研究生教学用书

专 业 课 系 列

泛函分析与现代分析教程

Fanhan Fenxi yu Xiandai Fenxi Jiaocheng

夏敏学 刘清国 李莎澜

BOOKS FOR GRADUATE STUDENTS

华中科技大学出版社

研究生教学用书
专业课系列

泛函分析与现代分析教程

夏敏学　刘清国　李莎澜

华中科技大学出版社
中国·武汉

本书共 11 章.第 1 章至第 8 章主要介绍了泛函分析的基本内容:拓扑空间和 Hausdorff 拓扑空间、度量空间、拓扑空间中的连续映射、拓扑线性空间上的线性算子、赋范线性空间中的有界线性算子、连续映射(算子)空间、线性泛函、逆映射与共轭映射.第 9 章至第 11 章主要介绍了现代分析的初步内容:向量值函数和算子值函数的积分、抽象函数的解析性、赋范线性空间上的微分(运算).内容编写比较丰富,证明过程简明,既可作为泛函分析和现代分析的入门教材和选修课教材,也可作为高等院校相关专业的教师、高年级学生、研究生及科技工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析与现代分析教程/夏敏学 刘清国 李莎澜.—武汉:华中科技大学出版社,2009 年 12 月

ISBN 978-7-5609-5817-0

Ⅰ.泛… Ⅱ.①夏… ②刘… ③李… Ⅲ.①泛函分析-研究生-教材 ②分析(数学)-研究生-教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 208401 号

泛函分析与现代分析教程 夏敏学 刘清国 李莎澜

策划编辑:冯传禄

责任编辑:王汉江 封面设计:刘 卉

责任校对:刘 竣 责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国・武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:湖北恒泰印务有限公司

开本:710mm×1000mm 1/16 印张:10.25 字数:192 000

版次:2009 年 12 月第 1 版 印次:2009 年 12 月第 1 次印刷 定价:19.50 元

ISBN 978-7-5609-5817-0/O・514

前　　言

泛函分析和现代分析是20世纪发展起来的一个重要数学分支,20世纪30年代正式成为一门独立的学科.在20世纪60年代以后,泛函分析和现代分析本身的理论有了生机勃勃的发展,既吸收了经典数学分析的一些重要方法,又综合了代数与几何的一些基本观点,并在此基础上提炼出许多崭新的分析方法.更值得注意的是,泛函分析和现代分析的思想、方法不仅渗透到数学的诸多领域,而且在力学、物理学、系统与控制理论、通信、军事工程、社会经济理论等领域都有着广泛的应用,并取得了丰硕的成果.泛函分析和现代分析现已成为研究自然科学、工程技术理论、经济学、乃至社会科学不可缺少的数学理论基础.

鉴于泛函分析和现代分析的重要性,其作为一门基础课已列入我国高等院校数学系和应用数学系的教学计划,同时也成为工程技术专业和经济专业等研究生必修的数学基础课程之一.

由于泛函分析和现代分析本身的抽象性、概括性较强,所以学习起来需要具备一定的数学基础知识和基本技能,特别是非数学专业的大学生和研究生,如数学分析、高等代数、线性代数、实(复)变函数、测度论等基本知识是必不可少的.

本书主要介绍了泛函分析和现代分析中一些重要的基本内容,其中大部分内容在本院的硕士研究生和博士研究生的教学中反复讲授过,得到了广大学生的认可和好评.全书共11章:第1章,拓扑空间和Hausdorff拓扑空间;第2章,度量空间;第3章,拓扑空间中的连续映射;第4章,拓扑线性空间上的线性算子;第5章,赋范线性空间中的有界线性算子;第6章,连续映射(算子)空间;第7章,线性泛函;第8章,逆映射与共轭映射;第9章,向量值函数和算子值函数的积分;第10章,抽象函数的解析性;第11章,赋范线性空间上的微分(运算).有的章节可根据教学或学习的需要予以跳过或调整.

由于作者水平有限,书中难免存在缺点和错误,诚望专家、读者给予批评指正.

编　者
2009.10

目　　录

第 1 章　拓扑空间和 Hausdorff 拓扑空间

数学中的空间概念是十分重要的. 所谓空间，是指在集合上以公理的形式规定元素间的某种关系. 这种关系决定了空间的结构. 本章就序的概念开始主要讨论拓扑空间、Hausdorff 拓扑空间及其一些性质.

1.1　序与 Zorn 极大原理

定义 1.1　设 X 是含有元素 $x,y,\cdots$ 的集合，在 X 上给定序关系“$\prec$”，使得对 X 中某些元素存在 $x\prec y(x,y\in X)$，且满足

(i) **反身性**　对 $\forall x\in X$，有 $x\prec x$；

(ii) **传递性**　若 $x\prec y,y\prec z$，有 $x\prec z$，

则称序“$\prec$”为**拟序**.

设 X 上的序“$\prec$”是拟序，且满足同一性：若 $x\prec y,y\prec x$，有 $x=y$，则称序“$\prec$”为**半序**(**或偏序**).

特别地，设 X 上的序“$\prec$”是偏序，对 $\forall x,y\in X$，有关系 $x\prec y$ 或 $y\prec x$ 成立，则称序“$\prec$”为**全序**，称 X 为**有序集**.

定义 1.2　设 X 上的序“$\prec$”是拟序的，$Y\subset X$，若存在 $x_0\in X$，使得对 $\forall y\in Y$，有 $y\prec x_0$，则称 x_0 为集 Y 的**上界**.

定义 1.3　若存在 $y_0\in Y$，且 $y_0\prec y(y\in Y)$，都有 $y_0=y$，则称 y_0 为集 Y 的**极大元**.

类似地，可定义集 $Y\subset X$ 的**下界**和**极小元**.

关于极大元的存在定理，可以叙述如下.

Zorn 极大原理　设 X 为偏序集，若 X 的每个全序子集都有上界，则 X 存在极大元.

设$(X,\prec)$，$(Y,\prec)$为拟序集，在 $X\times Y$ 上定义序“$\prec$”：对(x,y)，$(x',y')\in X\times Y$，则$(x,y)\prec(x',y')$当且仅当 $x\prec x'$，$y\prec y'$. 显然，$(X\times Y,\prec)$也是拟序集.

例 1.1　设 M 是非空集合，$\mathscr{M}=\{A\mid A\subseteq M\}$. 在 $\mathscr{M}$ 内规定序关系“$\subseteq$”，则$(\mathscr{M},\subseteq)$是偏序集. 因为序关系“$\subseteq$”满足条件(i)和(ii). 若集合 M 至少包含两个元素，则$(\mathscr{M},\subseteq)$不是全序的. 因为 M 中的任何两个元素不一定存在包含关系.

定义 1.4　设 X 是有上界的偏序集，则称最小上界为 X 的**上确界**，记作 $\sup X$.

例 1.2 设 M 是非空集合，且 $\mathscr{M}=\{A|A\subseteq M\}$，则$(\mathscr{M},\subseteq)$为偏序集. 设 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{M}$ 的任意子集，则 $\mathscr{S}$ 有上界. 因为对 $\forall A\in\mathscr{S}$，有 $A\subseteq M$，且上确界 $\sup\mathscr{S}=\bigcup\limits_{A\in\mathscr{S}}A$. 显然，$(\mathscr{M},\subseteq)$中存在极大元 M.

定义 1.5 设 X 是偏序集，若 X 的任何有限子集 Y 都有 $\sup Y$ 和 $\inf Y$，则称$(X,\prec)$为**格**.

记 $x\vee y=\sup\{x,y\}$，$x\wedge y=\inf\{x,y\}$；$\vee\{y\,|\,y\in Y\}=\sup Y$，$\wedge\{y\,|\,y\in Y\}=\inf Y$.

由格定义知，$(\mathscr{M},\subseteq)$是格.

1.2 拓扑空间、Hausdorff 拓扑空间

1. 拓扑空间与拓扑基

定义 1.6 设 X 是非空集合，$\mathscr{X}=\{t|t\subseteq X\}$表示 X 的某些子集组成的集类. 若子集族 $\tau\subset\mathscr{X}$，且满足条件

(i) $X,\varnothing\in\tau$；

(ii) 若 τ 对任意并和有限交是封闭的，

则称 τ 为 X 的一个**拓扑**，称(X,τ)为**拓扑空间**.

在拓扑空间(X,τ)中，通常称 $A\in\tau$ 为拓扑空间的**开集**，余集 $A^c=X-A$ 为拓扑空间的**闭集**.

设 τ_1,τ_2 为 X 上的两个拓扑，$\tau_1\subset\tau_2$，则称拓扑 τ_2 **强于**拓扑 τ_1.

定义 1.7 设(X,τ)为拓扑空间，$A\subset X$.

(i) 若 $x\in A$，且存在 $V\in\tau(V\subset A)$使得 $x\in V$，则称 x 为 A 的**内点**. A 的内点的全体记为 A°，称 A° 为 A 的**内部**. 易证，$A^\circ\in\tau$. 称 A 为其内点的**邻域**，即若 $x\in A^\circ$，则 A 为 x 的邻域. 若 $B\subset A^\circ$，则称 A 为 B 的邻域.

(ii) 设 β 为 X 的开子集族，(X,τ)为拓扑空间. 若每个开集 $G\in\tau$ 是 β 内某些元的并，则称开子集族 β 为(X,τ)的**拓扑基**，拓扑空间(X,τ)的拓扑基的最小势称为拓扑空间的**权**.

我们将研究具有可数拓扑基的拓扑空间.

例 1.3 在 k 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^k$ 内以有理点$\left(\dfrac{m_1}{n_1},\dfrac{m_2}{n_2},\cdots,\dfrac{m_k}{n_k}\right)\in\mathbf{R}^k$ 为中心、以有理数 $r>0$ 为半径的球族 β，可得 $\mathbf{R}^k$ 的可数(标准)拓扑基，即 $\mathbf{R}^k$ 有可数权.

在拓扑空间(X,τ)中，X 的每一点都有确定的邻域系，拓扑空间中各个点的所有邻域系也可作为这个拓扑空间的拓扑基.

定义 1.8　设 β 是 $x\in X$ 的邻域族，若对 x 的每个邻域 U 都存在 β 内的某个邻域 V，使得 $V\subset U$，则称 β 为 x 的一个**邻域基**.

设 β 是拓扑空间 (X,τ) 中的开集族，若 β 内集合的有限交的全体构成 (X,τ) 的拓扑基，则称 β 为 (X,τ) 的**拓扑子基**.

同样地，设 β 是 $x\in X$ 的邻域族，若 β 内集合的有限交的全体构成 x 的邻域基，则称 β 为 x 的**邻域子基**.

定义 1.9　设 (X,τ) 为拓扑空间，若每个 $x\in X$ 都有可数邻域基，则称 X 为**第一可数空间**. 若 (X,τ) 有可数拓扑基，则称 X 为**第二可数空间**.

关于拓扑基有如下定理.

定理 1.1　若 $\beta\subset\mathscr{X}$, $\mathscr{X}=\{t\,|\,t\subseteq X\}$，且满足

(i) 若 $\bigcup\limits_{B\in\beta}B=X$，

(ii) 若 $\forall A,B\in\beta$，当 $x\in A\cap B$ 时，$\exists C\in\beta$，使得 $x\in C\subset A\cap B$，

则在 X 上存在唯一的以 β 为拓扑基的拓扑 τ.

当 β 满足(ii)时，上述结论也成立.

证　因 β 满足(i)、(ii)两条，令 $\tau=\{A\,|\,\exists\{B_\alpha\}\subset\beta$，使得 $A=\bigcup B_\alpha\}$，则 β 是 (X,τ) 的拓扑基.

若 β 满足(ii)，则 β 内集合的所有有限交满足(i)、(ii)，所以 β 是 (X,τ) 的拓扑子基.

定义 1.10　设 (X,τ) 是拓扑空间，$A\subset X$. 取 $x\in X$，若 x 的任意邻域 U_x 都有 $A\cap U_x\neq\varnothing$，则称 x 为 A 的**极限点**. 记 A 的极限点的全体为 $\overline{A}$，并称 $\overline{A}$ 为 A 的**闭包**. 记 $\partial A=\overline{A}-A^\circ$，称 ∂A 为 A 的**边界**.

定义 1.11　设 $B,A\subset X$，若 $A\subset\overline{B}$，则称 B 在 A 内**稠密**. 特别地，若 $A\subset X$，且 $\overline{A}=X$，则称 A 为 X 的**稠密集**，或称 A 在拓扑空间 (X,τ) 中处处稠密，即对 $\forall x\in X$，x 的任何邻域 U_x 都有 $A\cap U_x\neq\varnothing$.

定义 1.12　若拓扑空间 (X,τ) 具有可数的稠密子集，则拓扑空间 (X,τ) 是可分的.

不难证明，$\overline{A}=[(A^c)^\circ]^c$，$A^\circ=[\overline{A^c}]^c$，$\overline{\overline{A}}=\overline{A}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. A 是开集当且仅当 $A=A^\circ$. A 是闭集当且仅当 $A=\overline{A}$.

定义 1.13　设 $A\subset X$，若 $(\overline{A})^\circ=\varnothing$，则 A 在 X 中无处稠密.

定义 1.14　若 $A\subset X$，A 是可数个在 X 中无处稠密子集的并，则称 A 为 X 的**第一纲集**. 若 $(\overline{A})^\circ\neq\varnothing$，则称 A 为 X 的**第二纲集**.

定义 1.15　若 $x\in\overline{A-\{x\}}=\{$对 A 的任意邻域 U 都有 $U\cap\{A-\{x\}\}\neq\varnothing\}$，则称 x 为 A 的**聚点**，记 A 的聚点的全体为 A^d，称 $A-A^d$ 内的点为 A 的**孤立点**.

显然，$X^d=\varnothing$当且仅当$\tau=\mathscr{X}$. 事实上，若$x\notin\overline{A-\{x\}}$，则$x$有一个邻域$U\in\tau$使得$U\cap\{A-\{x\}\}=\varnothing$，有$U=\{x\}$，则$\tau=\mathscr{X}$.

特别地，若$X^d=\varnothing$，则(X,τ)为离散空间X中的拓扑空间.

定义 1.16 设(X,τ)是拓扑空间，$Y\subset X$，利用X的拓扑定义子集Y的拓扑. 设$Y\neq\varnothing$，$Y\subset X$，令$\tau_Y=\{Y\cap V\mid V\in\tau\}$，则称$\tau_Y$为$Y$的**诱导拓扑**(或相对拓扑)，称拓扑空间$(Y,\tau_Y)$为$(X,\tau)$的**拓扑子空间**.

定义 1.17 设(X,τ)是拓扑空间，对X内的任意两个不同点x、y，若存在x的邻域U_x和y的邻域U_y使得$U_x\cap U_y=\varnothing$，则称(X,τ)为 Hausdorff **空间**(或T_2**空间**).

注 拓扑空间(X,τ)并不一定是 Hausdorff 空间. 如X是非空集，记$\tau=\{X,\varnothing\}$，则(X,τ)是拓扑空间. 这种拓扑$\tau=\{X,\varnothing\}$是最弱拓扑，它不是T_2空间.

2. 关于拓扑空间的直积

设(X_1,τ_1)，(X_2,τ_2)为两拓扑空间，记$\tau_1\times\tau_2=\{G_1\times G_2\mid G_i\in\tau_i,i=1,2\}$，则$(X_1\times X_2,\tau_1\times\tau_2)$也是一个拓扑空间，称为拓扑空间$(X_1,\tau_1)$与$(X_2,\tau_2)$的**直积**. 注意$\tau_1\times\tau_2$组成拓扑空间$(X_1\times X_2,\tau_1\times\tau_2)$的拓扑基，而非拓扑空间直积的所有开集.

1.3 拓扑空间的紧性和连通性

1. 紧集的概念

定义 1.18 设(X,τ)为拓扑空间，$A\subset X$，$\{A_\alpha\}$是一集族. 若集合A内任意一点x，至少存在集$A_\alpha\in\{A_\alpha\}$以x为内点，则称集族$\{A_\alpha\}$为A的一个**覆盖**. 特别地，若$\{A_\alpha\}$是拓扑空间(X,τ)中的开集族，则称$\{A_\alpha\}$是集A的**开覆盖**.

定义 1.19 若集合A的每个开覆盖$\{G_\alpha\}$都存在覆盖A的有限子族(或A的有限子覆盖)，则称A为**紧集**(或称A具有 Borel 性质).

若X本身是紧集，则称(X,τ)是紧拓扑空间.

由定义可知，设(X,τ)是拓扑空间，则$A\subset X$是紧集当且仅当将A视为具有(X,τ)的诱导拓扑所产生的拓扑空间是紧的.

引理 1.1(紧集的闭性) Hausdorff 空间X中的紧集A一定是闭的.

证 设(X,τ)是 Hausdorff 空间，$A\subset X$是紧集，$x\notin A$和$\forall y\in A$，则存在x,y的邻域$U_x,U_y\in\tau$，使得$U_x\cap U_y=\varnothing$，于是$\{U_y\}$是A的开覆盖. 由A是紧集知，存在有限子覆盖$U_{y_i}(i=1,2,\cdots,k)$，使得$A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k}U_{y_i}$. 又由$U_x\cap U_y=\varnothing$知$U_x\cap U_{y_i}=\varnothing(i=1,2,\cdots,k)$，则

$$A\cap U_x\subset\left(\bigcup_{i=1}^{k}U_{y_i}\right)\cap U_x=\bigcup_{i=1}^{k}(U_{y_i}\cap U_x)=\varnothing,$$

得 x 是 A^c 的内点,注意到 x 的任意性,所以 A^c 是开集,故 A 是闭集.

引理 1.2　设 A 是拓扑空间(X,τ)中的紧集,则 A 的每个闭子集 M 也是紧集.

证　由 $M\subset A$ 是闭子集得 M^c 是开集.设$\{G\}$是 M 的任一开覆盖,则$\{G\}\cup M^c$ 是 A 的一个开覆盖.由 A 是紧集知,在开覆盖$\{G\}\cup M^c$ 中存在 A 的有限子覆盖.在这个子覆盖中,将 M^c 去掉,得 M 的一个有限子覆盖,因而 M 也是紧集.

引理 1.3(紧集套原理)　设 $A_i(i=1,2,\cdots)$是 Hausdorff 拓扑空间(X,τ)中的紧集序列,若 $A_1\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$是非空紧集套,则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\neq\varnothing$.

证　记 $G_i=A_1-A_i(i=1,2,\cdots)$.由引理 1.1 知 A_i 是闭集,则 G_i 是 A_1 内的开集,且 $G_1\subset\cdots\subset G_i\subset\cdots$.依对偶原则,假设 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\varnothing$,则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_1-A_i)=A_1-\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=A_1,$$

即$\{G_i\}$是 A_1 的开覆盖,所以存在 A_1 的有限子覆盖 $G_{i_k}(k=1,2,\cdots,m)$.又依 G_i 是单调增加的,得 G_{i_m} 覆盖 A_1,则 $A_1-G_{i_m}=\varnothing$.这与条件 $A_{i_m}=A_1-G_{i_m}\neq\varnothing$矛盾.故 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\neq\varnothing$.

定义 1.20　设 A 是拓扑空间(X,τ)的子集,若 $\overline{A}$ 是紧集,则称 A 为**相对紧集**.若 X 内每一点都有一个相对紧的邻域,则称 X 为**相对(或局部)紧空间**.

定义 1.21　设 X 是拓扑空间,若对任意闭集 $F\subset X$,每个 $x\in X-F=F^c$(即 $x\notin F$)都存在不交的开集 $G_1,G_2\subset X$,使得 $x\in G_1,F\subset G_2$,则称 X 为**正则拓扑空间**.

若对任意闭集 $F_1,F_2\subset X$,且 $F_1\cap F_2=\varnothing$,都存在不交的开集 G_1,G_2,使得 $F_1\subset G_1,F_2\subset G_2$,则称 X 为**正规拓扑空间**.

显然,正规空间是正则的,正规空间一定是 Hausdorff 空间,紧的 Hausdorff 空间一定是正规的.

2. 集的连通性

定义 1.22　设(X,τ)是拓扑空间,若 X 不是两个不交的非空开集的并,则称(X,τ)为**连通拓扑空间**.

可见,在连通拓扑空间中,只有空集和全空间才是既开又闭的集(称为开闭集).因此,可将定义 1.22 改述为:如果拓扑空间中除 $X,\varnothing$ 以外没有别的开闭集,则称(X,τ)为连通的拓扑空间.

设 A 是 X 的子集,若 A 作为(X,τ)的拓扑子空间是连通的,则称 A 为**连通集**.

即 A 不可能表示为两个不交的 A 的相对开集的并.

若集合 A 不是连通的,则称 A 的每个最大连通子集为它的分支. 显然,集合的每个点都确定唯一的包含它的分支,而集合本身,则是它的所有分支的并.

例如,设 $A=\{x|x\neq0,x\in\mathbf{R}\}$,则 A 是不连通的. 因 $A_+=\{x|x>0,x\in A\}$,$A_-=\{x|x<0,x\in A\}$是 A 中两个开闭集.

引理 1.4(关于实数域 $\mathbf{R}$ 的连通子集) 非空集合 $A\subset\mathbf{R}$ 为连通的充要条件是对任意 $x,z\in A$,由 $x<y<z$ 有 $y\in A$. 可见,在 $\mathbf{R}$ 内只有区间(有限或无限)是连通的.

证 必要性 设 A 是 $\mathbf{R}$ 的连通子集,在 a,b,c 中 $a,b\in A$ 而 $c\notin A$,但 $a<c<b$. 记 $M=\{x|x<c,x\in A\}$,$N=\{x|x>c,x\in A\}$,则 $a\in M,b\in N$,且 $A=M\cup N$,$M\cap N=\varnothing$,M,N 都是开集,故 A 不连通. 矛盾,从而必要性成立.

充分性 设 A 是 $\mathbf{R}$ 中具有性质:任一点对 a,b 及区间(a,b)中一切点都属于 A 的子空间,证 A 是连通的.

设 M 是A 的开闭子集,且 $M\neq\varnothing$,$N=A-M\neq\varnothing$. 设 $a\in M,b\in N$,不妨令 $a<b$(因 $M\cap N=\varnothing$有 $a\neq b$). 考察点 $c_1=\sup(M\cap[a,b])$. 因 $a\leqslant c_1\leqslant b$,得 $c_1\in A$. 由 M 在 A 内的闭性知 $c_1\in M$. 类似地,$c_2=\inf(N\cap[c_1,b])$. 由 N 在 A 内的闭性知 $c_2\in N$. 所以 $c_1\in M,c_2\in N$ 和 $M\cap N=\varnothing$,则 $a\leqslant c_1<c_2\leqslant b$. 但从 c_1,c_2 的定义以及 $A=M\cup N$ 可推得(c_1,c_2)内任意点都不属于 A. 这与 A 具有的性质矛盾,可见集合 M 是不存在的,从而得 A 是连通的.

1.4 拓扑空间的网和收敛性

定义 1.23 设$(\Lambda,<)$是偏序集,若对任意给定的 $\alpha,\beta\in\Lambda$ 存在 $\gamma\in\Lambda$ 使得 $\alpha\leqslant\gamma$,$\beta\leqslant\gamma$,则称$(\Lambda,<)$为一个**有向集**.

若(X,τ)是拓扑空间,称$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subset X$ 为 X 中的**网**.

当 Λ 是自然数集时,网即为通常序列. 因而网可称为广义序列.

设$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subset X$ 是 X 的网,$x\in X$. 若对 x 的每个邻域 U_x,总存在 $\beta\in\Lambda$,这里 β 一般是随 U_x 的不同而变化的,使得对一切的 $\alpha\geqslant\beta$ 都有 $x_\alpha\in U_x$,则称网$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$收敛于 x,记 $x_\alpha\to x$. 对一般拓扑空间而言,这种 x 并非唯一. 但由定义可知,若(X,τ)是 Hausdorff 空间(T_2 空间),则这种 x 是唯一的,记$\lim\limits_{\alpha}x_\alpha=x$.

引理 1.5 (X,τ)为 T_2 空间的充要条件是 X 中任意网至多收敛于一点.

第 2 章　度 量 空 间

度量空间(也称为距离空间),既是拓扑空间的特例,又是欧几里得空间的推广,在泛函分析中的地位和作用相当于实数域在数学分析中的地位和作用.因此,学习并掌握度量空间及其基本性质,对后续内容的学习是非常必要的.

2.1　度量空间与例

距离,在数学分析中起着根本性的作用.现将这个概念抽象出来移植到一般的集合上去,就可获得度量和度量空间.

1. 度量与度量空间

定义 2.1　设 X 是一非空集合,若任意两元素 $x,y\in X$,指定函数 $d:X\times X\to\mathbf{R}$,且满足

(i) **非负性**　对 $\forall x,y\in X$,$d(x,y)\geqslant 0$. $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(ii) **对称性**　$d(x,y)=d(y,x)$;

(iii) **三角不等式**　对 $\forall x,y,z\in X$,有 $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$,

则称 X 为**度量空间**,称 $d=d(\cdot,\cdot)$ 为 X 上的一个**度量**.

引理 2.1　设 (X,d) 为度量空间,则对 $\forall x,y,z\in X$,有 $|d(x,z)-d(y,z)|\leqslant d(x,y)$.

证　由三角形不等式知 $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$,则 $d(x,z)-d(y,z)\leqslant d(x,y)$.由 x,y 的任意性交换 x,y 的位置得 $d(y,z)-d(x,z)\leqslant d(x,y)=d(y,x)$,故

$$|d(x,z)-d(y,z)|\leqslant d(x,y).$$

例 2.1　对 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$,令 $d(x_1,x_2)=|x_1-x_2|$,则 $(\mathbf{R},d)$ 为度量空间.令 $d=d(x_1,x_2)=\begin{cases}0, & x_1=x_2,\\ 1, & x_1\neq x_2,\end{cases}$ 则 $(\mathbf{R},d)$ 也是度量空间,称为**平凡度量空间**.

例 2.2　设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上非负函数,且 $f(x)=0$ 当且仅当 $x=0$.若 $f(x)$ 是严格上凸的,令 $d(x_1,x_2)=f(|x_1-x_2|)$ $(x_1,x_2\in[0,+\infty))$,则 $(\mathbf{R},d)$ 也是度量空间.事实上,只需检验条件(iii).注意到 f 的严格上凸性,对 $0<a<b$,有

$$f(a)=f\left(\left(1-\frac{a}{b}\right)\times 0+b\times\frac{a}{b}\right)>\left(1-\frac{a}{b}\right)f(0)+\frac{a}{b}f(b)=\frac{a}{b}f(b),$$

则 $\dfrac{f(a)}{a}>\dfrac{f(b)}{b}$,即 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内严格递减,于是

$$f(a+b)=\frac{a}{a+b}f(a+b)+\frac{b}{b+a}f(a+b)<\frac{a}{a}f(a)+\frac{b}{b}f(b)=f(a)+f(b).$$

又由 f 在 $(0,+\infty)$ 内是严格上凸的非负函数，且 $f(0)=0$，有 f 在 $(0,+\infty)$ 内是严格单调增加的（因 $x=0$ 是 $f(|x|)$ 的极小点），则对 $\forall\, x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned}d(x_1,x_3)&=f(|x_1-x_3|)=f(|x_1-x_2+x_2-x_3|)\leqslant f(|x_1-x_2|+|x_2-x_3|)\\&\leqslant f(|x_1-x_2|)+f(|x_2-x_3|)=d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3).\end{aligned}$$

特别地，取 $f(x)=\sqrt{x}\,(x>0)$，有度量 $d(x_1,x_2)=\sqrt{|x_1-x_2|}$. 又取 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ $(x>0)$，有度量 $d(x_1,x_2)=\dfrac{|x_1-x_2|}{1+|x_1-x_2|}$.

例 2.3 在空间 $\mathbf{R}^n$ 中，对 $\boldsymbol{x}_1=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_n^{(1)})$，$\boldsymbol{x}_2=(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\cdots,x_n^{(2)})$，引进距离 $d(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^{(1)}-x_i^{(2)})^2\right]^{\frac{1}{2}}$，用 Minkowski 不等式检验条件(iii)成立，得 $(\mathbf{R}^n,d)$ 是度量空间. 又令 $d(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\begin{cases}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\leqslant p<+\infty,\\ \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}|, & p=+\infty,\end{cases}$ 则 $(\mathbf{R}^n,d)$ 也是度量空间.

例 2.4 对 $\forall\, f,g\in C[a,b]$，令 $d(f,g)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|$，则 $(C[a,b],d)$ 是度量空间. 对 $f,g\in C^k[a,b]$，令 $d(f,g)=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant k}\{\max\limits_{x\in[a,b]}|f^{(i)}(x)-g^{(i)}(x)|\}$，则 $(C^k[a,b],d)$ 是度量空间.

例 2.5 在空间 $L_p[a,b]$ 中，对 $\forall\, f,g\in L_p[a,b]\,(1\leqslant p<+\infty)$，令

$$d(f,g)=\begin{cases}\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\leqslant p<+\infty,\\ \operatorname{vari\,sup}|f(x)-g(x)|, & p=+\infty,\end{cases}$$

则 $(L_p[a,b],d)$ 是度量空间，这里 vari sup 表示本性最大模.

2. 拟度量空间

定义 2.2 设 X 是一非空集合，若对任意的元素 $x,y\in X$，都定义实值函数 $d(x,y)$，且满足

(1) 对 $\forall\, x,y\in X$，有 $d(x,y)=d(y,x)\geqslant 0$；

(2) $d(x,x)=0\ (x\in X)$；

(3) 对 $\forall\, x,y,z\in X$，有 $d(x,y)\leqslant d(z,x)+d(z,y)$，

则称 (X,d) 为**拟度量空间**.

换言之，在拟度量空间 (X,d) 中，若 $x,y\in X$ 有 $d(x,y)=0$，但不能保证 $x=y$. 众所周知，只要将适合 $d(x,y)=0$ 的 x,y 看做等价类，则在等价类意义下，拟度量空

间可视为度量空间.

3. 拓扑空间的度量化

记 $K(x_0,r)=\{x\mid d(x_0,x)<r,x\in X\}$,称 $K(x_0,r)$为度量空间(X,d)中以 x_0 为中心、r 为半径的开球;相应地,$\overline{K}(x_0,r)=\{x\mid d(x_0,x)\leqslant r,x\in X\}$为闭球.

记 $\tau=\{K(x_0,r)\mid x_0\in X,r>0\}$,以 τ 作为度量空间 X 的邻域基,则(X,τ)是拓扑空间.

显然,这种拓扑化的度量空间是正规的,且适合第一可数公理.

若拓扑空间 X 可用上述方法定义等价的邻域基,则称 X 为**可度量化的**.

不难证明,度量空间 X 是可分的充要条件是 X 满足第二可数公理. Urysohn 证得,满足第二可数公理的正规拓扑空间都是可度量化的.

2.2 完备度量空间

实数域具有这样的性质:实数域中的任一 Cauchy 列收敛于某一实数,并称实数域具有完备性. 实数的完备性在数学分析中十分有用. 同样地,完备度量空间也是十分重要的.

1. 完备度量空间

定义 2.3 设(X,d)是度量空间,序列$\{x_n\}\subset X$,$x_0\in X$.

(i) 若 $d(x_n,x_0)\to 0(n\to+\infty)$,则称在度量 d 下序列$\{x_n\}$**收敛于** x_0;

(ii) 若 $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_m,x_n)=0$,则称$\{x_n\}$为 X 的 **Cauchy 列**;

(iii) 若 X 中每个 Cauchy 列$\{x_n\}$都收敛,则称 X 为**完备的度量空间**.

引理 2.2 设度量空间(X,d)中的序列$\{x_n\}$收敛于 $x_0\in X$,则$\{x_n\}$的任何子序列$\{x_{n_k}\}$也收敛于 x_0.

引理 2.3 度量空间(X,d)中收敛序列的极限是唯一的.

引理 2.4 设度量空间 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 $x_0\in X$,则数列 $d(x_n,0)$是有界的.

事实上,由 $d(x_n,x_0)\to 0(n\to+\infty)$知$\{d(x_n,x_0)\}$是有界数列,即存在正数 M_0 使得 $d(x_n,x_0)\leqslant M_0$,则对任意的自然数 n,由三角形不等式导出

$$d(x_n,0)\leqslant d(x_n,x_0)+d(x_0,0)<M_0+d(x_0,0).$$

记 $M=M_0+d(x_0,0)$,有 $d(x_n,0)\leqslant M$.

2. 有界集与完全有界集

定义 2.4 设(X,d)是度量空间,$A\subset X$. 若存在开球 $K(a,r)$使得 $A\subset K(a,r)$,则称 A 为**有界集**,其中 $a\in X$ 为某个确定点.

若 A 为有界集,称 $\operatorname{diam}A=\sup\limits_{x,y\in A} d(x,y)$为集合 A 的**直径**.

设 $A\subset X$，若对每个 $\delta>0$，A 都能被有限个直径小于 δ 的开球覆盖，则称 A 为**完全有界**的.

显然，完全有界集必是有界集.

引理 2.5 设 (X,d) 是度量空间，$A\subset X$.

(i) 若 A 是完全有界的，则 A 是可分的；

(ii) 若 A 是紧的，则 A 是完全有界的；

(iii) 若 (X,d) 是完备度量空间，且 A 是完全有界，则 $\overline{A}$ 是紧的，即 A 是相对紧的；

(iv) 若 (X,d) 是紧度量空间，则 X 是完备的.

3. 闭球套定理

类似于闭区间套原理，完备度量空间中有 Cantor 定理.

定理 2.1(Cantor) 设 (X,d) 是完备度量空间，$\{\overline{K}(a_n,r_n)\}$ 是 X 的闭球列，且满足

(i) $\overline{K}(a_n,r_n)\supset\overline{K}(a_{n+1},r_{n+1})\quad(n=1,2,\cdots)$；

(ii) $r_n\to 0\quad(n\to+\infty)$，

则存在唯一的 $a\in X$，使得 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{K}(a_n,r_n)=\{a\}$.

证 考察这些球心组成的序列 $\{a_n\}$. 由条件(i)知对任意自然数 p 有 $a_{n+p}\in\overline{K}(a_{n+p},r_{n+p})\subset\overline{K}(a_n,r_n)$，则 $d(a_{n+p},a_n)<r_n$. 由条件(ii)知 $\lim\limits_{n\to\infty}d(a_{n+p},a_n)=0(p=1,2,\cdots)$，即 $\{a_n\}$ 为 X 的 Cauchy 列. 因 X 是完备度量空间，所以 $\{a_n\}$ 收敛于某点 $a\in X$.

对每个 n，序列 $\{a_{n+p}\}\subset\overline{K}(a_n,r_n)(p=1,2,\cdots)$，即对于每个 n 和任意 p 有 $a_{n+p}\in\overline{K}(a_n,r_n)$. 令 $p\to\infty$，并注意到 $\overline{K}(a_n,r_n)$ 是闭的，则

$$a\in\overline{K}(a_n,r_n)(n=1,2,\cdots),\quad 即\quad a\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{K}(a_n,r_n).$$

唯一性是明显的.

定理 2.2(定理 2.1 的推广) 设 X 是完备度量空间，$\{F_n\}$ 是 X 中闭集序列，且满足

(i) $F_n\supset F_{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$；

(ii) F_n 的直径 $\mathrm{diam}F_n\to 0\quad(n\to\infty)$，

则存在唯一的 $a\in X$，使得 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n=\{a\}$.

众所周知，在实分析中 Cantor 引理可作为实数完备性的定义. 类似地，对于度量空间嵌球原理也成立.

定理 2.3 设 $\{\overline{K}_n\}$ 是度量空间 (X,d) 中的闭球序列，且存在非空的交，满足

(i) $\overline{K}_n \supset \overline{K}_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$;

(ii) $\mathrm{diam}\overline{K}_n \to 0$ $(n\to\infty)$,

则 X 是完备的.

证 设$\{x_n\}$是 X 的 Cauchy 列,则对 $\forall k$,存在 n_k,使得对任意自然数 p,有 $d(x_{n_{k+p}},x_{n_k})<\dfrac{1}{2^k}$ $(k=1,2,\cdots)$. 记 $\overline{K}_k=\overline{K}\left(x_{n_k},\dfrac{1}{2^{k-1}}\right)$,于是 $\overline{K}_{k+1}\subset\overline{K}_k$. 事实上,由 $x\in\overline{K}_{k+1}$ 得

$$d(x,x_{x_k})\leqslant d(x,x_{n_{k+1}})+d(x_{n_{k+1}},x_{n_k})\leqslant\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}},$$

即 $x\in\overline{K}_k$. 因 $\mathrm{diam}\overline{K}_n=\dfrac{1}{2^{k-1}}\to 0$ $(k\to+\infty)$,由条件得,存在 $x_0\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{K}_k$.

证 $d(x_n,x_0)\to 0$. 事实上,由上面的选取方法可知 $x_{n_k},x_0\in\overline{K}_k$,即 $d(x_{n_k},x_0)\leqslant\dfrac{1}{2^{k-1}}\to 0$ $(k\to+\infty)$. 由三角不等式 $d(x_n,x_0)\leqslant d(x_n,x_{n_k})+d(x_{n_k},x_0)$,得

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_0)=0,\quad 即\quad \lim_{n\to\infty}x_n=x_0\in X,$$

故 X 是完备的.

定理 2.4(Baire) 若 X 是完备的度量空间,则 X 为第二纲集.

证 假设 X 不是第二纲集,是第一纲集,则 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$,其中 A_n 是 X 中无处稠密集. 任取一点 $a\in X$,作闭球 $\overline{K}(a,1)$. 因 A_1 是无处稠密集,所以存在闭球 $\overline{K}(a_1,r_1)\subset\overline{K}(a,1)$,使得 $A_1\cap\overline{K}(a_1,r_1)=\varnothing\left(r_1<\dfrac{1}{2}\right)$. 又 A_2 也是无处稠密集,所以在 $\overline{K}(a_1,r_1)$上也存在闭球 $\overline{K}(a_2,r_2)\subset\overline{K}(a_1,r_1)$,使得 $A_2\cap\overline{K}(a_2,r_2)=\varnothing\left(r_2<\dfrac{1}{2^2}\right)$. 如此下去,得到一闭球序列$\{\overline{K}(a_n,r_n)\}\left(r_n<\dfrac{1}{2^n}\right)$,使得 $\overline{K}(a_n,r_n)\supset\overline{K}(a_{n+1},r_{n+1})$,且 $r_n\to 0$ $(n\to+\infty)$. 由定理 2.1 知,存在 $a_0\in X$ 使得 $a_0=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{K}(a_n,r_n)$,即对每个 n 有 $a_0\in\overline{K}(a_n,r_n)$. 但由 $A_n\cap\overline{K}(a_n,r_n)=\varnothing(n=1,2,\cdots)$知 $a_0\notin A_n(n=1,2,\cdots)$,得 $a_0\notin\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=X$. 矛盾,从而 X 是第二纲集.

2.3 度量空间的列紧性

实数域除了具有完备性外,还具有性质:任一有界数列都存在收敛的子列. 在一般度量空间中这一性质并不一定能够保持. 这就是下面将要讨论的列紧性问题.