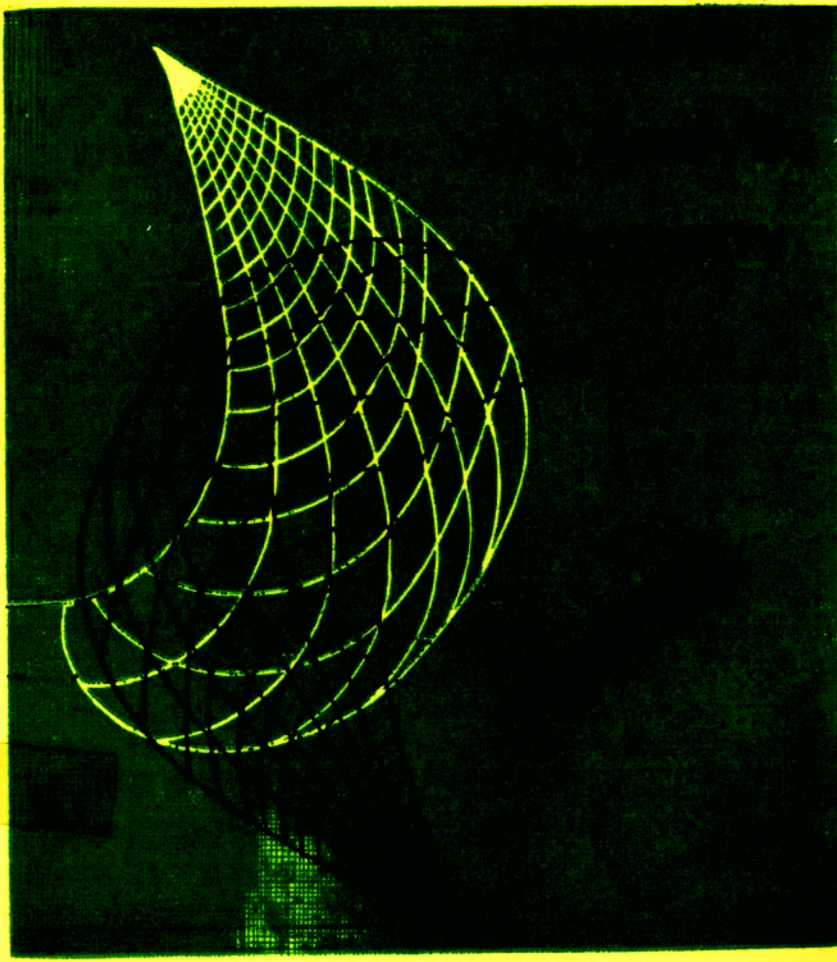
波雪兒微積分詳解

第 三 版　　　下 冊



曉 園 出 版 社

修訂版　67年9月第一次印刷發行
73年9月第四次印刷發行

波雪兒微積分詳解

上冊定價：新臺幣 140 元
下冊定價：新臺幣 150 元

原著者：PURCELL
譯著者：駱　效　宗
發行人：黃　旭　政
發行所：曉　園　出　版　社
臺北市青田街7巷5號
電　話：(02) 394-9931 三線
郵　撥：一九四五三號

門市部(1)：臺北市新生南路三段96號之三
電　話：3917012・3947375
門市部(2)：臺北市重慶南路一段61號地下樓
電　話：三一四九五八〇
門市部(3)：臺北縣淡水鎮英專路71號
電　話：六二一七八四〇
門市部(4)：臺中市西屯區文華路113號
電　話：(04)251-2759・254-6663

印刷所：遠　大　印　刷　廠
臺北市武成街36巷16弄15號

出版登記：局版臺業字第 1244 號
著作執照：臺內著字第　　號

前　　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精徵的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

波雪兒微積分詳解

（下 冊 目 錄）

第十一章　積分技巧　557

2.基本積分公式 557 ／3.代換積分法 559 ／4.其它基本公式之積分置換 564 ／5.分部積分法 574 ／6.三角積分 582 ／7.有理化置換 589 ／8.含 Ax^2+Bx+C 積分因子 600 ／9.定積分、變換極限 606 ／10.有理函數化為部分分式的積分 616 ／11.$\sin x$ 與 $\cos x$ 的有理函數 624 ／12.積分複習習題 627 ／14.可分離微分方程式-應用 645 ／15.辛普森定則 652

第十二章　圓錐曲線與極坐標　658

2.圓錐曲線定義 658 ／3.拋物線（$e=1$） 659 ／5.橢圓（$e<1$） 669 ／6.雙曲線（$e>1$） 677 ／7.有心錐線的其它定義 685 ／8.坐標軸的平移 687 ／9.旋轉變換 694 ／10.任意二度曲線圖形 703 ／11.極坐標 710 ／12.極坐標方程式的圖形 717 ／13.直線、圓與圓錐曲線 722 ／14.徑向量與切線的夾角 728 ／15.極坐標曲線的交點 729 ／16.極坐標中的平面面積 736 ／17.複習習題 744

第十三章　不定形式，瑕積分　756

1.柯西均值定理 756 ／2.不定形式 756 ／3.洛卜塔法則 756 ／4.其他不定形式 761 ／5.積分的無窮極限 768 ／6.有界集合完備公理 778 ／7.比較審斂法 779 ／8.有無窮值的被積函數 783 ／9.複習習題 840

第十四章　無窮級數　799

1.數列 799 ／2.無窮級數 803 ／3.正項級數的審斂法 805 ／4.交錯級數，絕對收斂 812 ／5.冪級數 815 ／6.由冪級數定義的函數 818 ／7.泰勒定理 821 ／8.泰勒定理中餘項的其他形式 830 ／9.複習習題 840

第十五章　參數方程與平面上的向量　850

1.平面曲線 850 ／2.由參數方程式定義的函數 850 ／3.平面弧的長度 861 ／4.平面上的向量 866 ／5.純量、內積與基底向量 870 ／6.向量函數 876

／7.曲線運動 881 ／8.曲率 885 ／9.加速度的切線分量與法線分量 893 ／10.複習習題 901

第十六章 三度空間

910

1.三度空間的笛卡爾坐標 910 ／2.三維向量 913 ／3.向量積（外積） 921 ／4.三度空間中的平面 927 ／5.三度空間中的直線 934 ／6.曲面 934 ／7.圓柱體、旋轉面 944 ／8.對稱、軌跡與曲面的平面截痕 951 ／9.二次曲面 955 ／10.描繪曲面的方法 955 ／11.複習習題 961

第十七章 三度空間的向量函數

972

1.向量函數 972 ／2.速度、加速度與弧長 977 ／3.曲率、向量分量 981 ／4.平面運動的法則 981 ／5.複習習題 992

第十八章 雙或多變數函數

998

1.多獨立變數的函數 998 ／2.偏導數 1002 ／3.極限與連續性 1011 ／4.增量與微分 1014 ／5.鏈鎖法則 1017 ／6.方向導數與梯度 1026 ／7.曲面的切平面、雙變數函數的極值 1031 ／8.制限極值、拉格朗治乘子算法 1042 ／9.適當微分 1046 ／10.線積分 1052 ／11.功 1061 ／12.散度與旋度 1064 ／13.複習習題 1068

第十九章 重積分

1080

1.雙重積分 1080 ／2.藉迭代積分法求雙重積分值 1082 ／3.雙重積分的其他應用 1089 ／4.格林定理 1094 ／5.極坐標的雙重積分 1100 ／6.曲面面積 1105 ／7.三重積分 1109 ／8.三重積分的應用 1115 ／9.圓柱坐標 1130 ／10.球坐標 1135

第二十章 微分方程式

1142

1.導論 1142 ／2.一階與一次齊次方程式 1146 ／3.一階與一次適當方程式 1151 ／4.一階線性方程式 1154 ／5.可藉一階的方法求解的二階方程式 1157 ／6.任意階的線性方程式 1161 ／7.常係數線性齊次方程式 1161 ／8.二階常係數線性齊次方程式的解 1161 ／9.二階非齊次線性方程式 1163 ／10.彈簧的振動 1163 ／11.電路 1163 ／12.複習習題 1173

第十一章　積分技巧

11-2

計算下列積分

1. $\int (x-1)^4 dx$

解：$\int (x-1)^4 dx = \int (x-1)^4 d(x-1) = \dfrac{(x-1)^5}{5} + C$

2. $\int \sqrt{2x}\, dx$

解：$\int \sqrt{2x}\, dx = \sqrt{2}\int \sqrt{x}\, dx = 2\sqrt{2}\int (\sqrt{x})^2\, d\sqrt{x} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}(\sqrt{x})^3 + C$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

3. $\int \dfrac{dx}{x+1}$

解：$\int \dfrac{dx}{x+1} = \int \dfrac{d(x+1)}{x+1} = \ln|x+1| + C$

4. $\int \dfrac{e^x}{1+2e^x}\, dx$

解：$\int \dfrac{e^x}{1+2e^x}\, dx = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{d(1+2e^x)}{1+2e^x} = \dfrac{1}{2}\ln|1+2e^x| + C$

5. $\int 3t\sqrt{2+t^2}\, dt$

解：$\int 3t\sqrt{2+t^2}\, dt = \dfrac{3}{2}\int (2+t^2)^{\frac{1}{2}}\, d(2+t^2) = (2+t^2)^{\frac{3}{2}} + C$

6. $\int \dfrac{dt}{\sqrt{1+t}}$

解：$\int \dfrac{dt}{\sqrt{1+t}} = \int (1+t)^{-\frac{1}{2}}\, d(t+1) = 2(1+t)^{\frac{1}{2}} + C$

7. $\int \sec^2(s+3)\, ds$

解：$\int \sec^2(s+3)\, ds = \int \sec^2(s+3)\, d(s+3)$

$$= \tan(s+3) + C$$

8. $\int x \csc^2(x^2)dx$

解：$\int x \csc^2(x^2)dx = \frac{1}{2}\int \csc^2(x^2)\,dx^2$

$$=\frac{-1}{2}\cot(x^2)+C$$

9. $\int \frac{\tan z}{\cos z}dz$ （提示：$\sec z=\frac{1}{\cos z}$ ）

解：$\int \frac{\tan z}{\cos z}dz=\int \tan z \sec z\, dz = \sec z + C$

10. $\int 5\sec 5x \tan 5x\, dx$

解：$\int 5\sec 5x \tan 5x\, dx = \int \sec 5x \tan 5x\, d(5x) = \sec 5x + C$

11. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

解：$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \cos\sqrt{x}\, d\sqrt{x} = 2\sin\sqrt{x}+C$

12. $\int e^{2x+1}dx$

解：$\int e^{2x+1}dx = \frac{e}{2}\int e^{2x}\,d2x = \frac{e}{2}e^{2x} = \frac{e^{2x+1}}{2}+C$

13. $\int \frac{e^{\sin x}}{\sec x}dx$ （提示：$\cos x=\frac{1}{\sec x}$ ）

解：$\int \frac{e^{\sin x}}{\sec x}dx = \int e^{\sin x}\,d\sin x = e^{\sin x}+C$

14. $\int \frac{dt}{\csc t}$（提示：用11.2.5）

解：$\int \frac{dt}{\csc t} = \int \sin t\, dt = -\cos t + C$

15. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$（提示：令$u=x^2$）

解：$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\mathrm{Sin}^{-1}x^2+C$

16. $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$（提示：令$u=\sin x$ ）

解：$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{d\sin x}{1+\sin^2 x} = \tan^{-1}(\sin x)+C$

17. $\int x\csc x^2 \cot x^2\,dx$（提示：令 $u=x^2$）

解：$\int x\csc x^2 \cot x^2\,dx = \frac{1}{2}\int \csc x^2 \cot x^2\,dx^2$

$$= -\frac{1}{2}\csc x^2 + C$$

18. $\int \frac{\csc t}{\tan t}\,dt$（提示：$\cot t = \frac{1}{\tan t}$）

解：$\int \frac{\csc t}{\tan t}\,dt = \int \csc t \cot t\,dt = -\csc t + C$

19. $\int \tan(5x-1)\,dx$

解：$\int \tan(5x-1)\,dx$

$= \int \frac{\sin(5x-1)}{\cos(5x-1)}\,dx$

$= -\frac{1}{5}\int \frac{d\cos(5x-1)}{\cos(5x-1)}$

$= -\frac{1}{5}\ln|\cos(5x-1)|+C$

20. $\int e^x(\cot e^x)\,dx$（提示：令 $u=e^x$）

解：$\int e^x(\cot e^x)\,dx = \int \frac{e^x \cos e^x}{\sin e^x}\,dx$

$$= \int \frac{d\sin e^x}{\sin e^x} = \ln|\sin e^x| + C$$

11-3

計算下列習題的積分

1. $\int (7x-1)^{12}\,dx$

解：$u=7x-1$， $du=7\,dx$

$\therefore \int (7x-1)^{12}\,dx = \frac{1}{7}\int u^{12}\,du = \frac{u^{13}}{7\cdot 13}+C = \frac{(7x-1)^{13}}{91}+C$

2. $\int (4x^3+3x-1)^4(4x^2+1)\,dx$

解：令 $u=4x^3+3x-1$ $\quad\therefore du=3(4x^2+1)dx$

$$\therefore\int(4x^3+3x-1)^4(4x^2+1)dx=\frac{1}{3}\int u^4du$$

$$=\frac{u^5}{15}+C=\frac{(4x^3+3x-1)^5}{15}+C$$

3. $\int(12x^5-x)(8x^6-2x^2+19)^{10}dx$

解：令 $u=8x^6-2x^2+19$ $\quad\therefore du=4(12x^5-x)dx$

$$\therefore\int(8x^6-2x^2+19)^{10}(12x^5-x)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int u^{10}du=\frac{u^{11}}{44}+C=\frac{(8x^6-2x^2+19)^{11}}{44}+C$$

4. $\int(\sin 6x)^3\cos 6x\,dx$

解：原式 $=\frac{1}{6}\int(\sin 6x)^3d(\sin 6x)=\frac{1}{24}\sin^4 6x+C$

5. $\int\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}dx$

解：原式 $=3\int\sin\frac{x}{3}d\sin\frac{x}{3}=\frac{3}{2}\sin^2\frac{x}{3}+C$

6. $\int x^2\sqrt{7x^3+5}\,dx$

解：原式 $=\frac{1}{3}\int\sqrt{7x^3+5}\,d(x^3)=\frac{1}{21}\int\sqrt{7x^3+5}\,d(7x^3+5)$

$$=\frac{1}{21}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\sqrt{(7x^3+5)^3}+C=\frac{2}{63}\sqrt{(7x^3+5)^3}+C$$

7. $\int x\sin 2x^2\,dx$

解：令 $u=2x^2$ $\quad\therefore du=4x\,dx$

$$\therefore\int x\sin 2x^2dx=\frac{1}{4}\int\sin u\,du=-\frac{\cos u}{4}+C=-\frac{\cos 2x^2}{4}+C$$

8. $\int\frac{\cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx$

解：原式$=-2\int\frac{\cos\sqrt{1-x}}{-2\sqrt{1-x}}dx=-2\int\cos\sqrt{1-x}\ d(\sqrt{1-x})$

$=-2\sin\sqrt{1-x}+C$

9. $\int e^{x^2+2x-1}(x+1)\,dx$

解：令 $u=x^2+2x-1$ $\therefore\ du=2(x+1)\,dx$

$\therefore\int e^{x^2+2x-1}(x+1)\,dx=\frac{1}{2}\int e^u\,du=\frac{e^u}{2}+C=\frac{e^{x^2+2x-1}}{2}+C$

10. $\int\frac{dt}{e^{3t}}$

解：令 $u=3t$ $\therefore\ du=3\,dt$

$\therefore\int\frac{dt}{e^{3t}}=\frac{1}{3}\int e^{-u}\,du=-\frac{e^{-u}}{3}+C=\frac{-e^{-3t}}{3}+C$

11. $\int\frac{e^{\sqrt{2x+1}}\,dx}{\sqrt{2x+1}}$

解：令 $u=\sqrt{2x+1}$ $\therefore du=\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

$\therefore\int\frac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}}\,dx=\int e^u\,du=e^u+C=e^{\sqrt{2x+1}}+C$

12. $\int\frac{e^{\csc t}\cot t}{\sin t}dt$

解：令 $u=\csc t$ $\therefore du=-\csc t\ \cot t\ dt$

$\therefore\int\frac{e^{\csc t}\cot t}{\sin t}\,dt=-\int e^u\,du=-e^u+C$

$=-e^{\csc t}+C$

13. $\int\frac{(\ln t^2)^9}{t}dt$

解：令 $u=\ln\ t^2$ $\therefore du=\frac{2dt}{t}$

$\therefore\int\frac{(\ln t^2)^9}{t}dt=\frac{1}{2}\int u^9\,du=\frac{u^{10}}{20}+C$

$=\frac{(\ln t^2)^{10}}{20}+C$

14. $\int \frac{(\cos^{-1} 2w)^7}{\sqrt{1-4w^2}}\, dw$

解：令 $u = \cos^{-1} 2w$ $\qquad \therefore du = -\frac{2dw}{\sqrt{1-4w^2}}$

$$\therefore \int \frac{(\cos^{-1} 2w)^7}{\sqrt{1-4w^2}} dw = \frac{-1}{2}\int u^7\, du = \frac{-u^8}{16} + C$$

$$= \frac{(\cos^{-1} 2w)^8}{16} + C$$

15. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}\, dx$

解：原式 $= -\int (\cos x)^{-5}\, d(\cos x) = -\frac{1}{-5+1}(\cos x)^{-4} + C = \frac{1}{4\cos^4 x} + C$

另解：$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}\, dx = \int \tan x \sec^4 x\, dx = \int \sec^3 x\, d(\sec x) = \frac{1}{4}\sec^4 x + C$

16. $\int (\cos^2 x - \sin^2 x)^3 (\sin x \cos x)\, dx$

解：令 $u = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\therefore du = (-2\sin x\cos x - 2\sin x\cos x)\, dx$$

$$= -4\sin x\cos x\, dx$$

$$\therefore \int (\cos^2 x - \sin^2 x)^3 (\sin x\cos x)\, dx$$

$$= \frac{-1}{4}\int u^3\, du = \frac{-u^4}{8} + C = \frac{-(\cos^2 x - \sin^2 x)^4}{8} + C$$

17. $\int \frac{x\, dx}{6x^2 - 19}$

解：原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{6x^2-19} = \frac{1}{12}\int \frac{d(6x^2-19)}{6x^2-19} = \frac{1}{12}\ln|6x^2-19| + C$

18. $\int \frac{\sin t}{\cos t}\, dt$

解：原式 $= -\int \frac{d\cos t}{\cos t} = -\ln|\cos t| + C$

19. $\int \frac{2x^2+x}{x+1}\, dx$

解：$\int \frac{2x^2+x}{x+1}dx = \int (2x-1+\frac{1}{x+1})dx$

$= x^2-x+\ln|x+1|+C$

20. $\int \frac{3x^4-15x^3+2x-5}{x^2-5x}dx$

解：$\int \frac{3x^4-15x^3+2x-5}{x^2-5x}dx = \int (3x^2+\frac{2x-5}{x^2-5x})dx$

$= \int 3x^2\,dx + \int \frac{d(x^2-5x)}{x^2-5x}$

$= x^3+\ln|x^2-5x|+C$

21. $\int \frac{4x^4+x^3+20x^2+2x}{x^2+5}dx$

解：$\int \frac{4x^4+x^3+20x^2+2x}{x^2+5}dx$

$= \int (4x^2+x-\frac{3x}{x^2+5})dx$

$= \frac{4x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\ln(x^2+5)+C$

22. $\int (e^t-e^{-t})^2(e^t+e^{-t})dt$

解：令 $u=e^t-e^{-t}$ $\qquad \therefore du=(e^t+e^{-t})dt$

$\therefore \int (e^t-e^{-t})^2(e^t+e^{-t})dt = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3}+C = \frac{(e^t-e^{-t})^3}{3}+C$

23. $\int \sin^2 y\cos y\sqrt{\sin^3 y+4}\,dy$

解：令 $u=\sin^3 y+4$ $\qquad \therefore du=3\sin^2 y\cos y\,dy$

原式$=\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{9}(\sin^3 y+4)^{\frac{3}{2}}+C$

24. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{1-\sin^2 x}dx$

解：$\int \frac{\sqrt{\tan x}}{1-\sin^2 x}dx = \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}dx = \int \tan^{\frac{1}{2}}x\sec^2 x\,dx$

$= \int \tan^{\frac{1}{2}}x\,d\tan x = \frac{2\tan^{\frac{3}{2}}x}{3}+C$

25. $\int x5^{x^2-1}\,dx$

解：$\int x5^{x^2-1}\,dx = \int x\,e^{(\ln 5)(x^2-1)}\,dx = \frac{1}{2\ln 5}\int e^{(\ln 5)(x^2-1)}\,d(\ln 5)(x^2-1)$

$$= \frac{e^{(\ln 5)(x^2-1)}}{\ln 25} + C = \frac{5^{x^2-1}}{\ln 25} + C$$

26. $\int 6^{\cos x}\sin x\,dx$

解：$\int 6^{\cos x}\sin x\,dx = \int \sin x\; e^{\cos x\ln 6}\,dx$

$$= \frac{-1}{\ln 6}\int e^{\cos x\ln 6}\,d(\cos x\ln 6)$$

$$= \frac{-e^{\cos x\ln 6}}{\ln 6} + C$$

$$= \frac{-6^{\cos x}}{\ln 6} + C$$

27. $\int e^{\sin\theta\cos\theta}\cos 2\theta\,d\theta$

解：令 $u = \sin\theta\cos\theta \Rightarrow du = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,d\theta = \cos 2\theta\,d\theta$

$\therefore \int e^{\sin\theta\cos\theta}\cos 2\theta\,d\theta = \int e^u\,du = e^u + C$

$= e^{\sin\theta\cos\theta} + C = e^{\frac{\sin 2\theta}{2}} + C$

28. $\int \frac{e^{2\ln(2x-1)}}{2x-1}\,dx$

解：$\int \frac{e^{2\ln(2x-1)}}{2x-1}\,dx = \int \frac{e^{\ln(2x-1)^2}}{2x-1}\,dx$

$$= \int \frac{(2x-1)^2}{2x-1}\,dx = \int (2x-1)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (2x-1)\,d(2x-1) = \frac{(2x-1)^2}{4} + C$$

11-4

計算 1～40.題所予積分

1. $\int \sin(13x-11)\,dx$

解：原式 $= \frac{1}{13}\int \sin(13x-11)(13dx) = \frac{1}{13}\int \sin(13x-11)\,d(13x-11)$

$$=\frac{-1}{13}\cos(13x-11)+C$$

2. $\int x\sin(x^2-1)\,dx$

解：原式 $=\frac{1}{2}\int\sin(x^2-1)(2x\,dx)=\frac{1}{2}\int\sin(x^2-1)\,d(x^2-1)$

$$=-\frac{1}{2}\cos(x^2-1)+C$$

3. $\int\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right)dx$

解：原式 $=\frac{2}{\pi}\int\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right)\left(\frac{1}{2}\pi\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\int\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right)d\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$

$$=\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)+C$$

4. $\int\frac{\cos\ln 4x^2}{x}\,dx$

解：原式 $=\frac{1}{2}\int\cos(\ln 4x^2)\left(\frac{2dx}{x}\right)=\frac{1}{2}\int\cos(\ln 4x^2)\,d(\ln 4x^2)$

$$=\frac{1}{2}\sin(\ln 4x^2)+C$$

5. $\int\csc^2\pi x\,dx$

解：原式 $=\frac{1}{\pi}\int\csc^2\pi x(\pi\,dx)=\frac{1}{\pi}\int\csc^2\pi x\,d(\pi x)$

$$=-\frac{1}{\pi}\cot\pi x+C$$

6. $\int 3x\sec^2 2x^2\,dx$

解：原式 $=\frac{3}{4}\int\sec^2 2x^2(4x\,dx)=\frac{3}{4}\int\sec^2 2x^2\,d(2x^2)=\frac{3}{4}\tan 2x^2+C$

7. $\int e^{3t}\sin e^{3t-2}\,dt$

解：原式 $=\dfrac{e^2}{3}\int \sin e^{3t-2}(3e^{3t-2}\,dt)=\dfrac{e^2}{3}\int \sin e^{3t-2}\,d(e^{3t-2})$

$=\dfrac{-e^2}{3}\cos e^{3t-2}+C$

8. $\int \dfrac{\cos \ln t^2}{t}\,dt$

解：原式 $=\dfrac{1}{2}\int \cos \ln t^2\left(\dfrac{2}{t}\,dt\right)=\dfrac{1}{2}\int \cos \ln t^2\,d(\ln t^2)=\dfrac{1}{2}\sin\ln t^2+C$

9. $\int e^{2y}\cot^2 e^{2y}\,dy$

解：原式 $=\int e^{2y}(\csc^2 e^{2y}-1)\,dy=\int e^{2y}\csc^2 e^{2y}\,dy-\int e^{2y}\,dy$

$=\dfrac{1}{2}\int \csc^2 e^{2y}(2e^{2y}dy)-\dfrac{1}{2}\int e^{2y}(2dy)$

$=\dfrac{1}{2}\int \csc^2 e^{2y}\,d(e^{2y})-\dfrac{1}{2}\int e^{2y}\,d(2y)=-\dfrac{1}{2}\cot e^{2y}-\dfrac{1}{2}e^{2y}+C$

10. $\int \dfrac{\tan^2 \ln 5y^2}{y}\,dy$

解：原式 $=\int \dfrac{(\sec^2 \ln 5y^2-1)}{y}\,dy=\int \dfrac{\sec^2 \ln 5y^2}{y}\,dy-\int \dfrac{1}{y}\,dy$

$=\dfrac{1}{2}\int \sec^2 \ln 5y^2\left(\dfrac{2dy}{y}\right)-\int \dfrac{1}{y}\,dy=\dfrac{1}{2}\int \sec^2 \ln 5y^2(d\ln 5y^2)-\int \dfrac{1}{y}\,dy$

$=\dfrac{1}{2}\tan \ln 5y^2-\ln y+C$

11. $\int w\sec(3w^2+1)\tan(3w^2+1)\,dw$

解：原式 $=\dfrac{1}{6}\int \sec(3w^2+1)\tan(3w^2+1)(6w\,dw)$

$=\dfrac{1}{6}\int \sec(3w^2+1)\tan(3w^2+1)\,d(3w^2+1)=\dfrac{1}{6}\sec(3w^2+1)+C$

12. $\int \frac{\csc e^{-w} \cot e^{-w}}{e^{w}} dw$

解：原式 $= \int \csc e^{-w} \cot e^{-w} (e^{-w} dw) = - \int \csc e^{-w} \cot e^{-w} \cdot d(e^{-w}) = \csc e^{-w} + C$

13. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x} dx$

解：原式 $= \int (1 - \cot x) dx = \int dx - \int \cot x \, dx = x - \ln | \sin x | + C$

14. $\int x^2 \sec x^3 \, dx$

解：原式 $= \frac{1}{3} \int \sec x^3 (3x^2 dx) = \frac{1}{3} \int \sec x^3 d(x^3) = \frac{1}{3} \ln | \sec x^3 + \tan x^3 | + C$

15. $\int \frac{\tan 3\theta}{\cos 3\theta} d\theta$

解：原式 $= \int \frac{\sin 3\theta}{\cos^2 3\theta} d\theta = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2 3\theta} d(\cos 3\theta) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos 3\theta} + C$

16. $\int \frac{\sec^2 \sqrt{2\theta - 3}}{\sqrt{2\theta - 3}} d\theta$

解：原式 $= \int \sec^2 \sqrt{2\theta - 3} \, d(\sqrt{2\theta - 3}) = \tan \sqrt{2\theta - 3} + C$

17. $\int x \sec^2 (5x^2 - 1) 9 x$

解：$\int x \sec^2 (5x^2 - 1) dx = \frac{1}{10} \int 10 x \sec^2 (5x^2 - 1) dx$

$$= \frac{1}{10} \int \sec^2 (5x^2 - 1) d (5x^2 - 1)$$

$$= \frac{\tan (5x^2 - 1)}{10} + C$$

18. $\int e^x \sec^2 e^x dx$

解：$\int e^x \sec^2 e^x \, dx = \int \sec^2 e^x \, de^x = \tan e^x + C$

19. $\int \tan t\, dt$

解：$\int \tan t\, dt=\int \frac{\sin t}{\cos t} dt = -\int \frac{d\cos t}{\cos t} =-\ln|\cos t|+C$

20. $\int \cot 3x\, dx$

解：$\int \cot 3x\, dx =\frac{1}{3}\int \frac{3\cos 3x}{\sin 3x} dx = \frac{1}{3}\int \frac{d\sin 3x}{\sin 3x}$

$=\frac{1}{3}\ln|\sin 3x|+C$

21. $\int \tan(5u-2)\, du$

解：原式$=\frac{1}{5}\int \tan(5u-2)(5du)=\frac{-1}{5}\ln|\cos(5u-2)|+C$

22. $\int 3u\cot(5u^2+1)\, du$

解：原式$=\frac{3}{10}\int \cot(5u^2+1)(10u\,du)=\frac{3}{10}\int \cot(5u^2+1)\,d(5u^2+1)$

$=\frac{3}{10}\ln|\sin(5u^2+1)|+C$

23. $\int \frac{\csc^2(\ln x)}{x} dx$

解：$\int \frac{\csc^2(\ln x)}{x} dx = \int \csc^2(\ln x)\, d(\ln x)$

$=-\cot(\ln x)+C$

24. $\int \frac{\cot^2 \ln 3y^2}{y} dy$

解：原式$=\frac{1}{2}\int \cot^2\ln 3y^2\left(\frac{2}{y}dy\right) =\frac{1}{2}\int(\csc^2\ln 3y^2-1)\,d(\ln 3y^2)$

$=\frac{1}{2}\int \csc^2\ln 3y^2\, d(\ln 3y^2)-\frac{1}{2}\int d(\ln 3y^2)$