高等代数复习与研究

主编　刘学鹏　王崇保
　　　刘兴祥　杨　军

南海出版公司

高等代数复习与研究

主　编　刘学鹏　刘兴祥
　　　　王崇保　杨　军
副主编　张东艳　徐传年
　　　　孙中锋
编　委　王德贵　吴永生
　　　　栾慧敏　邸长城

南海出版公司
1996·海口

琼新登字 01 号

高等代数复习与研究

主编 刘学鹏 刘兴祥 王崇保 杨军

总 经 理 霍宝珍

责任编辑 原式溶

封面设计 任世忠

南海出版公司出版发行

新 华 书 店 经 销

日照市石臼印刷厂印刷

850×1168 毫米 32 开 11.375 印张 280 千字

1996 年 5 月第 1 版 1996 年 5 月第 1 次印刷

印数 1—3000

ISBN 7-80570-964-5/G·286

定价：11.00 元

前　言

高等代数不仅是高等学校数学专业的一门主要基础课，同时也是理工科某些专业的重要学习内容。笔者根据多年的高等代数教学实践，以及对某些典型代数问题的学习和研究，编写了这本《高等代数复习与研究》。

由于近几年我国高等教育发展十分迅速，教育体制的改革不断深化，广大师生以及工程技术的人员，都需要掌握高等代数的基本知识、基本方法和基本理论。

本书共分八章，各章自成体系，基本上包括了高等代数的主要内容。每一章均分为两部分，即基本概念、基本性质和例题分析、问题探讨。第一部分对该章的主要概念和性质画龙点睛地给以提及。第二部分，一方面以例题的形式对高等代数的主要方法进行了归纳和总结；另一方面对某些重要结论，在证明方法上作了较为深入的探讨。例如，正定二次型判别条件的证明，实对称矩阵正交相似于对角形矩阵的证明，向量内积的应用等等。同时，还对某些典型问题作了引申和推广，对某些重要方法进行了综合性的研究，如化二次型为标准形的方法，等等。

在本书编写过程中，笔者参考了国内外有关高等代数教科书、辅导材料及文献，在此不一一列举，谨表示衷心的感谢。

限于编者的水平，书中难免有不少缺点和错误，我们诚恳地期待着读者批评指正。

编者

1996 年 4 月

目　录

第一章　行列式

一、基本概念和基本性质

1. 二阶、三阶行列式

（1）二阶行列式的定义：

记号
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
称为二阶行列式
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

（2）三阶行列式的定义

记号
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
称为三阶行列式
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

2. n 元排列的有关概念

（1）由 1，2，…，n 组成的一个有序数组 j_1，j_2，…，j_n 称为一个 n 元排列。

（2）在一个排列中，如果有一个较大的数排在一个较小的数之前，就称这两个数构成一个反序，一个排列中反序的总数就称为这个排列的反序数。排列 j_1，j_2，…，j_n 的反序数用 τ（j_1，j_2，…，j_n）表示。

(3) 反序数为偶数的排列称为偶排列，反序数为奇数的排列称为奇排列。

(4) 把一个排列中某两个数码的位置互换，而其余的数不动，就得到一个新的排列，这样的一个变换称为一个对换。

3. n 元排列的有关结论

(1) n 元排列共有 $n!$ 个，其中奇偶排列各半。

(2) 每一个对换都改变排列的奇偶性。

(3) 任意一个 n 元排列都可以经过一系列对换变成自然顺序的排列，并且所对换的个数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同。

4. n 阶行列式的定义

由 n^2 个元素 a_{ij} ($i=1, 2, \cdots, n$; $j=1, 2, \cdots, n$) 组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它表示所有可能取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和。项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，也就是当 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 为偶排列时，这一项取正号；为奇排列时，取负号，这一定义可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \qquad ③$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和。

5. n 阶行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等，所谓转置行列式就是把

行列式的行与列互换后得到的新行列式。

(2) 对换行列式的两行，行列式变号。

(3) 用数 k 乘行列式的一行，等于数 k 乘此行列式。特别值得注意，如果行列式中某一行的元素有公因子，则公因子可以提到行列式的记号外面。

(4) 如果行列式的某一行元素可以看作是两组数的和，那么这个行列式就等于两个行列式的和，这两个行列式分别以这两组数为这一行的元素，而除去这一行外，这两个行列式的其它各行都与原来行列式对应相同。

更进一步说，如果行列式某一行的元素可以写成 m 个数（$m>2$）的和，则此行列式可以写成 m 个行列式的和。

(5) 把行列式的某一行的若干倍加到另一行上，行列式的值不变。

(6) 关于行列式的值为零的情形：行列式中有两行成比例时，其值为零；行列式中有一行为零时，其值为零；行列式中有两行相同时，其值为零。以上是关于行列式行的性质，对列也同样适用。

6. 子式、余子式和代数余子式

(1) 在一个 n 阶行列式 D 中，任取 k 行和 k 列，位于这些行与列相交处的元素构成的 k 阶行列式称为 D 的一个 k 阶子式，用 N 表示。

(2) 在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后得到的 $n-1$ 阶行列式，称为 D 中元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}。

而 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}。即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。

更进一步说，在 D 中划去 k 行与 k 列后余下的 $(n-k)^2$ 个元素按原来位置组成的一个 $n-k$ 阶行列式，称为 k 阶子式 N 的余

子式，用 M 表示。而 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M$ 称为 M 的代数余子式，其中 i_1，i_2，…，i_k 为 N 所在的行，j_1，j_2，…，j_k 为 N 所在的列。

7. 行列按一行（列）展开定理

行列式 D 中任一行（列）的元素与它们的代数余子式乘积的和等于行列式的值。而任一行（列）的元素与另一行（列）的元素的代数余子式乘积的和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D & 当\ i=j\ 时； \\ 0 & 当\ i\neq j\ 时。\end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D & 当\ i=j\ 时； \\ 0 & 当\ i\neq j\ 时。\end{cases}$$

8. 拉普拉斯定理

设在 n 阶行列式 D 中任意取定了 k 行(或列) $1\leqslant k\leqslant n-1$。由这 k 行(列)元素组成的所有 k 阶子式与它们对应的代数余子式乘积的和等于行列式 D。

9. 几种特殊的行列式

(1)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & a_{0} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n}{2}(n-1)} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}.$$

(3)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_1^{n1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

10. 克莱姆法则

一个含有 n 个未知量，n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

当它的系数行列式 $D \neq 0$ 时，有且只有一个解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D}.$$

此处 D_j 是把 D 的第 j 列换成常数项 b_1，b_2，…，b_n 而得到的 n 阶行列式。

11. 学习要求

本章的重点是行列式的计算；难点是 n 阶行列式的定义以及行列式性质的证明。

具体学习要求如下：

（1）掌握行列式的概念，会用定义计算二、三阶行列式及一些特殊行列式。

（2）掌握行列式的基本性质，懂得证明它们的方法，并能熟练应用这些性质。

（3）熟练掌握将数字行列式化简为三角形行列式的一般方法。

（4）会求 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij}，并熟练掌握行列式按某一行（列）展开的方法。

（5）掌握计算行列式的基本方法和技巧，并能灵活地运用它们来计算 n 阶行列式。

（6）掌握克莱姆法则，并能应用它来解线性方程组。

二、例题分析和问题探讨

1. 问题探讨

（1）在行列式的定义中，当一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 时，即行下标按自然顺序排列时，该项的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$；当行下标不按自然顺序排列，即一般项为 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 时，该项符号如何确定？

答：由排列的有关性质可推出，项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 的符号为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

（2）判断一个行列式 D 是否为零常用什么方法？

答：除了直接计算 D 以外，还可从以下几个方面来考虑：

①根据行列式的性质直接判断，即若 D 有两行（列）对应元素相同或成比例，则 $D=0$；若 D 有一行（列）的所有元素全为零，则 $D=0$。

②如果 D 为奇数阶反对称行列式（$D'=-D$），则 $D=0$。

③如果 n 阶行列式 D 中等于零的元素个数比 n^2-n 多，则 D

$=0$。事实上，当 D 中等于零的元素比 n^2-n 多时，不等于零的元素个数一定比 $n^2-(n^2-n)=n$ 少，所以 D 中至少有一行元素全为零，故 $D=0$。

④如果 D 不能被 2 整除，则 $D\neq0$。

(3) 在计算二阶和三阶行列式时，可以用对角线法则求出其值，一般 n (>3) 阶的行列式有没有类似的法则？

答：一般 n (>3) 阶的行列式的计算没有所谓对角线法则，计算时不要乱用，比如，四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{41} & \cdots & a_{44} \end{vmatrix}$$

的次对角线上元素的乘积 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$，由于 $\tau(4321)=6$，所以它的前面应带正号，而不是负号。

(4) 行列式有无其它定义方法？

答：有其它定义方法，常见的还有归纳定义法、置换定义法和公理化 定义法。置换定义法要用到 n 次置换的一些知识，低年级学生很难理解和接受；公理化定义法要用到多重线性函数及其它预备知识，因此这两种定义方法我们就不作介绍，下面给出行列式的归纳定义法：

一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

一般，n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}.$$

这里 M_{ij} 是 D_n 划掉第 i 行及第 j 列后得到的 $n-1$ 阶行列式。

这种定义方法与我们一般教科书上采用的排列定义法是一致的，有兴趣的同学可以证明。

归纳定义法易于接受和理解，但行列式的基本性质的证明则比较麻烦。

(5) 由行列式的性质我们知道，一个 n 阶行列式 D，如果满足下列三个条件之一：

①D 中有一行（列）的元素全为零；

②D 中有两行（列）元素成比例；

③D 中有两行（列）的元素对应相等。

则 $D=0$，现在要问，若 $D=0$，则 D 是否必满足上述三个条件中的某一个？

答：不一定，例如

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

(6) 化简计算行列式的基本方法是什么？通常按什么顺序选择化简方法？

答：任何一个行列式都可以用行列式的性质化为三角形行列式，其主对角线上元素的乘积就是所要求的结果。或用行列式的性质，使某行（列）出现尽可能多的零，再按这行（列）展开降阶，如此重复，最终可将行列式化为若干个二、三阶行列式的和。以上两个方法是计算行列式的基本方法。

两个基本方法在适用场合方面没有明显的界线，在实际计算中通常是交叉使用的，如果行列式各行列大部分元素相同，应首先考虑使用行列式的性质化简；如果行列式中零元素较多，则应先考虑使用按行列展开的方法。

在计算行列式时，可以按下面的步骤分析，供参考：

①行列式有无明显得零的特征，有无两行元素对应成比例等。

②行例式的大部分元素是否相同，如果是，可以选择一行（列）乘以适当倍数加其余各行（列），使行列式出现尽可能多的零。

③是否某行（列）的大 部分元素为零，如果是，可以考虑按该行（列）展开。

④如果各行（列）元素之和相同，可以把各（列）（行）加到第一列（行），并提出公因子。

⑤n 阶行列式 D_n 与划掉 D_n 的第一行、第一列后得到的 D_{n-1} 是否有相同的形状，如果是，可采用递推的办法求 D_n。

2. **例题分析**

（1）**确定排列的反序数及奇偶性**：解决此类问题主要用到的知识是计算排列的反序数的方法及奇偶排列的定义。

求 n 个数码的排列的反序数的方法是：

先看有多少个数码排在 1 前面，设为 m_1 个；然后把 1 划去，再看有多少 数码排在 2 的前面，设为 m_2 个；再把 2 划去，看有多少数码排在 3 前面……，如此继续下去，最后设在 n 前面有 m_n 个数码（显然 $m_n=0$）. 于是该排列的反序数即为 $m_1+m_2+\cdots+m_n$.

例 1 计算 $2n$ 级排列 $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$ 的反序数，并确定其奇偶性。

解 给定的排列中，前 n 个数码 $135\cdots(2n-1)$ 之间不构成反序，后 n 个数码 $24\cdots(2n)$ 之间也不构成反序，只有前 n 个数码与后 n 个数码之间才构成反序。反以

$$\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))$$
$$=0+(n-1)+0+(n-2)+\cdots+0+1+0+0$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}.$$

因此，当 $n=4k$，$4k+1$ 时为偶排列；当 $n=4k+2$，$4k+3$ 时为奇

排列。

例 2 选择 i 与 k，使 $1274i56k9$ 为偶排列

解 显然 i 与 k 只能选 3 与 8。设 $i=3$，$k=8$. 则得排列 127435689，计算可得，此排列的反序数是 5，为奇排列。由于对换改变排列的奇偶性，所以取 $i=8$，$k=3$，就得到 127485639 为偶排列。

（2）**确定行列式的项及项的符号**：

此类问题主要是根据行列式的定义确定行列式的具有某些性质的项及项的符号。

例 3 下列各乘积是否是 4 阶行列式的项，若是，确定应取的符号。

①$a_{11}a_{23}a_{14}a_{42}$；②$a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}$.

解 ①因为 $a_{11}a_{23}a_{14}a_{42}$ 中元素 a_{11} 与 a_{14} 均为第一行的元素，所以 $a_{11}a_{23}a_{14}a_{42}$ 不是 4 阶行列式中的项。

②因为 $a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}$ 中元素的行标互不相同，列标也互不相同，所以 $a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}$ 是 4 阶行列式中的项。又 $\tau(3142)+\tau(4231)=3+5=8$，所以该项取正号。

例 4 写出四阶行列式中带负号且包含 a_{23} 的项。

解 含 a_{23} 的项可设为 $a_{1i}a_{23}a_{3j}a_{4k}$. 要使其带负号，当且仅当其列下标的排列 $i3jk$ 为奇排列，而 ijk 只能取 124 中的数。经检验可知，列下标的排列只能是 1324，4312，2341. 因此，所求的项为：

$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$，$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$.

（3）**行列式的计算**：计算高阶行列式是复杂而困难的事，但在实际问题与理论问题中又必须解决。对于数字行列式，我们总可以利用行列式的性质将原行列式化为三角形行列式或根据行列式的展开定理通过降阶的方法来进行计算。

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\-2&1&3&1\\0&1&0&-1\\1&3&4&-2\end{vmatrix}.$$

解法一

$$D=\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\-2&1&3&1\\0&1&0&-1\\1&3&4&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&5\\0&1&0&-1\\0&3&5&-4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&5\\0&0&-1&-6\\0&0&2&-19\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&5\\0&0&-1&-6\\1&0&0&-31\end{vmatrix}$$

$$=31.$$

该解法就是利用行列式的性质将原行列式化为三角形行列式进行计算。

解法二

$$D=\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&5\\0&1&0&-1\\0&3&5&-4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&5\\1&0&-1\\3&5&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&5\\0&-1&-6\\0&2&-19\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-1&-6\\2&-19\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-6\\0&-3\end{vmatrix}=31.$$

该解法是根据行列式的展开定理，把原行列式按某一行（列）展开，通过逐步降阶进行计算，但应注意的一点是，在按某一行（列）展开时，最好将该行（列）首先根据行列式的性质化

成尽可能多的零，然后展开，这样将简化计算。

对于文字行列式，从理论上来说，也可用行列式的性质将原行列式化为三角形行列式或通过逐步降阶来计算，但要实现这一想法有时是困难的。下面给出计算行列式时常用的一些基本方法和技巧。

Ⅰ. **化为三角形行列式**：三角形行列式等于它的主对角线元素的乘积。因此，若能将一个行列式化为三角形行列式，自然是最理想的了。能够化为三角形行列式的行列式主要有以下几类：

第一类：行列式对角线以下（上）的元素与行列式中某一行（列）的对应元素成比例。这一类行列式，只要把行列式的某一行（列）乘以适当倍数加到其它行（列），即可化为三角形行列式。

例6 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

解 将D的第一行乘以（-1）分别加到第2，3，…，（$n+1$）行上去，可得

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}=b_1b_2\cdots b_n.$$

例7 计算