21世纪高职高专基础课教材

GAO DENG SHU XUE

高等数学（上）

主　编　耿悦敏
副主编　敖屹兰

华南理工大学出版社

策　　划：吴兆强
责任编辑：吴兆强
封面设计：臻祎设计

GAO DENG SHU XUE

高等数学（上）

ISBN 978-7-5623-3143-8

9 787562 331438 >

定价：26.00元（上下册）

21世纪高职高专基础课教材

GAO DENG SHU XUE

高等数学（上）

主　编　耿悦敏

副主编　敖屹兰

华南理工大学出版社

·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/耿悦敏主编. —广州:华南理工大学出版社,2009.8
ISBN 978-7-5623-3143-8

Ⅰ.高… Ⅱ.耿… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 119538 号

总 发 行:华南理工大学出版社(广州五山华南理工大学 17 号楼,邮编 510640)
营销部电话:020-87113487 87110964 87111048(传真)
E-mail:z2cb@scut.edu.cn **http://www.scutpress.com.cn**
责任编辑:吴兆强
印 刷 者:广州市穗彩彩印厂
开 本:787 mm×1092 mm 1/16 **印张**:13.25 **字数**:317 千
版 次:2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷
印 数:1～3000 册
定 价:26.00 元(上下册)

前　言

为了适应高等职业技术学院培养高等技术应用型人才的需要，以及根据我院相应专业课程对数学课的要求而编写了本教材．全书内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用等．为有效地与初等数学衔接，本书特别增加了预备知识的章节．

在编写过程中，本着以应用为目的，力求满足专业发展的需要，以必需、够用为度的原则，侧重加强基础知识，减少理论证明，通过几何直观和具体实例来阐明理论，注重培养学生的分析问题和解决问题的能力．本书重视理论联系实际，内容通俗易懂，有针对性和实用性，体现了高职高专数学课的特色．

本书每章都配有习题，同时编写了内容详尽的习题解答，以方便学生在学习过程中参考，提高学生的学习效率．也节省了教学时间，缓解数学课时偏紧的矛盾．

本书带“ * ”的章节可供有关专业选用．本课程的教学时数大约为 90 学时，打“ * ”号的内容要另加学时．

本书由广东交通职业技术学院耿悦敏担任主编，敖屹兰副教授担任副主编．

本书在编写过程中得到了华南理工大学出版社的热情支持，在此表示衷心的感谢．

由于编者的水平和经验有限，书中难免有错误和不妥之处，恳切希望读者批评指正．

编　者

2009 年 3 月

目 录

绪 论

预备知识

微积分是高等数学的基础,它研究的对象是函数,主要是初等函数,研究的主要工具是极限.有关函数的内容在中学阶段已有系统讲授,为使同学们更好地学习和掌握本教材,特增加本章的预备知识,供同学们在学习过程中参考、查阅.

0.1 函数的概念

定义 0.1 设 x、y 是两个变量,D 是一个给定的数集,如果对于每个数 $x \in D$,变量 y 按照一定法则总有确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$,数集 D 叫做这个函数的定义域,x 叫做自变量,y 叫做因变量.

定义 0.2 已知函数 $y=f(x)$,从表达式 $y=f(x)$ 出发,经过代数恒等变形,将变量 x 表示为 y 的表达式,若这个对应规则表示变量 x 为 y 的函数,则称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$.

由于习惯用变量记号 x 表示自变量,用变量记号 y 表示函数,因此在反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的表达式中,再将变量记号 x 改写为 y,变量记号 y 改写为 x,得到函数表达式 $y=f^{-1}(x)$,于是也称函数 $y=f^{-1}(x)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

函数 $y=f(x)$ 的图形与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的(见图 0-1).

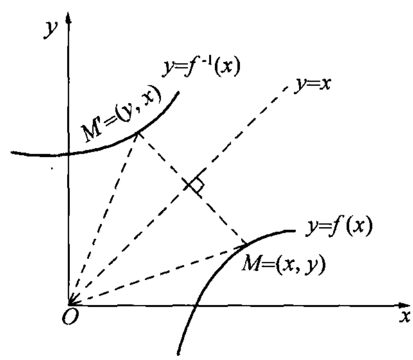

图 0-1

0.2 函数的基本性态

0.2.1 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于 D 中的任何 x,都有 $f(x)=f(-x)$,则称 $y=f(x)$ 为偶函数;如果有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

0.2.2 单调性

设 x_1 和 x_2 为区间 (a,b) 内的任意两个数,若当 $x_1<x_2$ 时,函数 $y=f(x)$ 满足

$f(x_1)<f(x_2)$,则称该函数在区间(a,b)内单调增加,或称递增;若当$x_1<x_2$时,有$f(x_1)>f(x_2)$,则称该函数在区间(a,b)内单调减少,或称递减.

0.2.3 有界性

设函数在集合D上有定义,若存在正数M,使对任何$x\in D$,对应的函数值$f(x)$都有$\left|f(x)\right|\leqslant M$,则称函数$f(x)$在$D$上有界.

0.2.4 周期性

设函数$y=f(x)$的定义域为D,若存在正数T,使得对于一切实数$x\in D$都有$f(x+T)=f(x)$,则称$y=f(x)$为周期函数.

0.3 初等函数

0.3.1 基本初等函数及其图形

0.3.1.1 幂函数$y=x^{\alpha}$(α为任意实数)

幂函数$y=x^{\alpha}$的定义域与α的取值有关,它的图形见图0-2.

0.3.1.2 指数函数$y=a^x$($a>0$,且$a\neq1$)

指数函数定义域D为$(-\infty,+\infty)$,值域是$(0,+\infty)$. 它的图形过$(0,1)$点,其图形见图0-3.

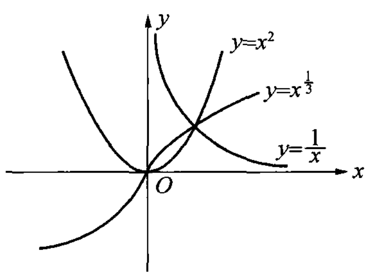

图0-2

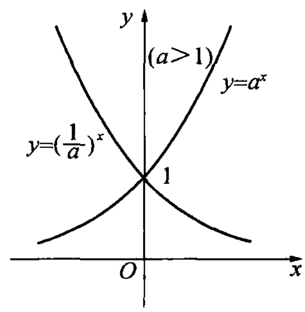

图0-3

0.3.1.3 对数函数$y=\log_a x$($a>0$,且$a\neq1$)

当$a=10$时,称为常用对数,记为$y=\lg x$. 当$a=\mathrm{e}$时,称为自然对数,记为$y=\ln x$. 它是指数函数$y=a^x$的反函数,其定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$. 其图形见图0-4.

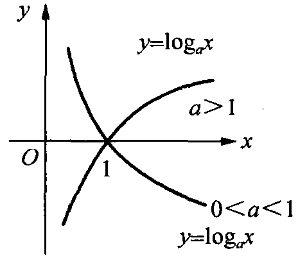

图0-4

0.3.1.4 三角函数

如图0-5,在RtΔABC中,设锐角x的对边为a,邻边为b,斜边为c,则有

$$\sin x=\frac{\text{对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}$$

$$\cos x=\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}$$

$$\tan x=\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}=\frac{a}{b}$$

$$\cot x=\frac{\text{邻边}}{\text{对边}}=\frac{b}{a}$$

$$\sec x=\frac{\text{斜边}}{\text{邻边}}=\frac{c}{b}$$

$$\csc x=\frac{\text{斜边}}{\text{对边}}=\frac{c}{a}$$

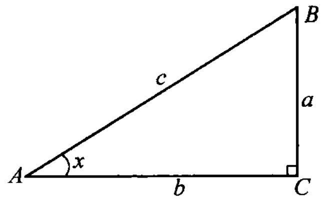

图 0-5

$\sin x$、$\cos x$、$\tan x$、$\cot x$ 的图形分别见图 0-6、图 0-7、图 0-8 和图 0-9.

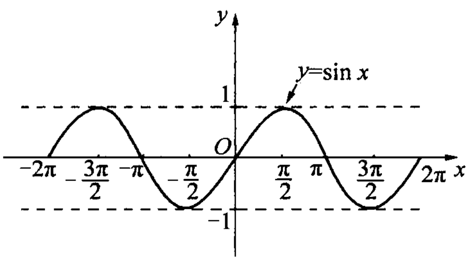

图 0-6

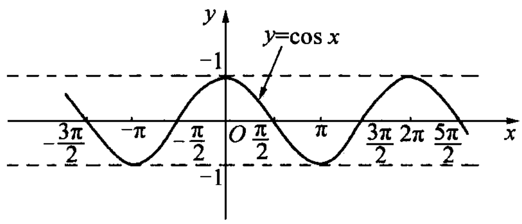

图 0-7

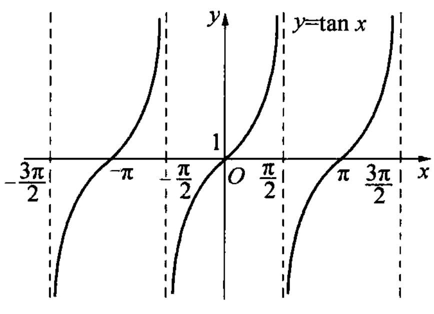

图 0-8

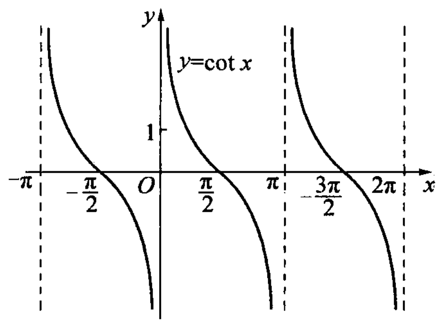

图 0-9

0.3.1.5　反三角函数

正弦函数 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数叫做反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$，其定义域 D 为$[-1,1]$，图形见图 0-10；

余弦函数 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的反函数叫做反余弦函数,记作 $y=\arccos x$,其定义域 D 为$[-1,1]$,图形见图 0-11;

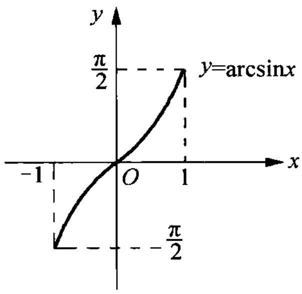

图 0-10

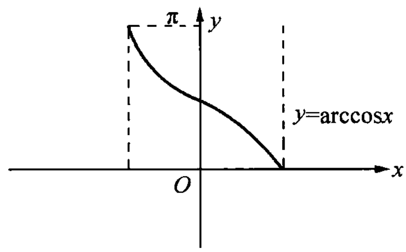

图 0-11

正切函数 $y=\tan x$ 在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上的反函数叫做反正切函数,记作 $y=\arctan x$,其定义域 D 为$(-\infty,+\infty)$,图形见图 0-12;

余切函数 $y=\cot x$ 在$(0,\pi)$上的反函数叫做反余切函数,记作 $y=\operatorname{arccot} x$,其定义域 D 为$(-\infty,+\infty)$,图形见图 0-13.

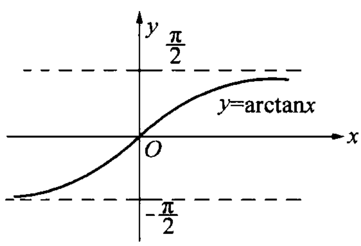

图 0-12

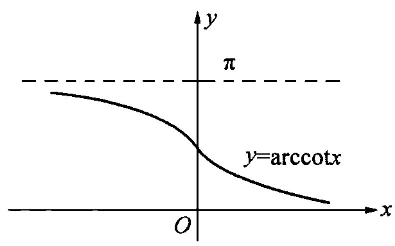

图 0-13

0.3.2 复合函数

定义 0.3 如果 y 是 u 的函数:$y=f(u)$,而 u 是 x 的函数:$u=\varphi(x)$,当 x 在某一区间上取值时,相应地 u 值可使 y 有定义,则称 y 是 x 的复合函数,记作 $y=f(u)=f[\varphi(x)]$. 其中,x 是自变量,u 称为中间变量.

0.3.3 初等函数

定义 0.4 由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合构成,并且可以用一个数学式子表示的函数,叫做初等函数.

注意:在初等函数的定义中已明确指出是用一个式子表示的函数,所以,分段函数一般来说都是非初等函数.

0.4 其他应掌握的运算法则及公式

0.4.1 幂的运算法则

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

0.4.2 对数的运算法则

$$\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n;$$

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n;$$

$$\log_a m^n = n\log_a m;$$

$$a^{\log_a m} = m;$$

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

0.4.3 三角函数

0.4.3.1 和差化积公式

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

0.4.3.2 积化和差公式

$$\sin\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\ \sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\ \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)].$$

0.4.3.3 二倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\ \cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

0.4.3.4 平方关系公式

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1\ ;$$

$$1+\tan^2 x=\sec^2 x\ ;$$

$$1+\cot^2 x=\csc^2 x\ .$$

0.4.4 因式分解公式

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\ ;$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\ ;$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})\quad (n\ \text{为正整数}).$$

0.4.5 等比数列的前 n 项和公式

首项 $a\neq 0$,公比 $q\neq 1$ 的等比数列 $a,aq,aq^2,\cdots,aq^{n-1},\cdots$的前 n 项和公式为

$$S_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

第1章　极限与连续

极限概念是微积分中最基本和最重要的概念，它是从数量上描述变量在无限变化过程中的变化趋势，微积分就是以极限作为基本工具，来研究函数的微分与积分的理论与应用的一门学科．在微积分中几乎所有的基本概念（如连续、导数等）都是用极限来定义的，因此，很好地理解和掌握极限概念是学好微积分的关键，同时也是由初等数学迈入高等数学的一个重要阶梯.

1.1　数列的极限

1.1.1　实例：求圆的面积

首先作圆的内接正六边形，把它的面积记为 A_1；再作内接正 12 边形，其面积记为 A_2；再作内接正 24 边形，其面积记为 A_3；依次做下去……把内接正 $6\times2^{n-1}$ 边形的面积记为 $A_n(n=1,2,3,\cdots)$，于是得到一系列圆的内接正多边形的面积 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$（如图 1－1 所示）.

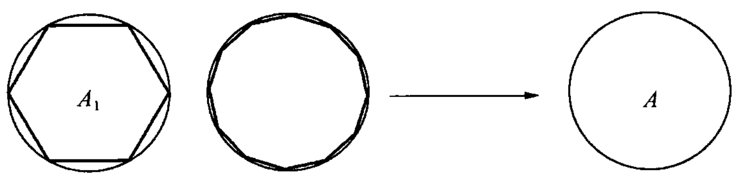

图 1－1

$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 构成一列有次序的数，当 n 越大，内接正多边形与圆的差别越小，从而以 A_n 作为圆面积的近似值也越精确，但是无论 n 如何大，只要 n 是一个固定的数，A_n 总是多边形的面积，而不是圆的面积，因此，设想让 n 无限增大，即内接正多边形的边数无限增大，在这个过程中，内接正多边形无限地接近于圆，同时 A_n 随 n 的增大，它的变化趋势将无限地接近于某一确定的数值，这个确定的数值就是圆面积，该数值在数学上称为上面这列有序的数 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 当 n 无限增大时的极限.

1.1.2　数列极限的定义

解决上面这类问题的思路是：为了计算某个量的精确值 A，先求 A 的一系列的近似值 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$，让 n 无限增大，观察这些值的变化趋势，看 A_n 与哪个定值无限趋近，这个