

修正課程標準適用

高中甲組代數學

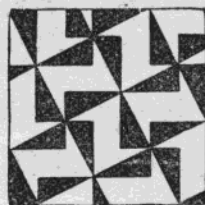
第二冊

編者 余介石

上海中華書局印行

解析幾何學

與分析學



▶ 新課程標準適用 ◀

高中解析幾何學 黃泰編 原售八角 改售六角四分
 高中解析幾何學習題解答 丘侃編 原售一元六角 改售一元二角八分

▶ 高級中學適用 ◀

解析幾何學 黃泰編 原售九角 改售七角
 新中 解析幾何學 余恆編 原售九角 改售七角

▶ 新標準師範・鄉師適用 ◀

解析幾何學 雷琛編 六角

微積分學初步	李儼著	原售四角五分
微分學	段子變編著	原售一元
	何魯	改售九角

中華書局出版

(大學用書之一)

代數方程式論

L. E. Dickson: Introduction to the Theory of Algebraic Equations

黃綠芳譯 精裝一冊 實售一元

著者狄克生爲美國第一流代數學者。此書卽爲其歷年在各大學之講稿，內容按歷史上發展之程序論述，計分上下兩篇：上篇論 Lagrange-Abel-Cauchy 諸氏之普通代數方程式論；下篇則論列 Galois 氏之代數方程式論。凡如何用代數解及如何用羣解方程式，以及五次以上方程式不能利用有理或無理豫解式之助解之等問題，無不詳爲論述。且敘述力求淺顯，立言皆從初等代數出發，不牽連及算學上其他各門類。並附有許多例解及初等習題，以資讀者練習。凡已具初等代數之知識者，卽可研讀無阻。本書譯文力求忠實，務使原書內容毫無挂漏，所用術語，多採用國立編譯館所暫定者，間有一名數譯或前後不一致處，則由譯者意見選用之。原書祇有學名索引一項，譯者除將該項之內容增補外，並添入人名索引一項，書中人名，皆用原文，不用譯音，以免混淆及隔肢之病。故本書極爲精審，不惟可爲大學教本，並可爲高中學生之參考書，或有志研究代數學者之自修用書。

▷ 本書目錄 ◁

上篇 Lagrange-Abel-Cauchy 諸氏普通代數方程式論 第一章 普通二次三次及四次方程式之解法 關於根內無理數之 Lagrange 氏定理 第二章 代換 有理函數 第三章 代換羣 有理函數 第四章 由羣之立場論普通方程式

下篇 Galois 氏代數方程式論 第五章 Galois 氏理論之代數的引言 第六章 方程式之羣 等七章 方程式利用豫解式之解法 第八章 有法循環方程式 Abel 氏方程式 第九章 判斷能用代數解之標準 第十章 準循環方程式 Galois 氏方程式 第十一章 更專門結果之敘述

附錄 ①方程式根與係數間之關係 ②對稱函數之基本定理 ③關於普通方程式 ④學名索引 ⑤人名索引

中華書局出版

中2322[全]26,5.

修正課程標準適用

高中甲組代數學第二冊

目次

頁數	頁數
第七章	根,消去法.....156
二次方程式	79. 方程式變易.....158
69. 範式和解法.....143	80. 重根.....159
70. 虛數和特性.....144	習題三十三.....162
71. 雜數和特性.....145	81. 高次聯立方程式.....164
72. 根的討論判別式.....146	82. 代入法.....164
習題三十.....147	習題三十四.....166
73. 根和係數的關係.....149	83. 加減法.....167
74. 根的對稱式.....149	84. 相除法.....169
75. 作已知數爲根的 方程.....151	習題三十五.....171
習題三十一.....152	85. 對稱性的聯立方 程,代換法.....172
76. 準二次方程.....153	86. 多元聯立方程式.....174
77. 倒數方程式.....154	習題三十六.....175
習題三十二.....155	87. 多元消去法.....176
78. 二個方程式的公	88. 應用題.....177

習題三十七.....179	解法.....194
第七章摘要.....180	99. 高次不等式.....197
第八章	習題四十一.....199
不等式	第八章摘要.....200
89. 數量的比較.....183	第九章
90. 不等式運算一:加	二次函數
減法.....183	100. 二次函數數值的
91. 關於加減的不定	正負.....202
情形.....184	101. 二次函數的極大
習題三十八.....185	極小.....204
92. 不等式運算二:乘	習題四十二.....207
同除.....186	102. 二次函數的圖解...208
93. 不等式運算三:冪	習題四十三.....211
同根.....187	103. 含參變數的二次
94. 關於乘,除,冪,根的	方程.....212
不定情形.....188	習題四十四.....215
習題三十九.....189	104. 根同一已知數的
95. 兩種不等式.....189	比較.....215
96. 絕對不等式證法...190	習題四十五.....218
97. 兩個重要的定理...192	105. 幾何的說明.....219
習題四十.....194	106. 根同兩已知數的
98. 一次條件不等式	比較.....220

107. 根同已知數比較
 的又一法……………222
 習題四十六……………223
 第九章摘要……………224
- 第十章**
 分式函數
108. 分式的種類……………225
 109. 分式的運算……………225
 習題四十七……………228
 110. 部份分式法原理…229
 111. 最簡的部份分式…233
 習題四十八……………237
 112. 分式方程式……………237
 113. 特殊的解法……………240
 習題四十九……………242
 114. 極限的實例……………244
 115. 極限定義, 記法和
 幾何說明……………246
 116. 不定式的求值法…247
 習題五十……………249
 117. 聯立分式方程式…250
 118. 應用題……………251
119. 分式不等式……………252
 習題五十一……………253
 120. 分式的極大極小…254
 121. 求分式極大極小
 通法……………258
 122. 分式的圖解……………259
 習題五十二……………261
 第十章摘要……………262
- 第十一章**
 無理函數
123. 整式方根的特性…264
 124. 多項式開方……………265
 習題五十三……………269
 125. 根式化約律……………270
 126. 最簡根式和同類
 根式……………270
 127. 同次的根式……………271
 128. 不同類根式特性…272
 129. 最簡整無理式的
 和, 差同積……………273
 習題五十四……………274
 130. $a+2\sqrt{b}$ 的平方根…275

131. 雜數平方根.....	276	習題五十六.....	285
132. 有理化因式.....	278	137. 特別的解法.....	286
133. 最簡整無理式的 除法.....	280	138. 聯立無理方程式.....	289
134. 共軛雜數, 雜數的 除法.....	280	習題五十七.....	290
習題五十五.....	281	139. 應用題.....	291
135. 無理方程式.....	282	140. 無理函數的圖解.....	293
136. 解法的討論.....	285	習題五十八.....	295
		第十一章摘要.....	296
		中西名詞對照表	



第七章

二次方程式

69. 範式和解法 二次方程都可化爲下面的兩種範式:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ 或 } x^2 + px + q = 0.$$

根是有理數時,可用 §39 的方法去求.一般解法是利用 $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 兩個恆等式,將範式分解成兩個一次因式再解.這法叫做配方法,詳細步驟如下:

$$ax^2 + bx + c = a \left\{ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{將前兩項配成平方} &= a \left\{ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right\} \\ &= a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

$$\text{分解得 } \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right) + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right) - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

兩個因式,所以他的兩根的公式是:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

如果範式是 $ax^2 + 2bx + c = 0$,

$$\text{則兩根是 } x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

【例一】解方程式 $3x^2 - x - 4 = 0$.

【解】 $a=3$, $b=-1$, $c=-4$, 代入公式, 得

$$x_1 = \frac{1}{6} \left\{ 1 - \sqrt{1 - 4 \cdot 3(-4)} \right\} = \frac{1}{6} (1 - \sqrt{1 + 48}) = \frac{1}{6} (1 - 7) = -1,$$

$$x_2 = \frac{1}{6} (1 + 7) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

【例二】解方程式 $3x^2 + 6x - 2 = 0$.

【解】用第二公式 $a=3$, $2b=6$, $c=-2$, 則得

$$x_1 = \frac{1}{3} \left\{ -3 - \sqrt{9 - 3(-2)} \right\} = -1 - \frac{\sqrt{15}}{3}, x_2 = -1 + \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

70. 虛數和特性 在 §4 的註二裏說過負數的平方根叫做虛數。所以虛數是除去負數不能開平方根和偶次方根的限制而生的。換句話說, 就是虛數運算, 不合於 §9 的符號律。

任何負數 $-a^2$ (a 是實數) 的平方根, 都可寫做

$$\sqrt{-a^2} = a\sqrt{-1} = ai.$$

i 是表 $\sqrt{-1}$ 的符號, 即 $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$.

i 即 $\sqrt{-1}$ 叫做虛數單位, a 叫做係數。

由定義可知(一)虛數的奇次方, 還是虛數; 偶次方卻是實數, 方數為奇數的二倍時是負數, 為 4 的倍數時是正數。

【例一】 $\sqrt{-4} = \sqrt{-2^2} = 2i$, $\sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{-20} = 2\sqrt{5}i$.

【例二】 $\sqrt{-3}\sqrt{-6} = \sqrt{3}i \cdot \sqrt{6}i = 3\sqrt{2}i^2 = -3\sqrt{2}$.

【注意】算虛數時，宜先化出單位再算，便不易錯。

【例三】 $i^3 = i^2 \cdot i = -1i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$.

(二)虛數和實數，決不能相等。

因為虛數的平方是負數，實數平方是正數，如能相等，就不合於推演律裏的乘方定律。

(三)虛數同實數相加減，只能用運算符號，聯成一數，並不能相合。

因為如果 $a+bi = \begin{cases} ci \\ \text{或 } c \end{cases}$ ，則 $\begin{cases} (c-b)i = a \\ \text{或 } bi = c-a \end{cases}$ 。

都和(二)衝突。

【註】為了公律常住性起見，我們設兩虛數的和差是一虛數，係數為原來兩數裏係數的和差。

71. 雜數和特性 用加減號聯實虛數兩部

所成的數，叫雜數，雜數的特性和算法如下：

(一)要使雜數 $a+bi=0$ ，必須 $a=b=0$ 。

因為虛數和實數不能相合相消。

(二)兩雜數 $a+bi=c+di$ ，必須 $a=c, b=d$ 。

因為 $(a-c)+(b-d)i=0$ ，必須 $a-c=b-d=0$ 。

要使雜數運算，合乎公律，應該有：

(三)兩雜數相加減，分別虛實部相加減。

(四)兩雜數相乘按多項式法則相乘。

表解

【註一】雜數的除法和平方根等到第十一章再講。

【註二】代數基本定理 (§40 註) 在雜數範圍內才成立。

【注意】§§ 70, 71 所說的特性, 并非能證明的定律, 卻是規定的新數算法, 目的在使新數服從原有的公律定律。(但要撤去的限制, 如符號定律, 當然不能再遵守。)

【例一】 $2-3i+(-1+2i)=(2-1)+(-3+2)i=1-i.$

【例二】 $(2-3i)(-1+2i)=2(-1+2i)-3i(-1+2i)$
 $=-2+4i+3i-6i^2=-2-(-6)+4i+3i=4+7i.$

72. 根的討論, 判別式 二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

兩根的性質, 就 $D=b^2-4ac$ 一式數值的正負而定, D 便叫做二次方程的判別式。

(一) $b^2-4ac>0$, 兩根是不相等的實數。

(二) $b^2-4ac=0$, 兩根是相等的實數。

(三) $b^2-4ac<0$, 兩根是不相等的雜數。

如範式是 $ax^2+2bx+c=0$, 則 $D=b^2-ac$ 。

【例一】研究方程式 $3x^2-2kx+27=0$ 兩根的性質。

【解】 $D=k^2-3\cdot 27=k^2-81=(k-9)(k+9)$, 所以

(1) 如果 $k>9$ 或 $k<-9$, 則 D 的兩個因式同號, 所以 $D>0$; 方程式有相異實根。

(2) 如果 $k=9$ 或 -9 , 則 $D=0$, 有相等實根。

(3) 如果 $9 > k > -9$, 則 D 的兩個因式異號, 所以 $D < 0$; 方程式有相異雜根。

【例二】求 $f(x) = (a-b)x^2 + (a+b)^2x + (a^2 - b^2)(a+b)$ 一式爲完全平方(就是由一整式自乘而得的)時, a 和 b 的關係。

【解】如 $f(x)$ 是完全平方, 則 $f(x) = 0$ 有相等實根, 故

$$\begin{aligned} D &= (a+b)^4 - 4(a-b)(a^2 - b^2)(a+b) \\ &= (a+b)^4 - 4(a-b)^2(a+b)^2 \\ &= (a+b)^2[(a+b)^2 - 4(a-b)^2] \\ &= -(a+b)^2(3a^2 - 10ab + 3b^2) \\ &= -(a+b)^2(3a-b)(a-3b) = 0. \end{aligned}$$

∴ $a = -b$, $3a = b$, 或是 $a = 3b$.

習題三十

1. 決定下列各二次方程式兩根的性質, 並求出來:

$$\begin{aligned} (1) x^2 + x + 1 &= 0; & (2) 3x^2 - 4x + \frac{4}{3} &= 0; \\ (3) 3x^2 + 2x - 1 &= 0; & (4) 2x^2 - 3x + 1 &= 0; \\ (5) 3x^2 - 2x + 1 &= 0; & (6) \frac{x^2}{4} - x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

再求各方程式兩根的和, 以及兩根的積。

2. 按定義 $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned} \text{但 } i^2 &= \sqrt{-1}\sqrt{-1} \\ &= \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

豈不是 $-1 = 1$ 麼? 錯誤的地方在那裏?

3. 化簡

(1) $\sqrt{3}\sqrt{-48}$; (2) $\sqrt{-3}\sqrt{-48}$; (3) $(2\sqrt{-4})^2$;

(4) $(-\sqrt{-12})^3$; (5) $(-\sqrt{-3}\sqrt{-4})^4$; (6) $i^{13}-i^{17}$;

(7) $\sqrt{-a^{2n}}\sqrt{-a^{2n+1}}$; (8) $\sqrt{2ax-(a^2+x^2)}$.

4. 求下列各組雜數的和差同積。

(1) $3-i, 2i+7$; (2) $i-1, \frac{1}{2}+5i$;

(3) $\frac{4-3i}{2}, 2(3-4i)$; (4) $2-\frac{3}{5}i, 2+\frac{3}{5}i$;

5. $(1-i)^2 = ?$ $\left[\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}i)\right]^3 = ?$

$\left[\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)\right]^3 = ?$

6. 求下列各方程式的判別式：

(1) $(x-a)^2+m(x-a)+n=0$; (2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1$;

$(3) (y+1)^3+y^3+(y-1)^3-3(y+1)y(y-1)=0$.

7. 討論下列各方程式的根的性質：

(1) $(x-k)^2+3(x+2k)=0$, (2) $x^2-x+2k^2+3k-2=0$;

$(3) (3x+k-1)^2=2(3x+k-1)-1$.

8. 如 $ax^2+bx+c=0$ 中, a, c 異號, 則兩根必是異號實

數。

9. 證明如 $b=k+\frac{ac}{k}$, 則 $ax^2+bx+c=0$ 的根, 必是實

數。

10. 方程式 $(a^2+p^2)x^2-2(aq+bp)x+(b^2+q^2)=0$ 的根,

如不是雜數，則必是相等實根，試加證明。

73. 根和係數的關係

設二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

的兩個根是 x_1, x_2 ，則由 §40 可知 $(x_1 - x)(x + x_2) = 0$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &\equiv a(x - x_1)(x - x_2) \quad x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0 \\ &\equiv a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]. \end{aligned}$$

又按 §41 得 $b = -a(x_1 + x_2), c = ax_1x_2$,

即
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}. \quad (1)$$

如範式為 $x^2 + px + q = 0$,

則
$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1x_2 = q. \quad (2)$$

【例一】 $x^2 + 2x - 1 = 0$ 的兩根，依公式解出，是 $-1 \pm \sqrt{2}$ 。

$$\therefore x_1 + x_2 = (-1 - \sqrt{2}) + (-1 + \sqrt{2}) = -2, \quad -b$$

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= (-1 - \sqrt{2})(-1 + \sqrt{2}) = (-1)^2 - (\sqrt{2})^2 \\ &= 1 - 2 = -1, \quad x_1^2 - x_2^2 = -1 \end{aligned}$$

和公式(2)相合。

【例二】 $4x^2 - 4x + 5 = 0$ 的兩根，依式解出，是 $\frac{1}{2} \pm i$ 。

$$\therefore x_1 + x_2 = \left(\frac{1}{2} - i\right) + \left(\frac{1}{2} + i\right) = 1,$$

$$x_1x_2 = \left(\frac{1}{2} - i\right)\left(\frac{1}{2} + i\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - i^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4},$$

和公式(1)的結果相同。

74. 根的對稱式

上節的公式(1),(2)表示兩

種簡單的根的對稱式,由原方程式係數表出.其他根的對稱式,也可用係數來表.

x_1, x_2 兩根對稱式的最普通形狀是

$$x_1^n x_2^m + x_2^n x_1^m = x_1^m x_2^m (x_1^{n-m} + x_2^{n-m}) \quad n > m.$$

和
$$\frac{x_1^n}{x_2^m} + \frac{x_2^n}{x_1^m} = \frac{1}{x_1^m x_2^m} (x_1^{m+n} + x_2^{m+n}).$$

但 $x_1^m x_2^m = (x_1 x_2)^m = q^m$ 或 $\left(\frac{c}{a}\right)^m$, 所以如果 $x_1^k + x_2^k$ 能用係數表出,則一切對稱式都可以表出.

爲布式簡明起見,用 S_k 代表 $x_1^k + x_2^k$, 先看

$$S_1 = x_1 + x_2 = -p;$$

$$S_1^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = S_2 + 2q,$$

$$\therefore S_2 = S_1^2 - 2q;$$

$$S_1 S_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2)$$

$$= x_1^3 + x_2^3 + x_1 x_2 (x_1 + x_2) = S_3 + q S_1,$$

$$\therefore S_3 = S_1 S_2 - q S_1;$$

$$S_1 S_{k-1} = (x_1 + x_2)(x_1^{k-1} + x_2^{k-1})$$

$$= x_1^k + x_2^k + x_1 x_2 (x_1^{k-2} + x_2^{k-2}) = S_k + q S_{k-2},$$

$$\therefore S_k = S_1 S_{k-1} - q S_{k-2}$$

可見由 S_1, S_2, S_3, \dots 便能陸續推求 S_k 的值.由此得
定理. 二次方程式兩根 x_1, x_2 的對稱式,可

用原方程式係數的整式或分式表出。

【註】 $1/x_1^k + 1/x_2^k$ 用 S_{-k} 來表，可以化爲 S_k 再求。

【注意】這兩節的理，都可以推廣到高次方程式上去，結果很重要，見本書第十五章方程式論。

【例】求用 $x^2 + px + q = 0$ 的係數 p, q ，來表 S_4, S_{-2} 。

【解】 $S_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 = S_4 + 2q^2$ ，

又 $S_2 = p^2 - 2q$ ；

$$\therefore S_4 = S_2^2 - 2q^2 = (p^2 - 2q)^2 - 2q^2 = p^4 - 4p^2q + 2q^2.$$

$$S_{-2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{p^2 - 2q}{q^2}.$$

【註】如用本節的公式來求 S_4 ，則要先求出 S_2, S_3 ，不如這裏所用解法的便利。

75. 作已知數爲根的方程 上面所說，是研究已知方程式的根或根的對稱式的方法，反過來說，我也可求作方程式，使以已知數爲根，或兩根間有某種特殊關係。

【例一】作一二次方程式，以 r 和 $2r$ 爲根。

【解】 $x_1 + x_2 = r + 2r = 3r$ ， $x_1x_2 = r \cdot 2r = 2r^2$ ，

故所求的方程式是 $x^2 - 3rx + 2r^2 = 0$ 。

【例二】如方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的兩根，互爲倒數（即兩根的積爲 1），求係數間的關係。

【解】設一根爲 r ，則他根爲 $\frac{1}{r}$ ，故

$$\frac{c}{a} = r \cdot \frac{1}{r} = 1. \quad \text{即 } c = a \text{ 與係數 } b \text{ 無關係.}$$

【例三】如方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的兩根是 x_1, x_2 , 求以 (1) $x_1 - k, x_2 - k$; (2) kx_1, kx_2 ; (3) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ 爲根的方程式。

【解】(1) $(x_1 - k) + (x_2 - k) = x_1 + x_2 - 2k = -\frac{b}{a} - 2k$;

$$(x_1 - k)(x_2 - k) = x_1 x_2 - k(x_1 + x_2) + k^2 = \frac{c}{a} + \frac{kb}{a} + k^2.$$

故所求的方程是 $x^2 + \left(\frac{b}{a} + 2k\right)x + \left(\frac{c}{a} + \frac{kb}{a} + k^2\right) = 0$,

即 $ax^2 + (2ka + b)x + (ak^2 + bk + c) = 0$.

(2) $kx_1 + kx_2 = k(x_1 + x_2) = -\frac{kb}{a}$, $kx_1 \cdot kx_2 = \frac{k^2 c}{a}$,

故所求的方程式是 $ax^2 + b k x + c k^2 = 0$.

(3) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{b/c}{a} = -\frac{b}{c}$, $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{a}{c}$,

故所求的方程式是 $cx^2 + bx + a = 0$.

【註】這個例子,應用到高次方程式上去,對於解法有很大的幫助,等到學方程式論時便知。(參看 §79 和第十五章)。

習題三十一

1. 求作以下各組數爲根的二次方程式:

(1) $\frac{1}{3}(1 - \sqrt{7}), \frac{1}{3}(1 + \sqrt{7})$;

(2) $\frac{1}{2} - 2\sqrt{-2}, \frac{1}{2} + 2\sqrt{-2}$.

2. 求用 $x^2 + px + q = 0$ 的係數來表