修正課程標準適用

高中甲組代數學

第二冊

編者　余介石

上海中華書局印行

中1832〔全〕26,4.

修正課程標準適用

高中甲組代數學第二册

目　次

第七章

二次方程式

69.<u>範式和解法</u>　二次方程,都可化爲下面的兩種範式:

$$ax^2+bx+c=0,\ \text{或}\ x^2+px+q=0.$$

根是有理數時,可用 §39 的方法去求.一般解法是利用 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 兩個恆等式,將範式分解成兩個一次因式再解.這法叫做**配方術**,詳細步驟如下:

$$ax^2+bx+c=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}$$

將前兩項配成平方 $=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right\}$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\}.$$

分解得 $\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$ 兩個因式,所以他的兩**根的公式**是:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

如果範式是 $ax^2+2bx+c=0$,

則兩根是 $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}$.

【例一】解方程式 $3x^2-x-4=0.$

【解】$a=3,\ \ b=-1,\ \ c=-4,$代入公式,得

$$x_1=\frac{1}{6}\left\{1-\sqrt{1-4\cdot3(-4)}\right\}=\frac{1}{6}(1-\sqrt{1+48})=\frac{1}{6}(1-7)=-1,$$

$$x_2=\frac{1}{6}(1+7)=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

【例二】解方程式 $3x^2+6x-2=0.$

【解】用第二公式 $a=3,\ \ 2b=6,\ \ c=-2,$ 則得

$$x_1=\frac{1}{3}\left\{-3-\sqrt{9-3(-2)}\right\}=-1-\frac{\sqrt{15}}{3},\ x_2=-1+\frac{\sqrt{15}}{3}.$$

70.虛數和特性 在§4的註二裏說過負數的平方根叫做**虛數**.所以虛數是除去負數不能**開平方根和偶次方根的限制而生的**.換句話說,就是虛數運算,不合於§9的符號律.

任何負數 $-a^2$(a是實數)的平方根,都可寫做

$$\sqrt{-a^2}=a\sqrt{-1}=ai.$$

i是表$\sqrt{-1}$的符號,即 $i=\sqrt{-1},\ \ i^2=-1.$

i即$\sqrt{-1}$叫做**虛數單位**,a叫做係數.

由定義可知(一)虛數的奇次方,還是虛數;偶**次方卻是實數,方數爲奇數的二倍時是負數,爲4的倍數時是正數.**

【例一】$\sqrt{-4}=\sqrt{-2^2}=2i,\ \ \sqrt{2^2-4\cdot3\cdot2}=\sqrt{-20}=2\sqrt{5}i.$

【例二】$\sqrt{-3}\sqrt{-6}=\sqrt{3}\,i\cdot\sqrt{6}\,i=3\sqrt{2}\,i^2=-3\sqrt{2}.$

【注意】算虛數時,宜先化出單位再算,便不易錯.

【例三】$i^3=i^2.i=-1i=-i$,　$i^4=i^2.i^2=(-1)(-1)=1$.

(二)虛數和實數,決不能相等.

因爲虛數的平方是負數,實數平方是正數,如能相等,就不合於推演律裏的乘方定律.

(三)虛數同實數相加,減,只能用運算符號,聯成一數,並不能相合.

因爲如果　$a+bi=\begin{cases} ci \\ \text{或 } c, \end{cases}$ 則 $\begin{cases} (c-b)i=a \\ \text{或 } bi=c-a. \end{cases}$

都和(二)衝突.

【註】爲了公律常住性起見,我們設兩虛數的和差是一虛數,係數爲原來兩數裏係數的和差.

71.<u>雜數和特性</u>　用加減號聯實虛數兩部所成的數,叫雜數,雜數的特性和算法如下:

(一)要使雜數 $a+bi=0$,必須 $a=b=0$.

因爲虛數和實數不能相合相消.

(二)兩雜數 $a+bi=c+di$,必須 $a=c,b=d$.

因爲 $(a-c)+(b-d)i=0$,必須 $a-c=b-d=0$.

要使雜數運算,合乎公律,應該有:

(三)兩雜數相加減,分別虛實部相加減.

(四)兩雜數相乘,按多項式法則相乘.

表解

【註一】雜數的除法和平方根等到第十一章再講.

【註二】代數基本定理(§40 註)在雜數範圍內才成立.

【注意】§§ 70,71 所說的特性,并非能證明的定律,卻是規定的新數算法,目的在使新數服從原有的公律定律.(但要撤去的限制,如符號定律,當然不能再遵守.)

【例一】$2-3i+(-1+2i)=(2-1)+(-3+2)i=1-i.$

【例二】$(2-3i)(-1+2i)=2(-1+2i)-3i(-1+2i)$

$$=-2+4i+3i-6i^2=-2-(-6)+4i+3i=4+7i.$$

72. 根的討論.判別式

二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

兩根的性質,就 $D=b^2-4ac$ 一式,數值的正負而定. D 便叫做二次方程的判別式.

(一)$b^2-4ac>0$, 兩根是不相等的實數.

(二)$b^2-4ac=0$, 兩根是相等的實數.

(三)$b^2-4ac<0$, 兩根是不相等的雜數.

如範式是 $ax^2+2bx+c=0$,則 $D=b^2-ac.$

【例一】研究方程式 $3x^2-2kx+27=0$ 兩根的性質.

【解】$D=k^2-3\cdot27=k^2-81=(k-9)(k+9)$,所以

(1) 如果 $k>9$ 或 $k<-9$,則 D 的兩個因式同號,所以 $D>0$;方程式有相異實根.

(2) 如果 $k=9$ 或 -9,則 $D=0$,有相等實根.

(3) 如果 $9>k>-9$, 則 D 的兩個因式異號,所以 $D<0$; 方程式有相異雜根.

【例二】求 $f(x)=(a-b)x^2+(a+b)^2x+(a^2-b^2)(a+b)$ 一式爲完全平方(就是由一整式自乘而得的)時,a 和 b 的關係.

【解】如 $f(x)$ 是完全平方,則 $f(x)=0$ 有相等實根.故

$$\begin{aligned}D&=(a+b)^4-4(a-b)(a^2-b^2)(a+b)\\&=(a+b)^4-4(a-b)^2(a+b)^2\\&=(a+b)^2[(a+b)^2-4(a-b)^2]\\&=-(a+b)^2(3a^2-10ab+3b^2)\\&=-(a+b)^2(3a-b)(a-3b)=0.\end{aligned}$$

$\therefore\ a=-b,\quad 3a=b,$ 或是 $a=3b.$

習題三十

1. 決定下列各二次方程式兩根的性質,幷求出來:

(1) $x^2+x+1=0$;　　(2) $3x^2-4x+\dfrac{4}{3}=0$;

(3) $3x^2+2x-1=0$;　　(4) $2x^2-3x+1=0$;

(5) $3x^2-2x+1=0$;　　(6) $\dfrac{x^2}{4}-x+1=0.$

再求各方程式兩根的和,以及兩根的積.

2. 按定義 $i^2=-1.$

但 $i^2=\sqrt{-1}\sqrt{-1}$

$=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{1}=1.$

豈不是 $-1=1$ 麼; 錯誤的地方在那裏?

3. 化簡

(1) $\sqrt{3}\sqrt{-48}$;　(2) $\sqrt{-3}\sqrt{-48}$;　(3) $(2\sqrt{-4})^2$;

(4) $(-\sqrt{-12})^3$;　(5) $\left(-\sqrt{-3\sqrt{-4}}\right)^4$;　(6) $i^{13}-i^{17}$;

(7) $\sqrt{-a^{9n}}\sqrt{-a^{2n+1}}$;　(8) $\sqrt{2ax-(a^2+x^2)}$.

4. 求下列各組雜數的和差同積.

(1) $3-i,\ 2i+7$;　(2) $i-1,\ \dfrac{1}{2}+5i$;

(3) $\dfrac{4-3i}{2},\ 2(3-4i)$;　(4) $2-\dfrac{3}{5}i,\ 2+\dfrac{3}{5}i$;

5. $(1-i)^2=$? $\left[\dfrac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}i\right)\right]^3=$?

$\left[\dfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right)\right]^3=$?

6. 求下列各方程式的判別式:

(1) $(x-a)^2+m(x-a)+n=0$;　(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(mx+n)^2}{b^2}=1$;

(3) $(y+1)^3+y^3+(y-1)^3-3(y+1)y(y-1)=0$.

7. 討論下列各方程式的根的性質:

(1) $(x-k)^2+3(x+2k)=0$,　(2) $x^2-x+2k^2+3k-2=0$;

(3) $(3x+k-1)^2=2(3x+k-1)-1$.

8. 如 $ax^2+bx+c=0$ 中, a, c 異號,則兩根必是異號實數.

9. 證明如 $b=k+\dfrac{ac}{k}$,則 $ax^2+bx+c=0$ 的根,必是實數.

10. 方程式 $(a^2+p^2)x^2-2(aq+bp)x+(b^2+q^2)=0$ 的根,

如不是雜數,則必是相等實根,試加證明.

73.根和係數的關係 設二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$ $= x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

的兩個根是 x_1, x_2, 則由§40可知 $(x_1-x)(x+x_2)=0$

$$ax^2+bx+c \equiv a(x-x_1)(x-x_2)$$ $x^2-(x_1+x_2)+x_1x_2=0$

$$\equiv a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2].$$

又按§41得 $b=-a(x_1+x_2), c=ax_1x_2,$

卽 $$\boldsymbol{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}, \qquad \boldsymbol{x_1x_2=\frac{c}{a}}. \qquad (1)$$

如範式為 $x^2+px+q=0,$

則 $$\boldsymbol{x_1+x_2=-p}, \qquad \boldsymbol{x_1x_2=q}. \qquad (2)$$

【例一】$x^2+2x-1=0$ 的兩根,依公式解出,是 $-1\pm\sqrt{2}$.

$$\therefore\ x_1+x_2=(-1-\sqrt{2})+(-1+\sqrt{2})=-2,$$ $-\frac{b}{a}$

$$x_1x_2=(-1-\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})=(-1)^2-(\sqrt{2})^2$$ c

$$=1-2=-1,$$

和公式(2)相合. $x^2+2x-1=0$

【例二】$4x^2-4x+5=0$ 的兩根,依式解出,是 $\frac{1}{2}\pm i$.

$$\therefore\ x_1+x_2=\left(\frac{1}{2}-i\right)+\left(\frac{1}{2}+i\right)=1,$$

$$x_1x_2=\left(\frac{1}{2}-i\right)\left(\frac{1}{2}+i\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-i^2=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4},$$

和公式(1)的結果相同.

74.根的對稱式 上節的公式(1),(2)表示兩

種簡單的根的對稱式,由原方程式係數表出.其他根的對稱式,也可用係數來表.

x_1x_2 兩根對稱式的最普通形狀是

$$x_1^n x_2^m + x_2^n x_1^m = x_1^m x_2^m (x_1^{n-m} + x_2^{n-m}) \quad n>m.$$

和 $$\frac{x_1^n}{x_2^m} + \frac{x_2^n}{x_1^m} = \frac{1}{x_1^m x_2^m}(x_1^{m+n} + x_2^{m+n}).$$

但 $x_1^m x_2^m = (x_1x_2)^m = q^m$ 或 $\left(\frac{c}{a}\right)^m$, 所以如果 $x_1^k + x_2^k$ 能用係數表出,則一切對稱式都可以表出.

爲布式簡明起見,用 S_k 代表 $x_1^k + x_2^k$, 先看

$$S_1 = x_1 + x_2 = -p;$$

$$S_1^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = S_2 + 2q,$$

$$\therefore \quad S_2 = S_1^2 - 2q;$$

$$S_1S_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2)$$

$$= x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2(x_1 + x_2) = S_3 + qS_1,$$

$$\therefore \quad S_3 = S_1S_2 - qS_1;$$

....

$$S_1S_{k-1} = (x_1 + x_2)(x_1^{k-1} + x_2^{k-1})$$

$$= x_1^k + x_2^k + x_1x_2(x_1^{k-2} + x_2^{k-2}) = S_k + qS_{k-2},$$

$$\therefore \quad S_k = S_1S_{k-1} - qS_{k-2}$$

可見由 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 便能陸續推求 S_k 的值.由此得

定理. 二次方程式兩根 x_1, x_2 的對稱式,可

用原方程式係數的整式或分式表出.

【註】$1/x_1^k+1/x_2^k$ 用 S_{-k} 來表,可以化為 S_k 再求.

【注意】這兩節的理,都可以推廣到高次方程式上去,結果很重要,見本書第十五章方程式論.

【例】求用 $x^2+px+q=0$ 的係數 p,q,來表 S_4,S_{-2}.

【解】$S_2{}^2=(x_1{}^2+x_2{}^2)^2=x_1{}^4+x_2{}^4+2x_1{}^2x_2{}^2=S_4+2q^2$,又 $S_2=p^2-2q$;

$$\therefore\quad S_4=S_2{}^2-2q^2=(p^2-2q)^2-2q^2=p^4-4p^2q+2q^2.$$

$$S_{-2}=\frac{1}{x_1{}^2}+\frac{1}{x_2{}^2}=\frac{x_1{}^2+x_2{}^2}{x_1{}^2x_2{}^2}=\frac{p^2-2q}{q^2}.$$

【註】如用本節的公式來求 S_4,則要先求出 S_2,S_3,不如這裏所用解法的便利.

75.<u>作已知數為根的方程</u> 上面所說,是研究已知方程式的根或根的對稱式的方法.反過來說,我也可求作方程式,使以已知數為根,或兩根間有某種特殊關係.

【例一】作一二次方程式,以 r 和 $2r$ 為根.

【解】 $x_1+x_2=r+2r=3r,\quad x_1x_2=r2r=2r^2$,

故所求的方程式是 $x^2-3rx+2r^2=0$.

【例二】如方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根,互為倒數(即兩根的積為1),求係數間的關係.

【解】設一根為 r,則他根為 $\frac{1}{r}$,故

$\frac{c}{a}=r\cdot\frac{1}{r}=1.$ 卽 $c=a$ 與係數 b 無關係.

【例三】如方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根是 x_1,x_2,求以 (1) x_1-k, x_2-k; (2) kx_1, kx_2; (3) $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ 爲根的方程式.

【解】(1) $(x_1-k)+(x_2-k)=x_1+x_2-2k=-\frac{b}{a}-2k;$

$$(x_1-k)(x_2-k)=x_1x_2-k(x_1+x_2)+k^2=\frac{c}{a}+\frac{kb}{a}+k^2.$$

故所求的方程是 $x^2+\left(\frac{b}{a}+2k\right)x+\left(\frac{c}{a}+\frac{kb}{a}+k^2\right)=0,$

卽 $$ax^2+(2ka+b)x+(ak^2+bk+c)=0.$$

(2) $kx_1+kx_2=k(x_1+x_2)=-\frac{kb}{a}$, $kx_1\cdot kx_2=\frac{k^2c}{a}$,

故所求的方程式是 $ax^2+bkx+ck^2=0.$

(3) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{b}{a}\Big/\frac{c}{a}=-\frac{b}{c}$, $\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{a}{c}$,

故所求的方程式是 $cx^2+bx+a=0.$

【註】這個例子,應用到高次方程式上去,對於解法有很大的幫助,等到學方程式論時便知(參看 §79 和第十五章).

習題三十一

1. 求作以下各組數爲根的二次方程式:

(1) $\frac{1}{3}(1-\sqrt{7})$, $\frac{1}{3}(1+\sqrt{7})$;

(2) $\frac{1}{2}-2\sqrt{-2}$, $\frac{1}{2}+2\sqrt{-2}$.

2. 求用 $x^2+px+q=0$ 的係數來表