\Gamma_{tl}} G d\Gamma = \sum_l^{n_{bl}} \sum_{i=1}^{n_{Gt}} \hat{\lambda}_i G(\mathbf{x}_{Gt}) |J_{tl}^B| \quad (27)$$

式中 $\hat{\lambda}_i$ 第 i 个 Gauss 点 $\mathbf{x}_i$ 的加权因子, J_{tl}^B 为对子边界(对应 2D 问题域为 1D 曲线边界) l 在积分点 $\mathbf{x}_i$ 处进行积分的 Jacobian 矩阵, n_{bl} 为用于离散边界 Γ_t 的曲线单元数, n_{Gt} 为子曲线上的 Gauss 点数。

将刚度矩阵表示为数值积分形式,可得到节点刚度矩阵 $\mathbf{K}_{IJ}$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{IJ} &= \sum_k^{n_b} \sum_{i=1}^{n_G} \hat{\lambda}_i \mathbf{B}_I^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{D} \mathbf{B}_J(\mathbf{x}_i) |J_k| \\ &= \sum_k^{n_b} \sum_{i=1}^{n_G} (\mathbf{K}_{IJ}^k)_{(2 \times 2)} \end{aligned} \quad (28)$$

式中 $\mathbf{K}_{IJ}^k$ 定义的为

$$\mathbf{K}_{IJ}^k = \hat{\lambda}_i \mathbf{B}_I^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{D} \mathbf{B}_J(\mathbf{x}_i) |J_k| \quad (29)$$

式(28)表示节点矩阵 $\mathbf{K}_{IJ}$ 通过局部支持域中包含节点 I 和节点 J 的所用积分点的贡献之和所得到的数值结果;如果节点 I 和节点 J 不同时位于积分点 $\mathbf{x}_i$ 的局部支持域中,则 $\mathbf{K}_{IJ}^k$ 为零。

可类似地得到由下式给出的节点体力向量 $\mathbf{F}_I^b$

$$\mathbf{F}_I^{(b)} = \sum_k^{n_b} \sum_{i=1}^{n_G} \mathbf{F}_I^{k(b)} \quad (30)$$

式中的 $\mathbf{F}_I^{k(b)}$ 定义为

$$\mathbf{F}_I^{k(b)} = \hat{\lambda}_i \boldsymbol{\Phi}_I^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{b}(\mathbf{x}_i) |J_k| \quad (31)$$

由式(22)给出的节点表面力向量 $\mathbf{F}_I^{(t)}$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_I^{(t)} &= \sum_l^{n_{bl}} \sum_{i=1}^{n_{Gt}} \hat{\lambda}_i \boldsymbol{\Phi}_I^T(\mathbf{x}_i) \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_i) |J_{tl}^B| \\ &= \sum_l^{n_{bl}} \sum_{i=1}^{n_{Gt}} \mathbf{F}_I^{l(t)} \end{aligned} \quad (32)$$

式中 $\mathbf{F}_I^{l(t)}$ 定义为

$$\mathbf{F}_I^{l(t)} = \hat{\lambda}_i \boldsymbol{\Phi}_I^T(\mathbf{x}_i) \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_i) |J_{tl}^B| \quad (33)$$

在 RPIM 法中,矩阵的组装都是基于积分点,不同的积分点对应不同的支持域,因此对应不同的积分点其形函数矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 和应变矩阵 $\mathbf{B}$ 可能是不相同的,这是与 FEM 法采用相同的节点(属于同一单元内)进行插值运算不一样之处。

2.2 本质边界条件的施加

在 RPIM 公式中使用 Galerkin 弱式,其表面力边界条件(式(2))在公式形成过程中自然融入所形成的离散系统方程中。位移边界条件(式(3))在公式形成过程中未得到处理,但在建立方程(27)之前或之后,单独施加位移边界条件是本质上的要求。由于 RPIM 形函数具有 δ 函数性质,其本质边界条件可像 FEM 法一样方便地施加,如直接法和罚函数法^[4]。

2.3 RPIM 的相容性

相容性是对基于全局能量原理的各类方法的共同要求,因为可能存在的间隙或重叠(非相容性)将影响系统的能量,并导致能量原理方程的失衡。利用约束的形式对能量原理进行修正,以计算不相容能量。由于 RPIM 插值在总体域上不是总相容的,

需在问题域 Ω 中非相容性曲线 Γ_c 上施加强制相容性条件以形成相容 RPIM^[5,6]。

3 无网格法的 2D 建模

由于未形成相应的成熟软件,因此用无网格法进行计算面临的一个问题是如何进行几何建模。在非可视化的计算过程中,对于简单问题域的求解,可以通过对各点坐标的计算确定几何图形。但是工程中需要解决的问题,往往几何图形十分复杂,用此方法建模,工作量极大,而且容易出错。因此可以采用 FEM 的方法在 ABAQUS 上进行先行计算,由此得到输出文件,并将输出文件的各场节点坐标和背景单元坐标进行修改,导入到 RPIM 程序中进行计算,由此可将 RPIM 的算法结果同 FEM 的算法结果进行比较。

4 FEM 和无网格 RPIM 的计算

4.1 FEM 模拟计算及结果

如图 3 所示,考虑到梁的对称性取其一半建模,用商用软件 ABAQUS 进行计算,常规单元 FEM 的模拟参数如表 1 所示,模拟结果的 Mises 应力云图如图 4 所示。而各场变量与裂纹尖端极坐标半径之间的关系,分别由图 5~8 示出。从图 5 可见,受拉伸内压的单边裂纹应力分布对于 FEM 法,应分力布随距尖端点半径的减小而增大,表现出了 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 的奇异性。由于载荷对称,可认为该裂纹是张开型裂纹(I 型裂纹),于是对图 3,裂纹在上、下裂纹面位移分量 u 是相等的,而位移分量 v 大小相等而符号

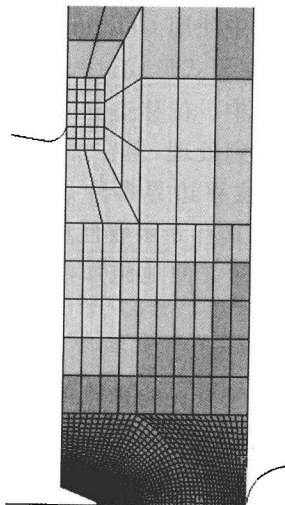


图 3 FEM 模拟单边裂纹板建模

相反,即相对于梁的纵向对称面对称地张开。根据上裂纹面($\theta=\pi$)算得的位移 v ,可计算出应力强度因子 K_I ,采用衰减指数函数进行拟合,得到应力强度因子与 r 的函数关系(如图 6 所示)。

表 1 三点弯曲梁单边裂纹 FEM 模拟参数

杨氏模量 E/GPa	泊松比 ν	密度 $\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	梁中点位移 d/mm	单元类型	单元数
2.0E+011	0.3	7.8E+003	1.0	CPE4	1 737

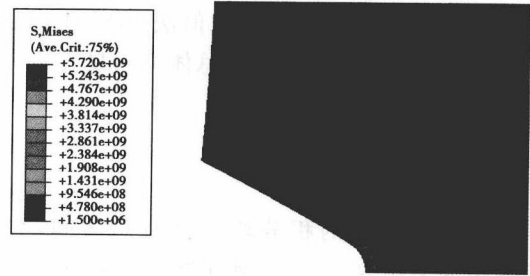


图 4 FEM 计算的裂纹尖端应力云图 (Pa)

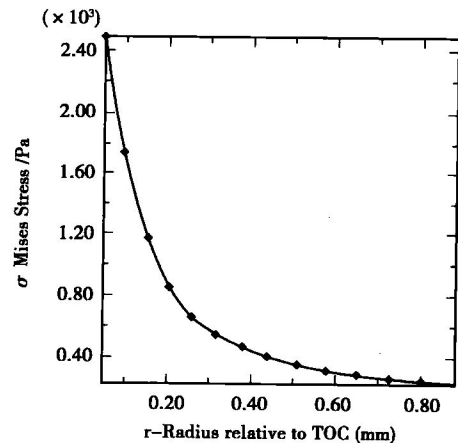


图 5 FEM 法计算应力分布

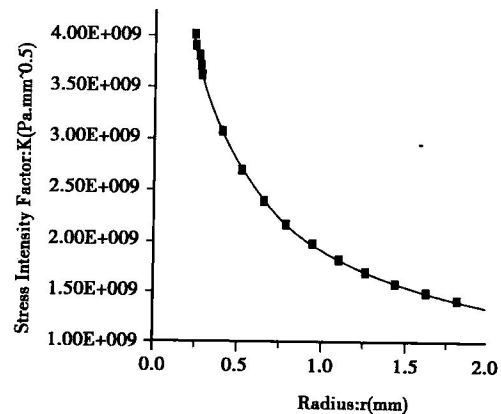


图 6 FEM 法拟合应力强度因子

$$K_I = 1.2833 \times 10^{10} + 2.6287 \times 10^{10} e^{-\frac{(r-0.22701)}{0.5324}} \quad (34)$$

如图 7 所示,外推(34)式,在 $(r_0, K_0 + A_1)$ 处求相切直线,可以求出 $r=0$,即裂纹尖端处的应力强度因子 $K_I = 5.033 \times 10^{10} \text{ Pa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$ 。当在梁的中点施加 $d=1 \text{ mm}$ 的位移时,在平面应变情况下相当于对梁施加 $200 \text{ N} \cdot \text{m}$ 的最大弯矩,由此可根据半无限平面中单边裂纹应力强度因子的近似分析解^[7]

$$K_I = 1.1215 \sqrt{\pi a} p_0 \quad (35)$$

求得 $K_I = 3.373 \times 10^{10} \text{ Pa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$ 。虽然(35)式也是用数值程序求积分方程的结果,但是由于很多研究者均得到同一结果,因此可以认为(35)式是精确的,是近似分析解。这说明用 FEM 法求得的结果与近似分析解具有相同的量级,所产生的误差来自对(34)式的外推。

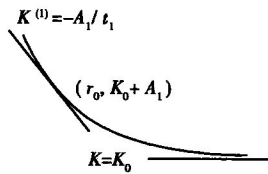


图 7 外推应力强度因子曲线

4.2 RPIM 无网格模拟计算及结果

图 8 为对由 ABAQUS 运算所生成的输入文件进行修改后的几何建模和取离散系数 $\alpha=0.5$ 及 $\beta=0.5$ 的节点分布;图 9 为按与表 1 相同的材料参数由基于径向基点插值法(RPIM)的无网格计算结果。由于在 RPIM 无网格计算中,其离散情况与 FEM 法的离散情况不一样,致使背景网格的分布与

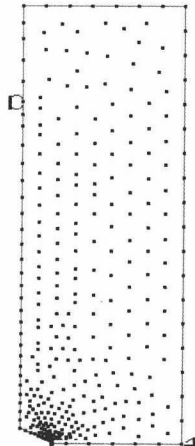


图 8 RPIM 无网格单边裂纹板建模

有限元分布不相同,在裂纹尖端和载荷作用处,由于节点分布密集,因此背景网格不是均匀分布的,如图 10 所示。

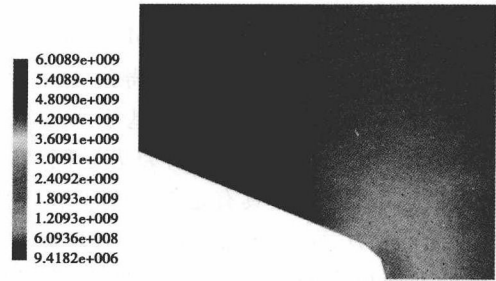


图 9 RPIM 无网格单边裂纹尖端应力云图(Pa)

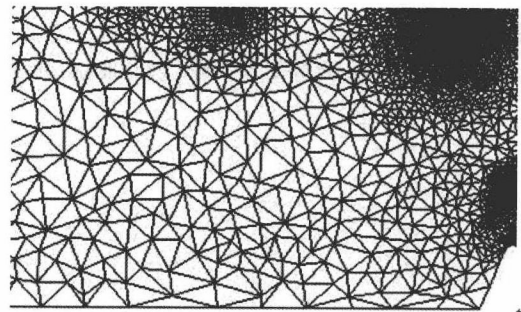


图 10 节点对应的背景网格

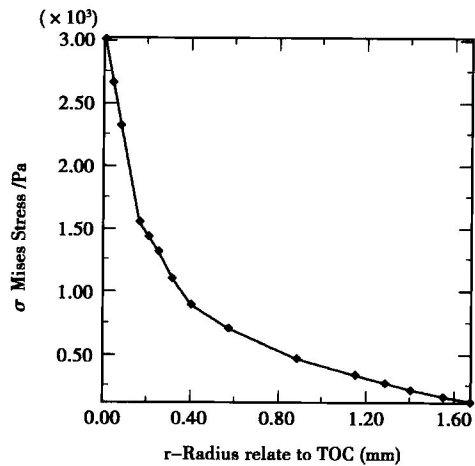


图 11 RPIM 无网格法计算应力分布

对于 RPIM 无网格法,如图 11 所示,应力分布随距裂纹尖端点半径的减小而增大,同样表现出了 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 的奇异性,但曲线的光滑程度却较 FEM 差。出现这种现象的可能原因是离散系数取值的不恰当,对计算精度的影响。其次,由于节点的不规则分布,影响到取点的准确性。最重要的一个原因是基于

FEM 强大的计算能力和商业化运用的检验,其算法的完善程度远超过基于 RPIM 的无网格方法。

5 结束语

本文主要用了 FEM 法和 RPIM 无网格法对单边裂纹的三点弯曲梁进行了计算,得到了相应的计算结果,并对其进行了对比,表明基于 RPIM 无网格法如同有限元法一样在分析断裂力学问题时,只要离散系数选取恰当,是具有足够的精度和效率的,而且对于无网格法而言,近似函数具有较高阶的连续性,后处理简单方便,在求解高阶偏微分方程方面具有优势。

参考文献:

- [1] 王自强,陈少华. 高等断裂力学[M]. 北京:科学出版社,2009:69-75.
- [2] 赵国群,王卫东,栾贻国. 完全变换法在无网格伽辽金方法中的应用[J]. 计算力学学报,2004, 21 (1): 104-108.
- [3] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods [J]. International Journal for Numerical Method in Engineering, 1994, 37: 229-256.
- [4] GR. Liu, SS. Quek. Finite Element Method: A Practical Course[J]. Singapore:World Scientific, 2002.
- [5] GR. Liu, YT. Gu. Boundary meshfree methods based on the boundary point interpolation methods[J], Engineering Analysis with Boundary Elements, 2004, 28 (5):475-487.
- [6] GR. Liu, YT. Gu, YK. Hoo. Parameter studies for radial basis functions[J]. Singapore: ICCM, 2004, 12: 15-17.
- [7] 范天佑. 断裂理论基础[M]. 北京:科学出版社,2003: 86-88.

滑坡作用下简支埋地管道的力学分析

李观宇, 陈朝晖

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

摘 要:滑坡发生时,埋地管道下方以及侧面的土体流失形成局部悬空的跨越管道。将滑坡作用力分解为竖直方向和水平方向的力,分别进行了管道在两个方向力作用下的力学分析。首先采用 Winkler 弹性地基梁理论,将埋地段视为有限长梁,建立了管道与土相互作用的力学模型。利用埋地管道埋地段与悬空段之间的变形协调性,通过求解管道的挠曲线近似微分方程,得到了埋地管道局部悬空时任意截面的变形和内力。

关键词:埋地管道;力学分析;弹性地基梁;经典摩擦理论;滑坡

0 引 言

管道工程是城市基础设施建设的重要组成部分,研究管道在各种工况下的受力特征对管道的安全运营具有重要意义。城市主排水管线一般比较长,不可避免地会遇到各种地质灾害环境,例如山地城市比较常见的滑坡、泥石流等,严重威胁管道的安全。文献[1-2]将管线悬空段简化成大挠度梁,埋地段看作半无限长的梁,考虑了管梁的几何非线性、埋地段土壤纵向抗力的物理非线性,但只考虑了固定墩在悬空段交界处的情况。滑坡等地质灾害影响因素众多,滑坡规模、破坏形式具有不确定性,悬空管道支座不一定在交界处。文献^[3]将埋地段看成有限长梁,对固定墩处于不同位置时的应力、内力、挠度进行了分析,但是计算过程复杂,未能推导出埋地管道局部悬空时的挠度和内力公式。文献^[4]得到了无限长埋地管的挠度和内力计算公式,但是荷载作用方向是竖直向下的,不符合山地城市滑坡等地质灾害的实际情况。另外,当地基条件不能满足管道的承载力要求时,需要采用特殊的处理方式,如桩基础。管道一般直接搁置在桩基础承台上,这时就形成两端简支的管道。

本文采用 Winkler 弹性地基梁假设,建立了埋地段管道与土体相互作用的力学模型。同时,通过求解管道悬空段的挠曲线近似微分方程,利用埋地管道埋地段与悬空段之间的变形协调条件,得到了

两端简支埋地管道在斜向滑坡作用下任意截面的变形和内力。

1 力学模型

埋地管道受到滑坡、泥石流作用时,管道下方的土壤会下陷或流失,形成局部悬空的跨越管道。管道两端未悬空的部分受到土体的约束,可以将其视为 Winkler 地基上的弹性地基梁^[5-7]。滑坡一般发生在具有一定倾角的斜坡上,滑坡作用力方向与水平面形成一定角度,这时可以将力学模型分为竖直、水平两个方向分别考虑。由于管道直接搁置在两端基础上,在滑坡荷载水平分力作用下有滑动趋势,支墩对管道的摩擦力约束管道横向滑移,此时力学模型如图 1 所示。图 1 中 x 轴为管道变形前的轴线, y 轴竖直向下为正, z 轴以滑坡荷载水平分力方向为正, x 、 y 、 z 轴线相互垂直。

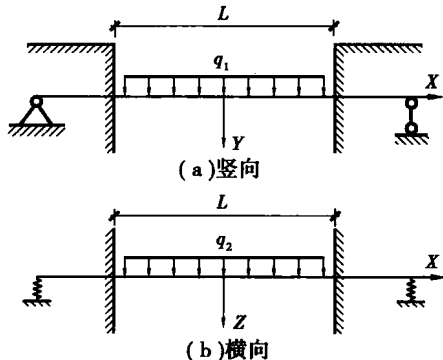


图 1 简支埋地管道的力学模型

基金项目:国家重大科技专项“水体污染控制与治理科技重大专项”(2008ZX07315-001-1)

作者简介:李观宇(1986—),男,云南大理人,硕士生,主要从事结构工程的研究,(E-mail)lgy1986@126.com。

2 挠度和内力分析

2.1 埋地段的分析

分别对图 1 中竖向与横向的力学模型分开进行分析。

2.1.1 竖向

假设埋地管道为 Winkler 地基上的弹性地基梁,埋地段力学模型如图 2 所示, x_1-y_1 为局部坐标系,原点在悬空段与埋地段交界处。

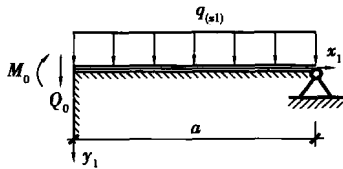


图 2 埋地段力学模型

根据 Winkler 假设,其微分方程为^[8]:

$$EI \frac{d^4 y_1}{dx_1^4} + k y_1 = q(x_1), \quad (1)$$

式中, k 为地基弹性抗力系数, $k=k_0 b$; k_0 为地基基床系数; b 为管道宽度; $q(x_1)$ 为作用在埋地管段上的竖向荷载,包括竖向土压力以及管道自重。

$$\theta = y_1' = \beta e^{\beta x_1} [(C_1 + C_2) \cos \beta x_1 + (C_2 - C_1) \sin \beta x_1] - \beta e^{-\beta x_1} [C_3 - C_4] \cos \beta x_1 + (C_3 + C_4) \sin \beta x_1], \quad (4)$$

$$M = -EI y_1'' = -2EI \beta^2 e^{\beta x_1} (C_2 \cos \beta x_1 - C_1 \sin \beta x_1) + 2EI \beta^2 e^{-\beta x_1} (C_4 \cos \beta x_1 - C_3 \sin \beta x_1), \quad (5)$$

$$Q = -EI y_1''' = -2EI \beta^3 e^{\beta x_1} [(C_2 + C_1) \cos \beta x_1 - (C_1 + C_2) \sin \beta x_1] - 2EI \beta^3 e^{-\beta x_1} [(C_3 + C_4) \cos \beta x_1 + (C_4 - C_3) \sin \beta x_1]. \quad (6)$$

将式 (4)、(5)、(6) 记作矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ \beta(C_1 + C_2) & \beta(C_2 - C_1) & \beta(C_4 - C_3) & -\beta(C_3 + C_4) \\ -2EI\beta^2 C_2 & 2EI\beta^2 C_1 & 2EI\beta^2 C_4 & -2EI\beta^2 C_3 \\ 2EI\beta^3 (C_1 - C_2) & 2EI\beta^3 (C_1 + C_2) & -2EI\beta^3 (C_3 + C_4) & 2EI\beta^3 (C_3 - C_4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{\beta x_1} \cos \beta x_1 \\ e^{\beta x_1} \sin \beta x_1 \\ e^{-\beta x_1} \cos \beta x_1 \\ e^{-\beta x_1} \sin \beta x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{q(x_1)}{k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

将埋地管段的局部坐标转化为全局坐标,即 $x_1 = x - \frac{L}{2}$, $y_1 = y$, 可得到埋地段在全局坐标下的位移、转角、弯矩和剪力。

2.1.2 横向

管道横向的力学模型与竖向相似,只是考虑到墩台对管道的摩擦作用力从而采用弹性支撑。管道与墩台之间的摩擦采用经典摩擦理论^[9],当墩台与管道之间作用力小于最大静摩擦力 F_0 时,管道不发生横向移动。作用力大于最大静摩擦力 F_0 时,管道进入滑动摩擦,此时支座反力恒等于滑动摩擦力 $F_1 = \mu N$, N 为支座处竖向压力。管道横向滑移

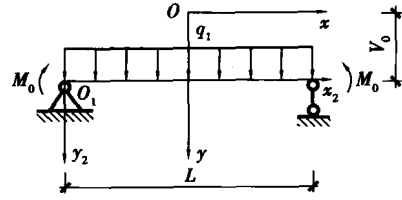


图 3 埋地管道悬空段力学模型

方程 (1) 的一般解析解为:

$$y_1(x_1) = e^{\beta x_1} (C_1 \cos \beta x_1 + C_2 \sin \beta x_1) + e^{-\beta x_1} (C_{31} \cos \beta x_1 + C_4 \sin \beta x_1) + \frac{q(x_1)}{k}, \quad (2)$$

其中,特征系数 $\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$,

边界条件为:

$$\begin{cases} x_1 = a \text{ 时}, y_1 = 0, y_1'' = 0 \\ x_1 = 0 \text{ 时}, y_1'' = -\frac{M_0}{EI}, y_1''' = -\frac{Q_0}{EI} \end{cases} \quad (3)$$

将 (3) 式代入 (2) 式可确定待定系数 C_1, C_2, C_3 和 C_4 。

根据挠度的各阶导数可求出埋地段任意截面的转角 θ 、弯矩 M 、剪力 Q :

过程中,管道侧面的土体不断受到挤压产生抗力阻碍管道滑移,随着滑移量的增加抗力逐渐增大,摩擦力提供的反力则越来越小,当墩台与管道之间作用力小于滑动摩擦力时将停止滑移。管道横向滑动过程中,基础可能进入偏心受压从而引起破坏,甚至管道从墩台滑落发生倾覆,此时可以视为结构失效。

与埋地段竖向分析方法相同,可以求解出横向荷载作用下的力学性状,但是此时边界条件为:

$$\begin{cases} x_1 = a \text{ 时}, z_1'' = 0, z_1''' = -\frac{F}{EI} \\ x_1 = 0 \text{ 时}, z_1'' = -\frac{M_0'}{EI}, z_1 = -\frac{Q_0'}{EI} \end{cases} \quad (8)$$

其中, F 为墩台与管道之间的摩擦力, I' 为管道横向的截面惯性矩。

2.2 悬空段的分析

管道埋地段对悬空段的作用可以用剪力 Q_0 和弯矩 M_0 代替, 剪力 Q_0 的作用可以视为简支约束, 因此管道悬空段的力学模型如图 3 所示, 其中, V_0 为埋地段与悬空段交界处的位移值。

对悬空段在 y 方向列平衡方程, 可得交界处的剪力 $Q_0 = \frac{q_1 L}{2}$ 。

管道悬空段弯曲微分方程为:

$$EI \frac{d^2 y_2}{dx_2^2} = \frac{1}{2} q_1 x_2^2 - \frac{1}{2} q_1 L x_2 - M_0. \quad (9)$$

(9) 式的解为:

$$y_2 = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{24} q x_2^4 - \frac{1}{12} q L x_2^3 - \frac{1}{2} M_0 x_2^2 + C_1 x_2 + C_2 \right). \quad (10)$$

$$\text{此时的边界条件为: } \begin{cases} x_2 = 0, y_2 = 0 \\ x_2 = L, y_2 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

将式 (11) 代入式 (10), 得: $C_1 = \frac{1}{24} q L^3 + \frac{1}{2} M_0 L, C_2 = 0$ 。

将局部坐标转换为全局坐标, 即 $x_2 = x + \frac{L}{2}$, $y_2 = y - V_0$, 则悬空段任意截面的位移、转角、弯矩、剪力分别为:

$$y = \frac{1}{EI} \left[\frac{q}{24} \left(x + \frac{L}{2} \right)^4 - \frac{qL}{12} \left(x + \frac{L}{2} \right)^3 - \frac{1}{2} M_0 \left(x + \frac{L}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{24} q L^3 + \frac{1}{2} M_0 L \right) \left(x + \frac{L}{2} \right) \right] + V_0, \quad (12)$$

$$\theta = y' = \frac{1}{EI} \left[\frac{q}{6} \left(x + \frac{L}{2} \right)^3 - \frac{qL}{4} \left(x + \frac{L}{2} \right)^2 - M_0 \left(x + \frac{L}{2} \right) + \left(\frac{1}{24} q L^3 + \frac{1}{2} M_0 L \right) \right], \quad (13)$$

$$M = -EI y'' = - \left[\frac{q}{2} \left(x + \frac{L}{2} \right)^2 - \frac{qL}{2} \left(x + \frac{L}{2} \right) - M_0 \right], \quad (14)$$

$$Q = -EI y''' = \frac{qL}{2} - q \left(x + \frac{L}{2} \right). \quad (15)$$

上述求解过程未知量 M_0 为管道埋地段与悬空段交界处的弯矩值, 可以根据变形协调条件, 即埋地段与悬空段结合处转角相等的条件求解出来。

3 算 例

某山地城市主排水管道为架空埋地箱涵, 采用

桩基支撑。管道净跨长 $L_0 = 18$ m, 滑坡作用下的悬空长度 $L = 10$ m, 管道外断面尺寸为 $2.6 \text{ m} \times 2.9 \text{ m}$, 壁厚 $t = 0.3$ m。管道材料为钢筋混凝土, 按抗弯抵抗矩相等原则, 将钢筋换算为混凝土面积, 竖向截面惯性矩 $I = 3.334 2 \text{ m}^4$, 横向截面惯性矩 $I' = 2.778 7 \text{ m}^4$, 混凝土弹性模量 $E = 2.8 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ 。管道自重 $1.185 8 \times 10^5 \text{ N/m}$, 管道埋深 $h = 2$ m, 垂直土压力 $1.009 \times 10^5 \text{ N/m}$, 水平土压力 $5.882 9 \times 10^4 \text{ N/m}^{[10]}$, 滑坡体对管道的作用力 $4.8 \times 10^5 \text{ N/m}^{[5]}$, 滑坡作用力方向与水平面夹角 $\alpha = 45^\circ$ 。管道底部地基基床系数为 $7 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$, 侧向地基基床系数为 $4 \times 10^4 \text{ kN/m}^3^{[11]}$ 。采用本文算法, 分别计算得到了埋地管道在滑坡作用下的竖向以及横向挠度 y , 转角 θ , 弯矩 M 以及剪力 Q 。

从图 4 中可以看到管道横向挠度比较大, 而且支座处的位移不为零, 说明发生了滑动摩擦。如果滑坡作用力比较大, 而承台不能提供足够大的摩擦力时, 管道可能发生很大的滑移, 甚至从承台上滑落从而引起非结构性失效。管道在埋地段的挠度减小, 但是变化幅度不大, 这是因为混凝土管道刚性比较大, 管道纵向挠度比较小, 土体的约束作用比较小的缘故。

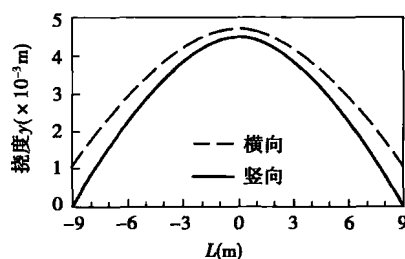


图 4 挠度曲线

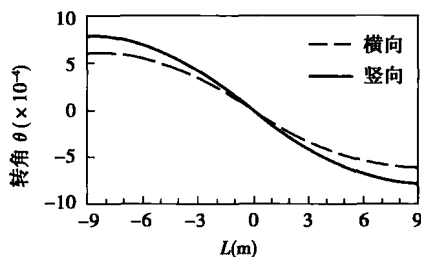


图 5 转角曲线

从图 6 中看到管道悬空段跨中处的弯矩最大, 随着距离跨中的长度增大弯矩逐渐减小, 但是一直没有出现反弯点, 这是因为土体提供的抗力比较小, 管道都是下侧受拉上侧受压。

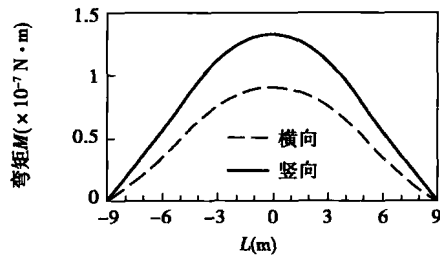


图6 弯矩曲线

图7中,管道悬空段的剪力呈线性分布。管道横向摩擦力提供的支座反力相对比较小,主要靠地基土体提供支撑力,所以埋地段的剪力逐渐减小。竖直方向则先减小,然后又有所增大。相对挠度、弯矩而言,剪力体现的土体抗力比较明显,因此不能忽略地基的支撑作用。

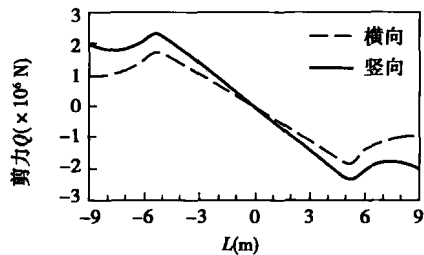


图7 剪力曲线

4 结 论

通过分解滑坡作用力,把两端简支的埋地管道分解为竖向与横向受力模型,考虑了管道竖向受力对横向受力的影响。首先,埋地段基于 Winkler 弹性地基梁假设建立挠曲线微分方程,然后根据埋地段与悬空段交界处的变形协调性,得到了埋地管道在滑坡作用时形成局部悬空跨越管道的变形和内力。算例分析表明,该方法比较方便,可以得出埋地

管道在局部悬空时的受力和变形特征。虽然钢筋混凝土刚性管道变形小,受地基土体的约束作用不是很大,但是这种支撑作用可以改善架空埋地管的受力性能,因此不能忽视地基的支撑作用。正常受力状态下埋地管道两端支座一般能提供足够的竖向反力,但是在横向荷载作用下会发生比较大的侧移,一方面管道可能从承台上滑落引起整体失效,另一方面两端的基础由轴心受压变为偏心受压而引起破坏,有必要进行这种工况的研究分析。

参考文献:

- [1] 邓道明,王春喜. 无固定墩两端埋地单跨管道的强度计算[J]. 油气田地面工程,1999,18(1): 53-58.
- [2] 童华,祝效华,练章华,等. 坍塌和冲沟作用下埋地管道大变形分析[J]. 石油机械,2007,35(11): 29-32.
- [3] 张慧敏,潘家祯. 长输管线中直管跨越管道的力学分析[J]. 华东理工大学学报(自然科学版),2007,33(4): 577-583.
- [4] 王小龙,姚安林. 埋地钢管局部悬空的挠度和内力分析[J]. 工程力学,2008,25(8): 218-222.
- [5] 邓道明,周新海,申玉平. 横向滑坡过程中管道的内力和变形计算[J]. 油气储运,1998,17(7): 18-22.
- [6] Liu C H. Analysis of a cracked beam-column on an elastic foundation[J]. International Journal of Computer Applications in Technology, 2000, 13(6): 273-279.
- [7] 罗金恒,赵新伟,王峰会,郑茂盛. 地质灾害下悬空管道的应力分析及计算[J]. 压力容器,2006,3(4): 3-26.
- [8] 龙驭球. 弹性地基梁的计算[M]. 北京: 高等教育出版社,1989.
- [9] 温诗铸,黄平. 摩擦学原理[M]. 北京: 清华大学出版社,2002.
- [10] 上海市市政工程设计院等. 给水排水工程结构设计手册[M]. 北京: 中国建筑工业出版社,1984.
- [11] 中国船舶工业总公司第九设计院. 弹性地基梁及矩形板计算[M]. 北京: 国防工业出版社,1983.

封闭方腔内自然对流的格子 Boltzmann 方法模拟

梁功有, 曾 忠, 张永祥, 张良奇, 姚丽萍, 邱周华

(重庆大学 工程力学系, 重庆 400044)

摘 要: 采用耦合双分布函数模型, 基于泰勒级数展开和最小二乘格子 Boltzmann 方法 (TLLBM), 数值模拟了封闭方腔内的自然对流。模拟结果与文献已有结果相比表明, TLLBM 所得结果是精确可靠的。

关键词: 格子 Boltzmann 方法; 非均匀网格; 自然对流

0 引 言

不同于传统的有限差分、有限体积等数值方法, 格子 Boltzmann 方法是一种基于分子动理论的数值模拟方法。诞生至今二十余年, 因其具有清晰的物理背景、边界条件实施简单、程序易于实现, 受到国内外众多学者的关注^[1-4]。目前, 除了在一般的流体力学问题中得到了成功的应用外, 在多相流^[5]、渗流^[6]、磁流体力学^[7]、微尺度流动与换热^[8]等相关领域也得到了比较成功的应用。

标准格子 Boltzmann 方法中存在一些缺点: 格子必须是均匀对称的, 在复杂边界处理上采用阶梯或插值处理, 虽然实施简单但是降低了计算精度^[3]。随后出现了几种非均匀网格技术, 如插值格子 Boltzmann 方法 (ISLBM)^[9]、泰勒级数展开和最小二乘格子 Boltzmann 方法 (TLLBM)^[10]、有限差分格子 Boltzmann 方法^[11]、有限元格子 Boltzmann 方法^[12]、多块网格^[13]以及多重网格技术^[14]等, 在一定程度上改进了标准格子 Boltzmann 方法中的一些缺点。TLLBM 因其仅在程序求解之前需要先求解插值系数, 在随后的迭代过程中, 迭代形式与标准格子 Boltzmann 方法一致, 易于程序的编制。且该方法是一种具有无网格形式的方法, 可以采用非结构网格。本文就采用了这种方法。

目前热流体力学的格子 Boltzmann 模型有三类: 多速度模型和双分布函数模型以及与差分方法结合的混合模型^[4]。多速度模型需要更多的离散速度, 数值稳定性差, 从而限制了该类模型的应用。在

粘性热耗散和可压缩功可以忽略时, 可以采用双分布函数模型。该模型使用密度和温度两类分布函数, 分别模拟速度场和温度场。格子结构简单, 数值稳定好, 当马赫数低时, 该模型效果较好。混合模型采用有限差分方法求解能量方程, 可以使压力与温度耦合起来。

封闭方腔内的自然对流, 在 Boussinesq 假设下, 流体的密度、粘性和热扩散系数均可认为是常数, 仅在外力项中考虑密度变化。此时可以采用 Guo^[15]提出的耦合双分布函数模型进行模拟。

采用均匀格子 Boltzmann 方法进行的研究可见 [15, 16]。但是, 当流动的 Re 数较高时, 靠近壁面的热边界层非常的薄。采用标准格子 Boltzmann 方法, 为了准确的捕捉热边界层内的物理特性, 就必须使用较密的网格, 从而使计算量成倍增加。采用 TLLBM, 可以在靠近壁面处划分较细的网格, 远离壁面处划分较粗的网格, 这样在划分较少网格的情况下就可以精确捕捉热边界层内的物理特性。

1 物理模型与控制方程

如图 1 所示, 方腔四壁均为无滑移壁面, 其中左边固定为高温 1, 右边固定为低温 0, 上下边绝热, 基于 Boussinesq 假设下, 控制方程为:

$$\text{连续性方程 } \nabla \cdot \vec{U} = 0,$$

$$\text{动量方程 } \rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} = -\nabla P +$$

$$\rho \nu \nabla^2 \vec{U} - \vec{g} \beta (T - T_0),$$

基金项目: 国家自然科学基金项目 (10872222) 和重庆市科委自然科学基金计划资助项目 (2009BB4207)

作者简介: 梁功有 (1983—), 男, 河南南阳人, 重庆大学博士研究生, 主要从事流体力学研究。

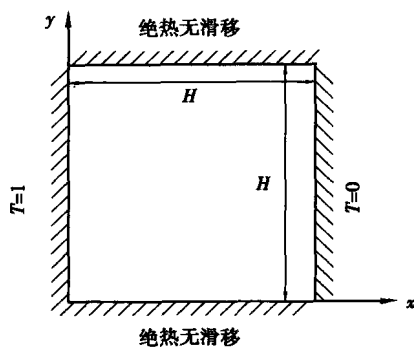


图 1 物理模型

能量方程 $\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T$.

2 D2Q9 模型和 TD2Q4 模型介绍及边界条件处理

Guo^[15] 提出的基于 Boussinesq 假设的耦合双分布函数模型如下:

演化方程

$$f_a(\vec{x} + \vec{c}_a \Delta t, t + \Delta t) - f_a(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\tau_a} [f_a(\vec{x}, t) - f_a^{(eq)}(\vec{x}, t)] + \Delta t F_i, \alpha = 0-8,$$

$$g_a(\vec{x} + \vec{c}_a \Delta t, t + \Delta t) - g_a(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\tau_T} [g_a(\vec{x}, t) - g_a^{(eq)}(\vec{x}, t)], \alpha = 1-4,$$

f_a, g_a 分别为 α 方向的粒子密度分布函数和温度分布函数,

$$F_i = \begin{cases} -\frac{\vec{c}_i \cdot \vec{g}}{2c^2} \beta (T - T_0), i = 2, 4. \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

格子速度分别为:

$$\vec{c} = c \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\vec{c} = c \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

其中 $c = \frac{dx}{dt}$.

粘性系数 ν 和热扩散系数 κ 分别为:

$$\nu = c_s^2 \left(\tau_u - \frac{1}{2} \right) \Delta t, \kappa = \frac{c_s^2}{2} \left(\tau_T - \frac{1}{2} \right) \Delta t.$$

密度平衡态分布函数:

$$f_a^{eq}(x, t) = -\lambda_a P + s_a(\vec{U}), \alpha = 0-8,$$

$$g_a^{(eq)} = \frac{T}{4} \left[1 + 2 \frac{\vec{c}_a \cdot \vec{U}}{c^2} \right], \alpha = 1-4,$$

$$\text{其中: } w_a = 2 \begin{cases} 4/9, \alpha=0 \\ 1/9, \alpha=1-4 \\ 1/36, \alpha=5-8 \end{cases}, \lambda_a = \begin{cases} \frac{\omega_0 - 1}{c_s^2}, \alpha=0 \\ \frac{\omega_a}{c_s^2}, \alpha \neq 0 \end{cases}, \text{声}$$

$$\text{速: } c_s = \frac{c}{\sqrt{3}},$$

$$s_a(\vec{U}) = \omega_a \left(\frac{\vec{c}_a \cdot \vec{U}}{c_s^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{c}_a \cdot \vec{U}}{c_s^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\vec{U}^2}{c_s^2} \right),$$

$$\alpha = 0-8,$$

宏观速度、压力、温度:

$$\vec{U} = \sum_{\alpha=1}^8 \vec{c}_\alpha f_\alpha, T = \sum_{\alpha=1}^4 g_\alpha,$$

$$p = \frac{c_s^2}{1 - \omega_0} \left[\sum_{\alpha=1}^8 f_\alpha + s_0(\vec{U}) \right].$$

在求解过程中,采用非平衡外推方法^[17]处理边界条件。

3 TLLBM 简介

TLLBM 的详细介绍可参见[10]。本文中,如图 2 所示,采用四边形结构化网格,对于流场内部一点 $P(i, j)$,选取周围其周围 8 点 $(i-1, j)$ 、 $(i+1, j)$ 、 $(i-1, j-1)$ 、 $(i, j-1)$ 、 $(i+1, j-1)$ 、 $(i-1, j+1)$ 、 $(i, j+1)$ 、 $(i+1, j+1)$ 为插值节点。在 t 时刻该 9 点的分布函数已知情况下, $t+dt$ 时刻, P 处的分布函数为:

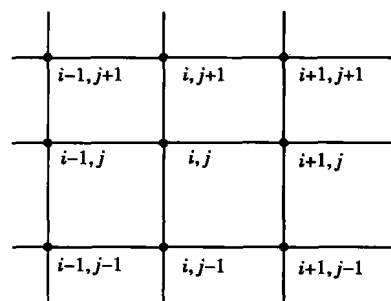


图 2 插值结点

$$f_a(P, t + \delta t) = \sum_{k=1}^8 a_{a,1,k} f'_{a,k-1}, \alpha = 1-8$$

$$g_a(P, t + \delta t) = \sum_{k=1}^8 a_{a,1,k} g'_{a,k-1}, \alpha = 1-4$$

其中: $f'_{a,k-1} = f_{a,k-1} + (f_{a,k-1}^{eq} - f_{a,k-1}) / \tau_u, \alpha = 1-8$
 $g'_{a,k-1} = g_{a,k-1} + (g_{a,k-1}^{eq} - g_{a,k-1}) / \tau_T, \alpha = 1-4$
 $a_{a,1,k}$ 为插值系数矩阵的第一行第 k 个插值系数。