JI HE XUE
GAOGUANDIAN XIA DE ZHONGXUE SHUXUE

中小学教师
继续教育用书

几何学

—— 高观点下的中学数学

梁希泉　编著

东北师范大学出版社

NNUP

东师社

JI HE XUE

GAOGUANDIAN XIA DE ZHONGXUE SHUXUE

ISBN 7-5602-2647-7

9 787560 226477 >

ISBN 7-5602-2647-7/O · 1

定价：10.20 元

全国中小学教师继续教育教材

JI HE XUE

——GAOGUANDIAN XIA DE

ZHONGXUE SHUXUE

■东北师范大学出版社

长　春

几　何　学

高观点下的中学数学

■主　编　梁希泉

□出 版 人：贾国祥
□责任编辑：王忠山
□封面设计：李冰彬
□责任校对：方 军
□责任印制：栾喜湖

全国中小学教师继续教育教材

几 何 学

——高观点下的中学教学

梁希泉 编著

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街5268号（130024）
电话：0431—5695744 5688470
传真：0431—5695744 5695734
网址：http://www.nenup.edu.cn
电子函件：Sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
吉林省吉新月历制版印刷有限公司印刷
2000年7月第1版 2004年1月第2次印刷
开本：850×1168 1/32 印张：9.5 字数：230千
印数：3 001 — 5 000册

ISBN 7－5602－2647－7/O·110 定价：10.20元

出版说明

历史将翻开新的一页，人类即将跨入21世纪。21世纪是充满机遇和挑战的世纪，是一个科学技术更加发达、竞争更加激烈、社会对人的素质要求更高的世纪。提高人的素质的关键在教育，振兴教育的关键在教师，只有造就一支高素质的教师队伍，才能满足21世纪教育发展的要求；而建立和完善适应21世纪需要的中小学教师继续教育制度，则是造就高素质中小学教师队伍的根本措施。

1998年6月，国家教育部师范教育司制定并印发了《中小学教师继续教育课程开发指南》（以下简称《指南》）。《指南》对中小学教师继续教育的教学内容和课程体系作了原则规定，对现阶段中小学教师继续教育提出了基本要求，这标志着我国中小学教师继续教育教学内容和课程体系的确立。

我们组织编写的这套教材是以《指南》为指导，按《指南》所规定的课程和内容要求而编写的。我们目前出版的这些教材，大部分都是《指南》中规定的必修课。根据中小学教师继续教育开展的情况，我们还将陆续组织编写出版《指南》中规定的其他教材。

在教材编写过程中，我们认真汲取了“八五”期间全国各地

开展中小学教师继续教育的宝贵经验，坚持从中小学教师队伍建设的需要和中小学的实际出发，力求反映先进的教育思想、教育理论，反映最新的学科知识发展动态、教育教学改革实践和研究成果，反映现代教育技术和先进教学方法，在确保科学性的前提下，进一步突出了教材内容的针对性、实效性、先进性和时代性，体现了中小学教师继续教育的特点和要求。

由于时间仓促，加之中小学教师继续教育教材建设尚处在起步阶段，缺乏足够的经验，缺憾之处在所难免，恳请广大读者不吝赐教，并在研究和探讨方面与我们进行更多的合作。

希望本教材能对广大中小学教师完善自我，提高自身素质，顺利地跨入21世纪，助一臂之力。

东北师范大学出版社

2000年7月

前　　言

代数、几何、分析是数学的核心内容，无论是远古时期还是近现代，数学这棵根深叶茂的大树就是以代数、几何、分析为主干的. 一方面，随着时间的推移，现代数学的内容在不断地发展；另一方面，现代数学的思想又在不断地渗透到经典数学的研究之中. 如何用现代数学的知识来充实自己，用最新的数学观点去理解初等数学的内容，从而提高自己的数学素养，这是每一位高等师范院校数学系学生与中学数学教师面临的重要课题. 只有很好地解决了这个问题，才能在现在或将来的中学数学教学中，真正做到居高临下，游刃有余.

1997 年，东北师范大学数学系承担了教育部的“高等师范教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革”项目. 与此同时，东北师范大学推出了“优师工程”. 在此项目与“工程”的推动下，我们重新修订了数学系的课程设置方案. 在新的培养方案中，提出了“两个阶段，1+3 模块”，即将学生四年的学习过程分为必修课与选修课分段，在课程培养方案中分为必修课一个大模块和三个选修课小模块. 三个选修课小模块之一是中学数学教育系列课模块，本书就是为这个模块准备的教材.

最近，教育部又推出了“园丁工程”. 这一工程旨在对本科毕

业后的中学教师进行继续教育. 东北师大数学系几年来在东北地区先后举办了几个中学数学教师继续教育培训班.在培训班上,我们讲授了"初等几何学""初等代数学"和"初等分析学"等课程. 本书是在几年来相应课程的讲稿基础上整理而成的. 在本书成书过程中,我系教师和一些中学教师对本书提出了不少宝贵意见,使本书增色不少;张永顺与孙传林先生始终给予具体帮助和指导;同时,东北师范大学及东北师大数学系对本书给予了大力支持. 在这里,我们对于给予本书关心支持的各位同志一并表示衷心的感谢.

我们不敢说这是一套完美的教材,但我们相信大多数中学数学教师对这套讲义会有新鲜的感觉. 阅读这套讲义,不需要高深的现代数学知识,但需要有一定的数学修养. 应该说,这套讲义是在没有成型的教材可模仿,在摸索的过程中编写而成的. 由于编者的水平所限,不妥之处一定不少,希望广大读者不吝批评指正.

梁希泉

2000年1月于长春

目　录

第一章　几何学的公理化方法

第二章　平行线理论与欧氏、非欧几何

第三章：几何变换与变换群

第四章 初等几何问题的向量解法

第五章 双曲几何的克莱因（F.Klein）模型

第一章　几何学的公理化方法

几何公理化方法是数学学科的重要方法之一，初等几何学一般说来都是用公理法建立的演绎体系，中学几何课本也不例外．为了系统地了解几何公理化方法，本章从它的发展历史、基本原理、内容、构造、遵循的逻辑原则、公理系统的模型、公理的等价关系等，完整地叙述了公理法的思想和方法；同时简要地介绍了欧几里得《几何原本》和欧氏几何学的经典的希尔伯特公理体系；最后，根据公理法的原理和要求分析了现行中学几何课本的公理体系和编写特点等．

§1.1　几何学的公理化方法概述

"几何"是一个翻译名词，是我国明朝数学家徐光启（公元1562年～1633年）翻译欧几里得名著《几何原本》时首先使用的，英文为"Geometry"，是由希腊文"Geometria"演变而来的．按字面分析，"Geo"的含义是"土地"，"metria"的含义是"测量"；实际上，几何学的产生确实与土地的测量有关．

几何学是一门源远流长、多姿多彩、硕果累累的数学分科．在

整个数学发展的进程中，一般说来，它总是走在其他各学科的前面，扮演着开路先锋的角色．例如：2000 多年前，欧几里得(Euclid，公元前 300 年，古希腊数学家)《几何原本》是最先形成的数学科学体系．在数学思想的突破上，解析几何以及非欧几何的产生，都可以称得起是数学思想上的重大突破和革命，前者导致常量数学到变量数学的转变，后者导致向空间的多样性的转变；在科学方法论的创建上，公理化方法的产生和坐标方法的产生，都是从几何学开始的．因此几何学是数学领域里一门极为重要的学科．

本节叙述了公理化的基本思想，它的四个组成部分和所遵循的逻辑原则，以及公理化方法的意义和作用等．

一、什么是公理化方法？

概括地说，几何学的公理化方法是从少数原始概念和公理出发，遵循逻辑原则建立几何学演绎体系的方法．

用公理化方法建立的数学学科体系一般是由以下四个部分组成：

(1) 原始概念的列举；

(2) 定义的叙述；

(3) 公理的列举；

(4) 定理叙述和证明．

这四个组成部分并不是独立地一部分一部分的叙述和展开，而是相互交叉、相互渗透、相互依赖地按照逻辑原则演绎展开．用这四个步骤建立的演绎体系可以概括地表示为

$$\left\{\begin{array}{l}\text{原始概念}\\\text{公理系统}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{由定义给出的一系列按先后}\\\text{次序排列的概念及由证明得出的一}\\\text{系列按先后次序排列的定理}\end{array}\right\}\Rightarrow\text{演绎体系}$$

其中原始概念及一系列由定义给出的概念明确了这门几何的

研究对象，即图形和关系；其中公理和一系列定理肯定了几何对象和对象之间的进一步的关系，即几何性质，两方面组成了这门几何学的抽象内容. 而原始概念、公理、定义、定理之间的逻辑关系则形成了这门几何学的逻辑结构. 一般说来，用公理化方法建立的几何学演绎体系总是由抽象内容和逻辑结构构成的统一体. 决定几何体系的基础是原始概念和公理，不同的基础决定不同的几何体系，例如欧氏几何、罗氏几何、黎曼几何、拓扑学等等.

几何体系的逻辑结构，主要取决于公理提出的先后次序，同一种几何体系由于公理系统的编排次序不同，可以产生不同的逻辑结构. 例如，中学几何教材中的"外角定理"和三角形合同的"角角边定理"是在平行公理之后提出的，因此可根据平行公理的推论"三角形内角和等于二直角"很容易给予证明. 但在下面提到的希尔伯特所建立的欧氏几何的体系中，由于这两个定理是在平行公理之前提出的，就不允许使用"三角形内角和"定理. 就是说同一欧氏几何可有多种逻辑结构，一个几何命题的证法不是通用的，它在这一逻辑结构中适用，而在另一个结构里可能不适用.

二、原始概念和定义的概念

恩格斯在《反杜林论》中曾对古典数学给出一个精辟的论断："纯数学的对象是现实世界的空间形式与数量关系，所以是非常现实的材料.""但是，为了能够从纯粹的状态中研究这些形式与关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关紧要的东西放在一边."*

恩格斯的论断可以这样理解：几何学的对象侧重研究现实物质世界的空间形式，而代数和函数等则侧重研究现实物质世界的数量关系. 恩格斯的这个论断指明了：

---

* 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社 1970 年版，第 35 页.

(1) 几何学的对象主要是研究现实世界的空间形式(小至个别物体、局部空间,大至宇宙空间);

(2) 几何对象来源于客观世界;

(3) 几何对象是抽象化和理想化的概念.

我们再来看一看现行初级中学课本《几何》第一册的引言中关于几何学研究对象的提法:"在生产建设和日常生活中,我们常常需要研究物体的形状、大小和位置关系,而不是物体的其他性质."又写道:"对于一个物体,当只研究它的形状、大小而不考虑其他性质时,我们就说它是几何体,简称为体.""体是由面围成的,…… 面和面相交于线. …… 线和线相交于点.""点、线、面或若干个点、线、面组合在一起,就成为几何图形.""在我们将要学习的几何里,只研究在同一平面内的图形 —— 平面图形."推而广之,立体几何就是研究立体图形的.

中学几何引言中这一段话,概括地指明了:

(1) 中学几何的研究对象是几何图形,它们是点、线、面和由点、线、面组合而成的其他图形,以及图形和图形间的关系(性质);

(2) 几何学的对象的客观原型是客观世界的物体和关系;

(3) 几何对象是抽象化和理想化的概念.

在人类的实践活动中,周围的许多事物经常地、反复地引起人们的感觉,形成印象,开始对物体的形状有了初步的认识;经过由此及彼的分析对比,从个别、特殊到一般的综合归纳,抛开具体的物体,抛开它们的化学的、物理的等等性质,逐步抓住表现形的本质属性,从各种形状的一般特征中,抽象出几何图形,于是就有了没有大小的点,只有长度而没有宽度的线,只有长度和宽度而没有厚薄的面,以及由点、线、面组合而成的几何体等等.这种从特殊到一般,从具体到抽象的过程,是人类对形的认识的飞跃,这样才有了几何图形,才能够从纯粹的状态中研究空间形式与关系,从而产生了几何学.

例如，“平面”是中学几何中的重要概念．它就是人们对客观存在的水平面、平滑的石头面以及一切具有平滑的物体表面等等形状中，抓住了它们所共有的平滑、没有厚度、可以任意延展等所占有的空间形式上的特征，抛开了它们所具有的化学和物理等等性质，抽象出“平面”概念．这时它已不是某一具体物体的表面，而是一个抽象化、理想化的思维对象，即概念化了．随着实践的深入，人们对“平面”的认识也不断地深化，更加认清了“平面”的本质属性：

直线有两个点在平面上，则直线上的点都在平面上；

两个平面如果相交，则必交出一条直线；

过不共线的三个点，有且只有一个平面．

此外还有其他属性，这样就把平面和曲面区别开来，“平面”的内涵也就逐步明确起来．

几何对象也是理想化的．实际上，球的客观原型总是凸凹不平的，研究这样十分复杂的曲面体，很难设想会得到现在的关于球的面积公式和体积公式．只有理想化的球才可以推出现在的公式，而利用这个理想化的公式可以研究与球相近似的客观原型，如地球、太阳、足球等的面积和体积，虽然和原型相比会产生一些误差，但可以获得足够精确的结果．

几何对象都是通过概念的形式表述出来的，公理化几何的概念分为原始概念和定义概念两种．

1．原始概念

原始概念是作为研究内容提出的而本身又不加定义的概念．

原始概念包含原始元素（图形）和原始关系两类．

原始元素又名“元名”，是组成几何图形的最简单、最基本的几何元素．原始关系又名“元谊”，是原始图形间的基本几何关系．

从后面的希尔伯特公理系统纲要中可以看出，该系统的原始概念有：

原始元素：点、直线、平面.

原始关系：结合关系、介于关系、线段合同关系和角合同关系.

希尔伯特对原始概念的选择，既少而精，又足以根据它们定义出其他所有的概念，这是难能可贵的，可称得上是一个典范的工作.

用公理化方法建立几何体系，为什么要列举一些没有定义的原始概念？每个概念都加以定义不是更好吗？

实际上，每一个概念都加以定义是不可能的.这是因为按照逻辑的原则，在定义一个概念时，必须以某些已知概念为根据，而这些已知概念又要根据它们前面的已知概念来定义，这样追溯下去是无穷尽的，甚至出现某些概念再没有已知概念来给它们下定义了.为了避免这种“无限的回复”，最初需要选择少数不加定义的原始概念作为基础来定义所有其余的概念.

欧几里得在他的《几何原本》中，试图对每个概念都下定义，例如《几何原本》第一卷开头的定义.于是，出现了“面只有长度和宽度”，“面的界是线”，“平面是与其上的直线看齐的面”等“定义”，不仅令人费解，而且无用.实际上这都不能叫做数学定义，而只是借助于其他的概念对“面”和“平面”进行直观描述罢了.

原始概念没有定义，但它们所具有的属性隐含在公理之中，即通过公理来确定、来制约，或者说来间接定义.

例如，中学立体几何中，开头给出以下三条公理：

公理 1　如果一直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有点都在这个平面内.

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.

公理 3　经过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面.

就是规定平面属性、制约平面的最基本的公理.严格地说，欧氏平面是满足欧氏几何公理系统中全部公理的几何图形.

2. 定义的概念

定义是揭示概念的本质属性的逻辑方法. 概念有明确的定义才能从本质上把不同的概念区别开来.

通过定义不仅可以明确概念，不断获得新的概念，丰富几何内容，而且从实质上看，这些定义不过是旧的概念按一定的关系的组合，会使概念和定理的叙述得以简化. 实际上，用公理化方法建立的几何体系所定义的概念，无非是由少数原始概念遵循公理的要求和一定条件组合而成的新的概念.

一个定义是由被定义的概念、定义概念和联结词三个部分组成. 被定义概念也称被定义项，就是要揭示出其本质属性的概念(用以代替旧概念的组合)；定义概念也称定义项，是用来揭示被定义概念属性的那些已知的旧概念；被定义概念与定义概念之间用联结词联结起来，几何中常用的有“叫做”“称为”“是”等. 一般说来，联结词前面是定义的概念，后面是被定义的概念.

下定义的方法有多种，下面举几个常用的方法.

属加种差的定义　这是一种常用的、古典的定义方法. 其公式为

种差 + 邻近的属 = 被定义概念

例如四边形的属种关系有

$$\text{四边形} —— \begin{cases}\text{梯形} \\ \text{平行四边行} —— \begin{cases}\text{矩形} —— \text{正方形} \\ \text{菱形} —— \text{正方形}\end{cases}\end{cases}$$

其中符号“——”前面的是属，后面的是种. 如四边形与平行四边形、四边形与正方形都有属种关系. 两个相邻的属种，称为**邻近的属种**，如四边形和平行四边形、菱形和正方形. 同一个种的本质属性的差别称为**种差**.

利用属加种差的方法，可对四边形这一类图形给出如下定义：