

21 世纪高职高专基础课教材

GAO DENG SHU XUE

高等数学



主 编 耿悦敏

副主编 敖屹兰

华南理工大学出版社

策 划: 吴兆强
责任编辑: 吴兆强
封面设计: 臻玮设计

GAO DENG SHU XUE

高等数学 (上)

ISBN 978-7-5623-3143-8



9 787562 331438 >

定价: 26.00元 (上下册)

21 世纪高职高专基础课教材

GAO DENG SHU XUE

高等数学



主 编 耿悦敏

副主编 敖屹兰

华南理工大学出版社

· 广州 ·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/耿悦敏主编. —广州:华南理工大学出版社,2009.8
ISBN 978-7-5623-3143-8

I. 高… II. 耿… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 119538 号

总发行:华南理工大学出版社(广州五山华南理工大学 17 号楼,邮编 510640)

营销部电话:020-87113487 87110964 87111048(传真)

E-mail:z2cb@scut.edu.cn

<http://www.scutpress.com.cn>

责任编辑:吴兆强

印刷者:广州市穗彩彩印厂

开本:787 mm × 1092 mm 1/16 印张:13.25 字数:317 千

版次:2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷

印数:1 ~ 3000 册

定价:26.00 元(上下册)

版权所有 盗版必究

前 言

为了适应高等职业技术学院培养高等技术应用型人才的需要,以及根据我院相应专业课程对数学课的要求而编写了本教材.全书内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用等.为有效地与初等数学衔接,本书特别增加了预备知识的章节.

在编写过程中,本着以应用为目的,力求满足专业发展的需要,以必需、够用为度的原则,侧重加强基础知识,减少理论证明,通过几何直观和具体实例来阐明理论,注重培养学生的分析问题和解决问题的能力.本书重视理论联系实际,内容通俗易懂,有针对性和实用性,体现了高职高专数学课的特色.

本书每章都配有习题,同时编写了内容详尽的习题解答,以方便学生在学习过程中参考,提高学生的学习效率.也节省了教学时间,缓解数学课时偏紧的矛盾.

本书带“*”的章节可供有关专业选用.本课程的教学时数大约为90学时,打“*”号的内容要另加学时.

本书由广东交通职业技术学院耿悦敏担任主编,敖屹兰副教授担任副主编.

本书在编写过程中得到了华南理工大学出版社的热情支持,在此表示衷心的感谢.

由于编者的水平和经验有限,书中难免有错误和不妥之处,恳切希望读者批评指正.

编 者

2009年3月

目 录

绪论	1
0.1 函数的概念	1
0.2 函数的基本性态	1
0.3 初等函数	2
0.4 其他应掌握的运算法则及公式	5
第1章 极限与连续	7
1.1 数列的极限	7
1.1.1 实例:求圆的面积	7
1.1.2 数列极限的定义	7
1.1.3 数列极限的四则运算	9
1.2 函数的极限	11
1.2.1 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限	11
1.2.2 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限	12
1.2.3 函数极限的性质	14
1.3 极限的运算	15
1.4 两个重要极限	19
1.4.1 函数极限存在的判别法	19
1.4.2 第一个重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	19
1.4.3 第二个重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	21
1.5 无穷小与无穷大	23
1.5.1 无穷小	23
1.5.2 无穷大	24
1.5.3 无穷大与无穷小的关系	24
1.5.4 无穷小的比较	25
1.6 函数的连续性	27
1.6.1 函数的增量	27

1.6.2 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的连续性	28
1.7 连续函数的运算与初等函数的连续性	30
1.7.1 连续函数的运算	30
1.7.2 初等函数的连续性	31
1.8 闭区间上连续函数的性质	32
1.8.1 最大值与最小值定理	32
1.8.2 介值定理	32
综合练习题	33
第2章 导数与微分	36
2.1 导数的概念	36
2.1.1 导数问题举例	36
2.1.2 导数的定义	37
2.1.3 导数的几何意义	39
2.1.4 可导与连续的关系	40
2.2 求导法则	41
2.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则	41
2.2.2 复合函数的求导法则	43
2.2.3 反函数的求导法则	44
2.3 高阶导数	47
2.3.1 高阶导数的概念	47
2.4 其他求导法	49
2.4.1 隐函数求导法	49
2.4.2 对数求导法	50
2.4.3 由参数方程所确定的函数的导数	50
2.5 微分	51
2.5.1 微分的概念	51
2.5.2 微分的基本公式及运算法则	52
综合练习题	55
第3章 导数的应用	56
3.1 中值定理 洛必达法则	56

3.1.1 中值定理	56
3.1.2 洛必达法则	58
3.2 函数的单调性及其极值	62
3.2.1 函数单调性的判别法	62
3.2.2 函数的极值及其求法	64
3.3 函数的最大值和最小值	66
3.4 曲线的凹凸性与拐点	69
3.4.1 曲线凹凸性定义	69
3.4.2 拐点	71
3.5 函数图形的描绘	72
3.5.1 渐近线	72
3.5.2 函数图形的描绘	73
综合练习题	75
第4章 不定积分	77
4.1 不定积分的概念和性质	77
4.1.1 原函数	77
4.1.2 不定积分的概念	78
4.1.3 不定积分的基本公式	79
4.1.4 不定积分的性质	80
4.2 换元积分法	82
4.2.1 第一类换元积分法(凑微分法)	82
4.2.2 第二类换元积分法	86
4.3 分部积分法	89
*4.4 微分方程初步	93
4.4.1 微分方程的概念	93
4.4.2 可分离变量的微分方程	95
综合练习题	96
第5章 定积分	100
5.1 定积分的概念与性质	100
5.1.1 引例	100

5.1.2 定积分的定义	102
5.1.3 定积分的几何意义	103
5.1.4 定积分的性质	104
5.2 牛顿-布莱尼茨公式	107
5.2.1 积分上限函数	107
5.2.2 牛顿-莱布尼茨公式	108
5.3 定积分的换元积分法与分部积分法	111
5.3.1 定积分的换元法	111
5.3.2 定积分的分部积分法	113
*5.4 广义积分	114
5.4.1 无穷区间上的广义积分	114
5.4.2 被积函数有无穷间断点的广义积分	116
综合练习题	118
第6章 定积分的应用	120
6.1 定积分在几何方面的应用	120
6.1.1 平面图形的面积	121
6.1.2 旋转体的体积	124
6.2 定积分在物理方面的应用	126
6.2.1 功	126
6.2.2 液体的压力	127
6.3 平均值	130
综合练习题	131

绪 论

预备知识

微积分是高等数学的基础,它研究的对象是函数,主要是初等函数,研究的主要工具是极限.有关函数的内容在中学阶段已有系统讲授,为使同学们更好地学习和掌握本教材,特增加本章的预备知识,供同学们在学习过程中参考、查阅.

0.1 函数的概念

定义 0.1 设 x, y 是两个变量, D 是一个给定的数集,如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则总有确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x)$, 数集 D 叫做这个函数的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量.

定义 0.2 已知函数 $y = f(x)$, 从表达式 $y = f(x)$ 出发,经过代数恒等变形,将变量 x 表示为 y 的表达式,若这个对应规则表示变量 x 为 y 的函数,则称为函数 $y = f(x)$ 的反函数,记作 $x = f^{-1}(y)$.

由于习惯用变量记号 x 表示自变量,用变量记号 y 表示函数,因此在反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的表达式中,再将变量记号 x 改写为 y , 变量记号 y 改写为 x , 得到函数表达式 $y = f^{-1}(x)$, 于是也称函数 $y = f^{-1}(x)$ 为函数 $y = f(x)$ 的反函数.

函数 $y = f(x)$ 的图形与它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y = x$ 对称的(见图 0-1).

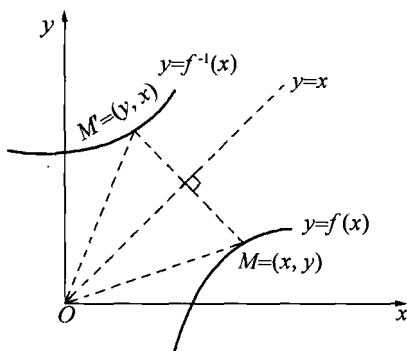


图 0-1

0.2 函数的基本性态

0.2.1 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于 D 中的任何 x , 都有 $f(x) = f(-x)$, 则称 $y = f(x)$ 为偶函数;如果有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

0.2.2 单调性

设 x_1 和 x_2 为区间 (a, b) 内的任意两个数,若当 $x_1 < x_2$ 时,函数 $y = f(x)$ 满足

$f(x_1) < f(x_2)$, 则称该函数在区间 (a, b) 内单调增加, 或称递增; 若当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称该函数在区间 (a, b) 内单调减少, 或称递减.

0.2.3 有界性

设函数在集合 D 上有定义, 若存在正数 M , 使对任何 $x \in D$, 对应的函数值 $f(x)$ 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界.

0.2.4 周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 若存在正数 T , 使得对于一切实数 $x \in D$ 都有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 为周期函数.

0.3 初等函数

0.3.1 基本初等函数及其图形

0.3.1.1 幂函数 $y = x^\alpha$ (α 为任意实数)

幂函数 $y = x^\alpha$ 的定义域与 α 的取值有关, 它的图形见图 0-2.

0.3.1.2 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)

指数函数定义域 D 为 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $(0, +\infty)$. 它的图形过 $(0, 1)$ 点, 其图形见图 0-3.

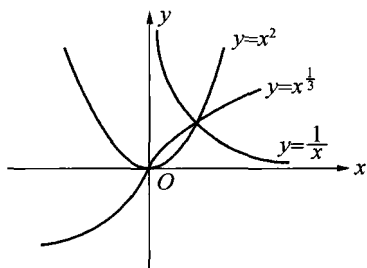


图 0-2

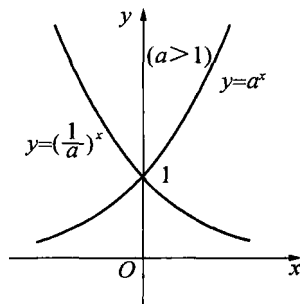


图 0-3

0.3.1.3 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)

当 $a = 10$ 时, 称为常用对数, 记为 $y = \lg x$. 当 $a = e$ 时, 称为自然对数, 记为 $y = \ln x$. 它是指数函数 $y = a^x$ 的反函数, 其定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$. 其图形见图 0-4.

0.3.1.4 三角函数

如图 0-5, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 设锐角 x 的对边为 a , 邻边为 b , 斜边为 c , 则有

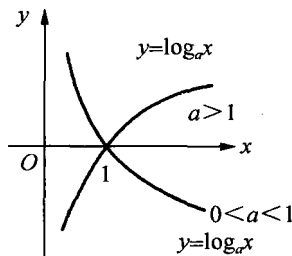


图 0-4

$$\sin x = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos x = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan x = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot x = \frac{\text{邻边}}{\text{对边}} = \frac{b}{a}$$

$$\sec x = \frac{\text{斜边}}{\text{邻边}} = \frac{c}{b}$$

$$\csc x = \frac{\text{斜边}}{\text{对边}} = \frac{c}{a}$$

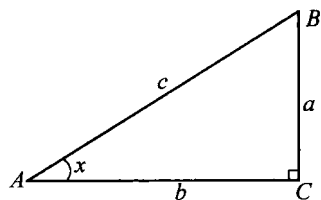


图 0-5

$\sin x$ 、 $\cos x$ 、 $\tan x$ 、 $\cot x$ 的图形分别见图 0-6、图 0-7、图 0-8 和图 0-9.

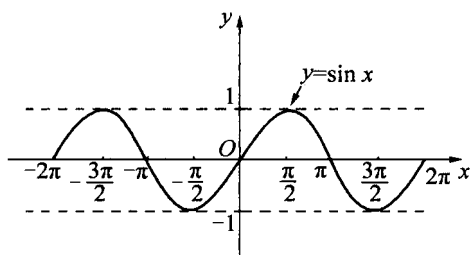


图 0-6

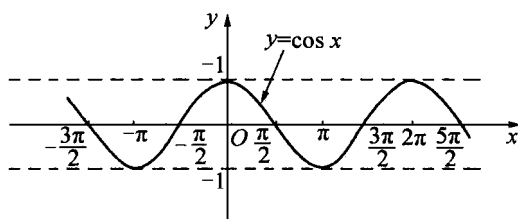


图 0-7

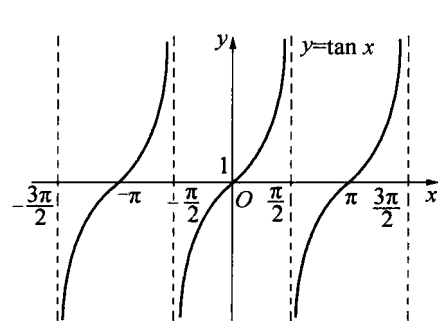


图 0-8

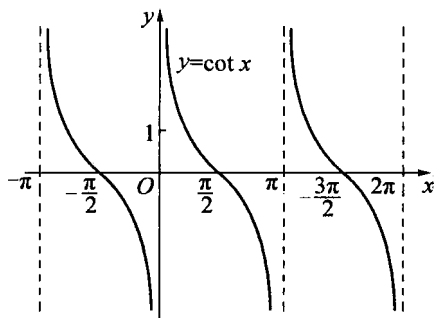


图 0-9

0.3.1.5 反三角函数

正弦函数 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的反函数叫做反正弦函数, 记作 $y = \arcsin x$, 其定义域 D 为 $[-1, 1]$, 图形见图 0-10;

余弦函数 $y = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的反函数叫做反余弦函数, 记作 $y = \arccos x$, 其定义域 D 为 $[-1, 1]$, 图形见图 0-11;

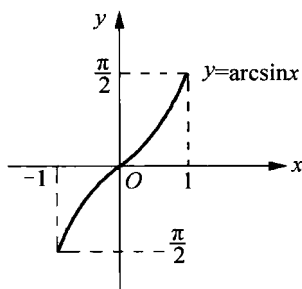


图 0-10

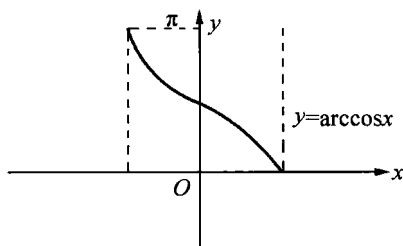


图 0-11

正切函数 $y = \tan x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的反函数叫做反正切函数, 记作 $y = \arctan x$, 其定义域 D 为 $(-\infty, +\infty)$, 图形见图 0-12;

余切函数 $y = \cot x$ 在 $(0, \pi)$ 上的反函数叫做反余切函数, 记作 $y = \operatorname{arccot} x$, 其定义域 D 为 $(-\infty, +\infty)$, 图形见图 0-13.

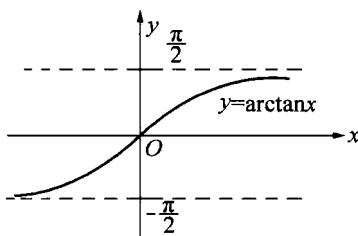


图 0-12

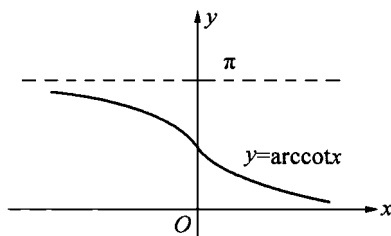


图 0-13

0.3.2 复合函数

定义 0.3 如果 y 是 u 的函数: $y = f(u)$, 而 u 是 x 的函数: $u = \varphi(x)$, 当 x 在某一区间上取值时, 相应地 u 值可使 y 有定义, 则称 y 是 x 的复合函数, 记作 $y = f(u) = f[\varphi(x)]$. 其中, x 是自变量, u 称为中间变量.

0.3.3 初等函数

定义 0.4 由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合构成, 并且可以用一个数学式子表示的函数, 叫做初等函数.

注意: 在初等函数的定义中已明确指出是用一个式子表示的函数, 所以, 分段函数一般来说都是非初等函数.

0.4 其他应掌握的运算法则及公式

0.4.1 幂的运算法则

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

0.4.2 对数的运算法则

$$\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n;$$

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n;$$

$$\log_a m^n = n \log_a m;$$

$$a^{\log_a m} = m;$$

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

0.4.3 三角函数

0.4.3.1 和差化积公式

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

0.4.3.2 积化和差公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)];$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)];$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)];$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)].$$

0.4.3.3 二倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

0.4.3.4 平方关系公式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 ;$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x ;$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x .$$

0.4.4 因式分解公式

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) ;$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) ;$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (n \text{ 为正整数}) .$$

0.4.5 等比数列的前 n 项和公式

首项 $a \neq 0$, 公比 $q \neq 1$ 的等比数列 $a, aq, aq^2, \cdots, aq^{n-1}, \cdots$ 的前 n 项和公式为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} .$$

第1章 极限与连续

极限概念是微积分中最基本和最重要的概念,它是从数量上描述变量在无限变化过程中的变化趋势,微积分就是以极限作为基本工具,来研究函数的微分与积分的理论与应用的一门学科.在微积分中几乎所有的基本概念(如连续、导数等)都是用极限来定义的,因此,很好地理解和掌握极限概念是学好微积分的关键,同时也是由初等数学迈入高等数学的一个重要阶梯.

1.1 数列的极限

1.1.1 实例:求圆的面积

首先作圆的内接正六边形,把它的面积记为 A_1 ;再作内接正 12 边形,其面积记为 A_2 ;再作内接正 24 边形,其面积记为 A_3 ;依次做下去……把内接正 $6 \times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 $A_n (n=1,2,3,\cdots)$,于是得到一系列圆的内接正多边形的面积 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ (如图 1-1 所示).

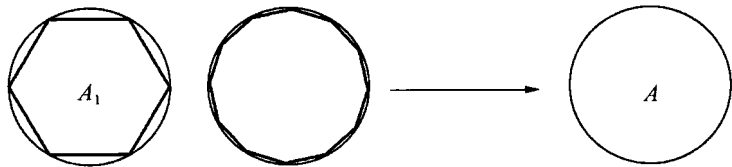


图 1-1

$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 构成一列有次序的数,当 n 越大,内接正多边形与圆的差别越小,从而以 A_n 作为圆面积的近似值也越精确,但是无论 n 如何大,只要 n 是一个固定的数, A_n 总是多边形的面积,而不是圆的面积,因此,设想让 n 无限增大,即内接正多边形的边数无限增大,在这个过程中,内接正多边形无限地接近于圆,同时 A_n 随 n 的增大,它的变化趋势将无限地接近于某一确定的数值,这个确定的数值就是圆面积,该数值在数学上称为上面这列有序的数 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 当 n 无限增大时的极限.

1.1.2 数列极限的定义

解决上面这类问题的思路是:为了计算某个量的精确值 A ,先求 A 的一系列的近似值 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$,让 n 无限增大,观察这些值的变化趋势,看 A_n 与哪个定值无限趋近,这个