Gaodeng Shuxue

◇ Tongbu Fudao ◇

高等数学

同步辅导

上册

主　编　杨淑娥　李苏北

副主编　于燕燕　曹　玲

中国矿业大学出版社

China University of Mining and Technology Press

高等数学同步辅导

上册

主　编　杨淑娥　李苏北
副主编　于燕燕　曹　玲

中国矿业大学出版社

内容提要

本书是学习高等数学的辅助教材，内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等十二章内容．其中每章包括基本要求、知识结构、内容提要、释疑解难、典型例题、习题选解、自测试题、自测试题答案八部分．本书按一般高等数学内容的编排顺序，与教学要求保持同步．编写本书的目的是使学生在学习主教材的基础上，进一步开阔眼界、拓展思路、多实践、多练习，以提高分析问题和解决问题的能力．本书可以作为工科和经济管理类学生学习高等数学的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导．上册/杨淑娥，李苏北主编．—徐州：中国矿业大学出版社，2009．9

ISBN 978-7-5646-0468-4

Ⅰ．高… Ⅱ．①杨…②李… Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 156406 号

书　　名　高等数学同步辅导·上册

主　　编　杨淑娥　李苏北

责任编辑　周　红　褚建萍

出版发行　中国矿业大学出版社(江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编 221008)

营销热线　(0516)83885307　83884995

网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**：cumtpvip@cumtp.com

排　　版　中国矿业大学出版社排版中心

印　　刷　徐州中矿大印发科技有限公司

经　　销　新华书店

开　　本　787×1092 1/16　**本册印张** 16.75　**本册字数** 418 千字

版次印次　2009 年 9 月第 1 版　2009 年 9 月第 1 次印刷

总 定 价　45.00 元(上、下册)

前　言

高等数学是大学工科、经济管理等各专业的重要基础课，该课程为许多专业的后继课程提供必需的基础知识.在全国硕士研究生考试中高等数学被指定为全国统一考试科目.高等数学一般安排在大学一年级学习，因其内容多，学习难度大，对于刚刚进入大学学习的一年级新生来说，在学习中往往会遇到很多的困难.为帮助学生学好该课程，我们根据多年的教学经验编写了这本高等数学同步辅导书，其目的是使学生加深对高等数学教材内容的理解，扩大知识面，同时更加清晰、准确地把握正确的解题思路和方法，克服在习题的求解过程中遇到的困难.

本辅导书按照同济大学数学系编写的《高等数学》(第六版)的章节顺序，设为十二章，每章均设计了基本要求、知识结构、内容提要、释疑解难、典型例题、习题选解、自测试题和自测题答案八个板块.

① 基本要求——主要根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会关于非数学类课程教学基本要求编写.

② 知识结构——用框图的形式列出，指出了本章的重要知识及各知识点的联系.

③ 内容提要——列出了本章的基本概念、重要定理、重要公式和主要方法，突出了本章的核心知识.

④ 释疑解难——选择了学生在学习本章时常常遇到的一些带有共性的疑难问题，给以分析、解答，以帮助学生释疑解难.

⑤ 典型例题——精选了大量的例题和历年研究生入学考试中涉及本章内容的题目，这些例题涉及内容广，有代表性，类型多，技巧性强.对所选题目进行归纳分类，给出详尽的解析，同时对每一类型的例题加以评注，对解题思路、解题方法进行详细分析，总结解题规律.通过这些评注，学生可以深刻领会教材中的基本概念的准确含义，开拓解题思路，掌握解题方法，避免在容易产生错误的环节上出现问题，从而提高分析问题能力，掌握基本概念和理论，培养良好的数学思维.

⑥ 习题选解——选择了同济大学编写的《高等数学》(第六版)教材中有代表性的或有些难度的习题进行了解答，供学生在解题时参考.希望通过这些题解的启发，让学生独立完成剩余部分习题，提高解题能力.

⑦ 自测试题——这部分是为学生自我测试提供的练习题，旨在进一步强化解题训练，学生可以通过自测题的练习检查自己对本章内容的掌握程度，培养综合能力，巩固和提高学习效果.希望学生们在做自测题时，要先参考本书，并领会相关评注中的点评，在充分思考的基础上，独立完成解题.

⑧ 自测试题答案——这部分除了给出自测题的答案外，还对部分有些难度的题目做了

提示.

全书共分上、下两册，由李苏北、王峰、杨淑娥负责策划，分别由于燕燕（编写第一、二、三章）、杨淑娥（编写第四、五、六章）、曹玲（编写第七章）、焦琳（编写第九章）、张红雷（编写第八、十、十一章）、姜英姿（编写第十二章）分工编写，上册由杨淑娥负责统稿，下册由张红雷负责统稿，李苏北、王峰分别对上、下册进行了主审.

编者虽然在本书的编写过程中做出了很大的努力，但是由于水平有限，难免有错误与不妥之处，恳请读者指正.

编　者

2009年5月

目　录

第一章　函数与极限

一、基本要求

（1）理解函数的概念和函数奇偶性、单调性、周期性和有界性的概念，会求函数的定义域和函数值，理解复合函数的概念，了解反函数的概念，会建立简单实际问题中的函数关系式；

（2）理解极限的概念，了解极限的 $\varepsilon—N$、$\varepsilon—\delta$ 定义的含义，了解函数左、右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系；

（3）掌握极限四则运算法则；

（4）了解两个极限存在准则（夹逼准则和单调有界准则），会用两个重要极限求极限；

（5）了解无穷小、无穷大，以及无穷小的阶的概念，会用等价无穷小求极限；

（6）理解函数在一点连续的概念，了解间断点的概念，并会判别间断点的类型；

（7）了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质（介值定理和最大、最小值定理），会用介值定理讨论方程根的存在性.

二、知识结构

- 函数与极限
  - 函数
    - 函数概念
    - 函数性质
    - 反函数与复合函数
    - 分段函数
    - 初等函数
  - 极限
    - 定义
      - 数列的极限
      - 函数的极限
    - 无穷小与无穷大
      - 无穷小与无穷大的概念
      - 无穷小的性质
      - 无穷小的比较
    - 极限运算法则
    - 极限存在准则
      - 单调有界准则
      - 夹逼准则
    - 两个重要极限
  - 连续
    - 连续函数的概念
    - 间断点及其分类
    - 初等函数的连续性
    - 连续函数的性质

三、内容提要

（一）函数概念

1. 函数的性质(略)

(1) 函数的有界性;(2) 函数的单调性;(3) 函数的奇偶性;(4) 函数的周期性.

2. 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数五种函数统称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

（二）极限

1. 数列的极限

(1) $\varepsilon—N$ 定义

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |x_n - a| < \varepsilon.$$

(2) 收敛数列的性质

① 极限的唯一性;② 收敛数列的有界性;③ 收敛数列的保号性;④ 收敛数列的子数列的性质.

2. 函数的极限

(1) $\varepsilon—\delta$ 定义

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

(2) $\varepsilon—X$ 定义

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists X>0$,当 $|x|>X$ 时,总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = A = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

(3) 函数极限的性质

① 函数极限的唯一性;② 函数极限的局部有界性;③ 函数极限的局部保号性;④ 函数极限与数列极限的关系(海涅定理).

3. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小定义

如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的极限为零,那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小.

定理 1(无穷小与函数极限的关系) $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$,其中 $\lim\alpha=0$.

(2) 无穷大定义

如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,$|f(x)|$ 无限增大,则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大.

(3) 无穷小和无穷大的关系

定理 2 在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小;反之,如

果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

(4) 无穷小的性质

① 两个无穷小的代数和仍是无穷小；

② 有界函数与无穷小的乘积是无穷小，特别常数与无穷小的乘积是无穷小；

③ 有限个无穷小的乘积是无穷小.

(5) 无穷小的比较

定义　设 α,β 是同一个自变量的变化过程中的无穷小，且 $\alpha\neq 0$，$\lim \frac{\beta}{\alpha}$ 也是在这个变化过程中的极限：

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=\infty$，就说 β 是比 α 低阶的无穷小；

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，就说 β 与 α 是同阶无穷小；

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0, k>0$，就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小；

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=1$，就说 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

定理 1　α,β 为等价无穷小的充分必要条件是 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

定理 2　若 $\alpha\sim\alpha'$、$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

4. 极限运算法则

定理 1　两个函数存在极限，则它们和(差)、积、商(分母极限不为零时)的极限也存在，且分别等于它们极限的和(差)、积、商. 特别的，对于数列也有类似的四则运算法则(略).

定理 2　如果 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$，而 $\lim\varphi(x)=a$，$\lim\psi(x)=b$，那么 $a\geqslant b$.

定理 3　复合函数的极限运算法则(即极限的变量代换法则).

5. 极限存在的准则

准则 Ⅰ　夹逼准则.

准则 Ⅱ　单调有界数列必有极限.

6. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

(三) 连续

1. 函数连续的概念

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的定义：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$)，称函数 $f(x)$ 在点 x_0 左(右)连续.

2. 函数的间断点

定义　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的一个间断点.

3. 间断点的分类

若点 x_0 为 $f(x)$ 的一个间断点，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点，否则称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点. 特别的，当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 时，则称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点. $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，称 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

4. 连续函数的运算与初等函数的连续性

定理 1 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在点 x_0 连续，则它们的和(差)、积、商($g(x_0)\neq0$)在点 x_0 也连续.

定理 2 单调连续函数的反函数也单调且连续.

定理 3 连续函数的复合函数在其定义区间内也连续.

注意 复合函数的连续性可以保证极限号"lim"与函数符号"f"交换次序：

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=f[\lim_{x\to x_0}g(x)]=f[g(x_0)]$$

一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

5. 闭区间上连续函数的性质

① 有界性与最大值最小值定理；② 零点定理；③ 介值定理.

四、释疑解难

问题 1 单调函数必有单值反函数，不单调函数是不是一定没有单值反函数？

答：不一定. 如函数 $f(x)=\begin{cases}-x & -1\leqslant x\leqslant0\\ x+1 & 0<x\leqslant1\end{cases}$，在区间 $[-1,1]$ 上不单调，但它有单值反函数：$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x & 0\leqslant x\leqslant1\\ x-1 & 1<x\leqslant2\end{cases}$.

一个函数是否有单值反函数，取决于对应法则 f 在定义域 D_f 与值域 R_f 之间是否构成一一对应的关系，如果是一一对应的，那么函数必有单值反函数，否则就没有单值反函数. 函数在定义区间上单调只是一种特殊的一一对应关系，因此，单调只是存在单值反函数的充分条件，而不是必要条件.

问题 2 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 定义中的 $N=N(\varepsilon)$ 是否是 ε 的函数？

答：不是. 这里 $N=N(\varepsilon)$ 仅表示 N 与 ε 有关，并不表示 N 是 ε 的函数. 因为由定义知对于给定的 ε，如果存在一个满足要求的 N，那么就有无数多个满足要求的 N(即所有比 N 大的自然数均可作新的 N)，不存在 N 与 ε 之间的一一对应规律. 所以数列极限定义中的 $N=N(\varepsilon)$ 不是 ε 的函数.

问题 3 (1) 怎样证明数列发散？(2) 怎样证明数列不是无穷大量？

答：(1) 证明数列发散常用的方法是：找出数列 $\{x_n\}$ 的一个发散的子数列或者找出数列 $\{x_n\}$ 的两个具有不同极限的子数列，即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$，$\lim\limits_{l\to\infty}x_{n_l}=b$，且 $a\neq b$.

(2) 证明数列不是无穷大量的方法是：找出数列 $\{x_n\}$ 的一个收敛的子数列或者找出数列 $\{x_n\}$ 的一个有界的子数列.

问题 4 数列极限与函数极限之间有什么区别和联系？

答：区别：数列 $x_n=f(n)$ 自变量 n 的变化过程是间断的(只取正整数)，且只有一种过

程：$n\to\infty$（即 $n\to+\infty$）；函数 $y=f(x)$ 自变量 x 的变化过程是连续的，变化过程有：$x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$.

联系：(1) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 必存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 但要注意，当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 可以存在.

(2) 可以证明：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是：对任何数列 $x_n\to x_0\,(x_n\neq x_0)$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$（常用其必要条件判断 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在：若可以找到一个以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 不存在，或找到两个都以 x_0 为极限的数列 $\{x'_n\}$ 与 $\{x''_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x''_n)$ 都存在而不相等，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在）.

问题 5　运算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x^2\sin\frac{1}{x})}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$ 对吗？

答：运算方法不对，结果是对的. 这是因为 $x\to0$ 时，无穷小 $\sin(x^2\sin\dfrac{1}{x})$ 与 $x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 不能代换，忽略了无穷小比较时分母不为零的前提.

事实上，令 $\beta(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$，在 $\mathring{U}(0,\delta)$ 内总有 $\beta(x)=0$ 的情形，如取 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$，那么 $\beta(x_n)=\dfrac{1}{(n\pi)^2}\sin n\pi=0$.

正确的解法：

$$\left|\frac{\sin(x^2\sin\frac{1}{x})}{x}\right|\leqslant\frac{\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|}{|x|}\leqslant\frac{|x^2|}{|x|}\leqslant|x|\to0\,(x\to0)\text{，所以}\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2\sin\frac{1}{x})}{x}=0.$$

问题 6　如果 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且 $u=\varphi(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，对吗？

答：不正确.

例如：设 $f(u)=\begin{cases}2 & u\neq0\\ 0 & u=0\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x\neq0\\ 1 & x=0\end{cases}$，　那么 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}0 & x\neq0\\ 2 & x=0\end{cases}$.

因为 $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=0=u_0$，而 $\lim\limits_{u\to0}f(u)=2$，但 $\lim\limits_{x\to0}f[\varphi(x)]=0$，$\lim\limits_{x\to0}f[\varphi(x)]\neq\lim\limits_{u\to0}f(u)$.

这是因为复合函数的极限运算法则中的条件：在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内，$\varphi(x)\neq u_0$ 这一条件没有得到满足，才导致错误的结果. 或者是复合函数中的外层函数 f 在点 u_0 不连续所致.

问题 7　怎样求幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}$ 的极限.

答：一般的幂指函数的极限采用取对数求极限. 也可以利用对数恒等式及指数函数的连续性得 $\lim u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim v(x)\ln u(x)}$，如果 $\lim u(x)=A>0$，$\lim v(x)=B$，则 $\lim u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim v(x)\ln u(x)}=\mathrm{e}^{B\ln A}=A^B$；如果 $\lim u(x)=1$，$\lim v(x)=\infty$，是 1^∞ 型.

$$\begin{aligned}\lim u(x)^{v(x)}&=\lim\,[1+(u(x)-1)]^{\frac{1}{u(x)-1}\cdot v(x)\cdot[u(x)-1]}\\&=\lim\,\{[1+(u(x)-1)]^{\frac{1}{u(x)-1}}\}^{\lim v(x)[u(x)-1]}=\mathrm{e}^{\lim v(x)[u(x)-1]}.\end{aligned}$$

五、典型例题

【题型一】 函数及其性质

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\ln\dfrac{x}{x-2}+\arcsin\dfrac{3x-1}{5}$；　　(2) $y=\cot\pi x+\arccos 2^{x}$.

解 (1) 要使函数有意义，应有$\begin{cases}\dfrac{x}{x-2}>0\\ \left|\dfrac{3x-1}{5}\right|\leqslant 1\end{cases}$；解之得：$\begin{cases}x>2\text{ 或 }x<0\\ -\dfrac{4}{3}\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$，故所给函数的定义域 $D=\{x\mid -\dfrac{4}{3}\leqslant x<0\}$.

(2) 要使函数有意义，应有$\begin{cases}\pi x\neq k\pi\\ 0<2^{x}\leqslant 1\end{cases}$；即$\begin{cases}x\neq k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)\\ -\infty<x\leqslant 0\end{cases}$，故所给函数的定义域 $D=\{x\mid -\infty<x<0,x\neq -1,-2,\cdots\}$.

例 2 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\ln\sqrt{x}$，$g(x)=\dfrac{1}{2}\ln|x|$；(2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$，$g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}$.

解 (1) $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$g(x)$ 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，由于定义域不同，所以这两个函数不同.

(2) 因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为 $[1,2)$，定义域相同，在 $[1,2)$ 内 $\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}$ 恒成立，从而对应法则也相同，所以这两个函数相同.

评注 确定函数的两个要素是定义域与对应法则，从而给出了两函数相同的条件：① 定义域相同；② 对应法则相同. 只要两条件之一不同，则两函数就不同.

例 3 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f\{f[f(x)]\}$ 及其定义域.

解 由于 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，$x\neq -1$，所以 $f[f(x)]=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}=\dfrac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}}=x$，$x\neq -1$，$f(x)\neq -1$，而 x 无论取何值，$f(x)$ 都不可能等于 -1，故 $f[f(x)]$ 定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，$f\{f[f(x)]\}=\dfrac{1-x}{1+x}$，定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

例 4 设(1) $f(x)=\begin{cases}x & x<0\\ 1 & x\geqslant 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ x^{2} & x\geqslant 0\end{cases}$；

(2) $f(x)=\begin{cases}x-1 & x\leqslant 0\\ x^{2} & x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x^{2} & x\leqslant 0\\ x-1 & x>0\end{cases}$；求 $f[g(x)]$.

解 (1) $f[g(x)]=\begin{cases}g(x) & g(x)<0\\ 1 & g(x)\geqslant 0\end{cases}$；对一切的 x 有 $g(x)\geqslant 0$，故 $f[g(x)]=1$.

(2) $f[g(x)]=\begin{cases} g(x)-1 & g(x)\leqslant 0 \\ g^2(x) & g(x)>0 \end{cases}$；由 $g(x)$ 的表达式知当 $x<0$ 时，$g(x)=x^2>0$，当 $x>1$ 时，$g(x)=x-1>0$，当 $x=0,x=1$ 时，$g(x)=0$，当 $0<x<1$ 时，$g(x)=x-1<0$，

故 $f[g(x)]=\begin{cases} (x^2)^2 & x<0 \\ (x-1)^2 & x>1 \\ -1 & x=0,x=1 \\ (x-1)-1 & 0<x<1 \end{cases}$ 即 $f[g(x)]=\begin{cases} x^4 & x<0 \\ -1 & x=0 \\ x-2 & 0<x\leqslant 1 \\ (x-1)^2 & x>1 \end{cases}$.

例 5　已知：(1) $f(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x,(0<x<1)$；

(2) $f(\ln x)=\begin{cases} 1 & 0<x\leqslant 1 \\ x & 1<x<+\infty \end{cases}$，求 $f(x)$.

解　(1) 因为 $f(\sin^2 x)=1-2\sin^2 x+\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$，于是 $f(x)=1-2x+\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{2x^2-2x+1}{1-x}$，又原式中 $0<x<1$，得 $0<\sin^2 x<\sin^2 1$，故 $f(x)$ 的定义域为 $(0,\sin^2 1)$.

(2) 令 $u=\ln x$，则 $x=e^u$，当 $0<x\leqslant 1$ 时，$-\infty<\ln x=u\leqslant 0$，当 $1<x<+\infty$ 时，$0<\ln x=u<+\infty$，于是，$f(u)=\begin{cases} 1 & -\infty<u\leqslant 0 \\ e^u & 0<u<+\infty \end{cases}$，故 $f(x)=\begin{cases} 1 & -\infty<x\leqslant 0 \\ e^x & 0<x<+\infty \end{cases}$.

评注　已知 $f[g(x)]$ 的表达式，求 $f(x)$ 的表达式. 解法一般有两种，如(1)是利用恒等变形来求函数 $f(x)$，是一种基本方法. 再如(2)是从复合函数的角度来求 $f(x)$，$y=f(\ln x)$ 是由 $y=f(u)$ 和 $u=\ln x$ 复合而成的，通过代换 $u=g(x)=\ln x$，反解将 x 表示为 u 的函数 $x=g^{-1}(u)=e^u$，代入原式，先求出 $f(u)$ 的表达式，再将 u 换成 x 就得到 $f(x)$.

例 6　设对一切实数 x，$f(x)$ 满足关系式 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，求 $f(x)$ 的表达式.

解　所给关系式的左端含有 $f(x)$ 与 $f(1-x)$，若两者互换，即令 $x=1-t$，代入所给关系式得 $2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2$，即 $2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2$，从所给关系式与上式消去 $f(1-x)$，便得 $3f(x)=2x^2-(1-x)^2=x^2+2x-1$，故 $f(x)=\dfrac{1}{3}(x^2+2x-1)$.

例 7　设对任意实数 x,y 均有 $|f(x)+f(y)|=|x+y|$，且 $f(0)=0$，证明：$f(x)f(y)=xy$.

证明　令 $y=0$，则 $|f(x)|=|x|$，所以 $f^2(x)=x^2$，由题意设得

$$|f(x)+f(y)|^2=|x+y|^2$$

即

$$f^2(x)+2f(x)f(y)+f^2(y)=x^2+2xy+y^2,$$

整理得

$$f(x)f(y)=xy.$$

例 8　将下列函数拆开成简单函数的复合.

(1) $y=\sqrt[4]{(1+x)^2+1}$；　　(2) $y=\log_a \sin(e^x-1)$；

解　(1) $y=\sqrt[4]{u}$，$u=v^2+1$，$v=1+x$；

(2) $y=\log_a u$，$u=\sin v$，$v=w-1$，$w=e^x$.

评注　从复合函数的外层向里，去掉一层函数符号，就引进一个中间变量，依次进行，直到将中间变量表示为自变量的函数为止.

例 9 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，对任意 x,y 均有 $f(xy)=f(x)f(y)$，$f(x)\neq 0$，求 $f(3)$.

解 取 $x=3,y=0$（或 $x=0,y=3$），有 $f(0)=f(3)f(0)$，由于 $f(0)\neq 0$，所以 $f(3)=1$.

例 10 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{x}{a^x-1}$；　　(2) $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+2})-\lg\sqrt{2}$；

(3) $f(x)=\begin{cases}1-x & x\leqslant 0\\ 1+x & x>0\end{cases}$.

解 (1) 由于 $f(-x)=\dfrac{-x}{a^{-x}-1}$，$f(-x)\neq f(x)$，$f(-x)\neq -f(x)$，所以，$f(x)=\dfrac{x}{a^x-1}$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(2) 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\lg(-x+\sqrt{(-x)^2+2})-\lg\sqrt{2}\\&=\lg\left(\frac{2}{x+\sqrt{x^2+2}}\right)-\frac{1}{2}\lg 2=\lg 2-\lg(x+\sqrt{x^2+2})-\frac{1}{2}\lg 2\\&=\frac{1}{2}\lg 2-\lg(x+\sqrt{x^2+1})=-[\lg(x+\sqrt{x^2+1})-\lg\sqrt{2}]=-f(x)\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(3) 因为 $f(-x)=\begin{cases}1-(-x) & -x\leqslant 0\\ 1+(-x) & -x>0\end{cases}=\begin{cases}1-x & x\leqslant 0\\ 1+x & x>0\end{cases}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数.

例 11 证明：函数 $f(x)=x-[x]$ 是周期为 1 的周期函数.

证明 $f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-([x]+1)=x-[x]=f(x)$，故函数 $f(x)=x-[x]$ 是周期为 1 的周期函数.

例 12 求下列函数的周期：

(1) $f(x)=\sin^2 x$；　　(2) $f(x)=2\tan\dfrac{x}{2}-3\tan\dfrac{x}{3}$.

解 (1) 由于 $f(x)=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$，所以 $f(x)$ 的周期为 π.

(2) 由于 $\tan\dfrac{x}{2}$ 与 $\tan\dfrac{x}{3}$ 的周期分别为 $2\pi,3\pi$，所以 $f(x)$ 的周期为 6π.

评注 用定义判断函数是否是周期函数比较困难，有时利用下面的结论求周期函数的周期比较方便：

(1) 若 $f(x)$ 的最小正周期为 l，则 $f(ax+b)(a>0)$ 的最小正周期为 $\dfrac{l}{a}$；

(2) 若 $f(x),g(x)$ 的最小正周期分别为 T_1 和 T_2，则 $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)g(x)$ 的最小正周期为 T_1 和 T_2 的最小公倍数.

例 13 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$，证明函数 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上无界.

证明 $\forall M>0$，$\exists N_M>\dfrac{M}{2\pi}$，对应的有 $x_M=\dfrac{1}{2\pi N_M}\in(0,1]$，使得

$$|f(x_M)|=\left|(2\pi N_M+\frac{\pi}{2})\sin(2\pi N_M+\frac{\pi}{2})\right|=2\pi N_M+\frac{\pi}{2}>2\cdot\frac{M}{2\pi}\cdot\pi+\frac{\pi}{2}>M,$$

所以函数 $f(x)$在$(0,1]$上无界.

【题型二】 关于极限的证明题

例 14　根据数列极限的定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^3+2n}=0$.

证明　任给 $\varepsilon>0$,要使$\left|\frac{n^2+1}{n^3+2n}-0\right|=\frac{n^2+1}{n^3+2n}<\varepsilon$,

因为 $\frac{n^2+1}{n^3+2n}\leqslant\frac{2n^2}{n^3+2n}<\frac{2n^2}{n^3}=\frac{2}{n}$,所以只要使$\frac{2}{n}<\varepsilon$ 即可.

由此得 $n>\frac{2}{\varepsilon}$.

取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,$\left|\frac{n^2+1}{n^3+2n}-0\right|<\varepsilon$ 恒成立,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^3+2n}=0$.

小结　用 ε—N 定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,关键是任给 $\varepsilon>0$ 之后,说明适合定义中的 N 确实存在.因要求的 N 满足 $n>N$ 时 $|x_n-a|<\varepsilon$,故应解不等式$|x_n-a|<\varepsilon$ 求 N.如果直接解不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$,求满足定义中的最小的 N 不容易时,可将$|x_n-a|$适当放大,使$|x_n-a|\leqslant g(n)<\varepsilon$,求出较大的 N 即可,且须使不等式 $g(n)<\varepsilon$ 易解.

例 15　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

分析　$\forall\varepsilon>0$,考察$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$ 成立的条件.

由于$\frac{1}{n}\lg n>0\ (n>1)$,所以$\sqrt[n]{n}>1$,即$\sqrt[n]{n}-1>0$. 可设$\sqrt[n]{n}=1+h_n\ (h_n>0)$. 则

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots>1+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2,\text{即 }n-1>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2.$$

当 $n>1$ 时,$h_n^2<\frac{2}{n}$,$h_n=\sqrt[n]{n}-1<\sqrt{\frac{2}{n}}$,即$|\sqrt[n]{n}-1|<\sqrt{\frac{2}{n}}<\varepsilon$,解得 $n>\frac{2}{\varepsilon^2}$.

可见,若取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]$,则当 $n>N$ 时,有$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$.

证明　$\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]$, 当 $n>N$ 时, 有 $\sqrt{\frac{2}{n}}<\varepsilon$, 而 $|\sqrt[n]{n}-1|<\sqrt{\frac{2}{n}}<\varepsilon$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

例 16　证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=1$.

证明　$\forall\varepsilon>0$,$\exists X=-\frac{1}{\varepsilon}-1$,当 $x<X$ 时,有$\frac{-1}{x+1}<\varepsilon$,由于$\left|\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right|<\frac{-1}{x+1}<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=1$.

例 17　证明 $\lim\limits_{x\to4}\frac{x-4}{x}=0$.

证明　任给 $\varepsilon>0$, 要使 $\left|\frac{x-4}{x}-0\right|<\varepsilon$, 由于 $\left|\frac{x-4}{x}-0\right|=\frac{|x-4|}{|x|}$, $x\to4$, 不妨设

$3<x<5, x\neq 4$，即 $0<|x-4|<1$，此时 $\frac{|x-4|}{|x|}<\frac{|x-4|}{3}$，故只要 $\frac{|x-4|}{3}<\varepsilon$ 即可.

取 $\delta=\min\{1,3\varepsilon\}$，则当 $0<|x-4|<\delta$ 时，$\frac{|x-4|}{|x|}<\frac{|x-4|}{3}$ 和 $\frac{|x-4|}{3}<\varepsilon$ 同时成立，即当 $0<|x-4|<\delta$ 时，$\left|\frac{x-4}{x}-0\right|<\varepsilon$ 恒成立. 所以 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{x}=0$.

小结 (1) 用 $\varepsilon-\delta$ 定义证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的关键是任给 $\varepsilon>0$ 之后找定义中的 $\delta>0$，若 δ 存在就得证. 找出 δ 的方法是解不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，为方便起见，有时把 $|f(x)-A|$ 适当放大，使 $|f(x)-A|\leqslant g(x)<\varepsilon$，并使 $g(x)$ 仅含有因子 $|x-x_0|$. 解不等式 $g(x)<\varepsilon$ 求出 δ. 有时可先对 δ 作一限制，设 $0<|x-x_0|<\delta_1$，进而推出 $|f(x)-A|\leqslant g(x)$，再由 $g(x)<\varepsilon$ 解得 $0<|x-x_0|<\delta_2$，这时取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ 即可.

(2) 由于放大的方法不同，求出的定义中的 δ 可能不同，但它对 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是否以 A 为极限没有影响.

例 18 已知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$，求证 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{A}$.

证明 由于 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$，对 $\varepsilon_1=\frac{1}{2}|A|$，$\exists\,\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，$|f(x)-A|<\frac{1}{2}|A|$，即 $A-\frac{1}{2}|A|<f(x)<A+\frac{1}{2}|A|$，故 $|f(x)|>\frac{1}{2}|A|$. 从而

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{A}\right|=\left|\frac{f(x)-A}{Af(x)}\right|<|f(x)-A|\cdot\frac{2}{A^2},$$

又 $\forall\,\varepsilon>0$ 取 $\varepsilon_2=\frac{A^2}{2}\varepsilon$，对 $\varepsilon_2>0$，由于 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\exists\,\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon_2$，所以 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{A}\right|<|f(x)-A|\cdot\frac{2}{A^2}<\varepsilon_2\cdot\frac{2}{A^2}=\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{A}.$$

例 19 设 $x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

证明 因为 $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是单调递增且以 e 为极限，从而有 $\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}<\mathrm{e}$，亦即有 $\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\mathrm{e}^{\frac{1}{2^n}}$，于是有 $x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\mathrm{e}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2^n}}<\mathrm{e}$，这就证明 $\{x_n\}$ 是有上界的，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

【题型三】 关于数列极限的求法

1. 通项为 n 项和的极限

方法 将通项利用已知的公式直接求和或将每项分解为部分分式之和，化简后再求极限（有的可用定积分法求和，见第五章）.

例 20 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{n-1}{n}a\right)\right]$.