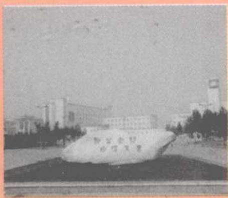
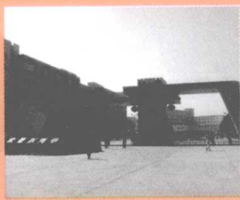
普通高等教育基础课规划教材

概率论与数理统计学习指导

王逸迅 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

概率论与数理统计学习指导

主　编　王逸迅
参　编　马新民　张瑞平　张德生

机械工业出版社

本书是《概率论与数理统计》（第2版）的配套学习指导书，按教材章节顺序编排，与教材保持一致。本书汇集了现行的高等学校概率论与数理统计及历年硕士研究生入学考试试题中精选的典型习题，并作出了详尽的解答。题型包括：填空题、选择题、计算（证明）题。内容包括：随机事件与概率，随机变量与概率分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理，数理统计的基本概念与参数估计，假设检验，方差分析及回归分析。本书可作为高等理工科各个专业本科生、研究生的概率论与数理统计课程的辅助教材或复习参考书，也可作为报考硕士研究生的考前复习与练习指导书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指导/王逸迅主编.
—北京：机械工业出版社，2010.4
普通高等教育基础课规划教材
ISBN 978-7-111-29886-1

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第032146号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫　孙志强
版式设计：张世琴　封面设计：路恩中
责任校对：李锦莉　责任印制：杨　曦
北京京丰印刷厂印刷
2010年4月第1版·第1次印刷
169mm×239mm · 19.5印张 · 377千字
标准书号：ISBN 978-7-111-29886-1
定价：32.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：（010）88361066
销售一部：（010）68326294
销售二部：（010）88379649
读者服务部：（010）68993821

网络服务
门户网：http：//www.cmpbook.com
教材网：http：//www.cmpedu.com

前　言

本书是机械工业出版社出版的普通高等教育基础课规划教材《概率论与数理统计》（第 2 版）一书的配套学习指导书。全书按教材各章节顺序编排，与教材保持一致。本书的目的是通过对概率论与数理统计中典型题的分析，帮助学生正确理解基本概念，掌握解题的方法与技巧，并通过适量的练习题，达到复习巩固教学内容、培养学生分析问题和解决问题能力的目的。

本书汇集了现行的高等学校概率论与数理统计教材及历年硕士研究生入学考试试题中精选的典型习题，并作出了详尽的解答。题型包括：填空题，选择题，计算（证明）题。内容包括：随机事件与概率，随机变量与概率分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理，数理统计的基本概念与参数估计，假设检验，方差分析及回归分析等。

本书可以作为高等学校理工科各个专业本科生、研究生的概率论与数理统计课程的辅助教材或复习参考书，也可以作为报考硕士研究生的考前复习与练习指导书。

本书第 1 章、第 2 章由马新民编写，第 3 章、第 4 章由张瑞平编写，第 5 章、第 6 章由王逸迅编写，第 7 章、第 8 章由张德生编写，全书由王逸迅统稿。机械工业出版社对于本书的出版给予了大力的支持和帮助，在此谨致谢意。

由于编者的水平有限，书中的缺点和错误在所难免，若有疏漏、不妥之处，恳请同行专家和广大读者批评指正。

编　者

目　　录

第 1 章　随机事件与概率

一、内容提要

(一) 随机试验与随机事件

1. 随机试验

凡是满足下列三个条件的试验称为**随机试验**：

(1) 可以在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 试验前不能预知哪一个结果会出现.

2. 样本空间与样本点

随机试验的所有可能结果组成的集合称为该试验的**样本空间**，记为 Ω. 样本空间的元素，即随机试验的每个结果，称为**样本点**.

3. 随机事件

在随机试验中，可能发生，也可能不发生的事件称为**随机事件**，简称为**事件**.

一般地，我们称试验的样本空间 Ω 的子集 A 为该试验的随机事件，记为 $A\subset\Omega$. 随机事件用大写字母如 A，B，C 等来表示.

4. 基本事件

如果某事件只包含样本空间 Ω 中的一个样本点，我们就称该事件为**基本事件**. 试验的基本事件的个数与样本空间 Ω 中的样本点的个数是一致的.

5. 必然事件与不可能事件

在每一次试验中，必然会发生的事件称为**必然事件**，记为 Ω. 而在每一次试验中，必然不发生的事件称为**不可能事件**，记为 $\varnothing$. 样本空间 Ω 是必然事件，空集 $\varnothing$ 是不可能事件.

(二) 事件的关系及运算

1. 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$.

2. 事件的相等

如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称事件A与事件B**相等**，记为$A=B$，即事件A与事件B表示同一事件.

3. 和事件

事件A与事件B至少有一个发生的事件称为事件A与事件B的**和事件**，记作$A\cup B$. 事件$A\cup B$发生意味着或事件A发生，或事件B发生，或事件A与事件B都发生.

类似地，称$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$为$n$个事件$A_1$，$A_2$，…，$A_n$的和事件，称$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$为可列无穷多个事件$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…的和事件.

4. 积事件

事件A与事件B同时发生的事件，称为事件A与事件B的**积事件**，记为AB（或$A\cap B$）.

称$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1A_2\cdots A_n$为$n$个事件$A_1$，$A_2$，…，$A_n$的积事件，称$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1A_2\cdots A_n\cdots$为可列无穷多个事件$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…的积事件.

5. 差事件

事件A发生而事件B不发生的事件称为事件A与事件B的**差事件**，记作$A-B$.

6. 互不相容

如果事件A与事件B不可能同时发生，即$AB=\varnothing$，则称事件A与事件B是互不相容的事件，简称事件A与事件B互不相容，或称**互斥**. **基本事件是两两互不相容的.**

7. 对立事件

如果事件A与事件B至少一个发生，且仅有一个发生，即$A+B=\Omega$，且$AB=\varnothing$，则称事件A与事件B互为**对立事件**，又称事件A与事件B为**互逆事件**. 事件A的对立事件记作$\overline{A}$. 显然，

$$\overline{A}=\Omega-A,\overline{A}+A=\Omega,\overline{A}A=\varnothing$$

对立事件一定是互不相容的，但互不相容事件却不一定是对立事件.

8. 事件的运算定律

交换律　$A\cup B=B\cup A,AB=BA$

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$

分配律　$A(B\cup C)=AB\cup AC$

$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$

德·摩根律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\ \overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$

对减法运算满足　$A-B=A\overline{B}$

(三) 概率的定义与性质

1. 频率

在相同条件下，重复进行 n 次随机试验，事件 A 发生了 μ 次，μ 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频数**，而比值 μ/n 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频率**. 频率满足不等式 $0\leqslant\mu/n\leqslant1$，且必然事件的频率为 1，不可能事件的频率为零.

2. 事件 A 的概率

在条件不变的情况下，重复做 n 次随机试验，事件 A 发生的频数为 μ. 如果当 n 很大时，频率 μ/n 稳定地在某一常数值 p 附近摆动，且一般说来 n 越大摆动的幅度越小，则把事件 A 的频率的稳定值 p 称为**事件 A 的概率**，记为 $P(A)=p$.

概率有下列性质：

性质 1　$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

性质 2　$P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$.

性质 3　若 $AB=\varnothing$，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

有限可加性对有限多个互不相容的事件 A_1，A_2，…，A_n，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

可列可加性设可列无穷多个事件 A_1，A_2，…，A_n，…两两互不相容，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$$

性质 4　$P(\overline{A})=1-P(A)$。

性质 5　若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\ P(A)\leqslant P(B)$$

性质 6(加法公式)　对于任意两个事件 A，B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$$

对于三个事件 A，B，C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

(四) 古典概型概述

1. 古典概型

具备下列两个特点的随机试验的数学模型称为**古典概型**或称**等可能概率模型**：

(1) 试验的样本空间只含有有限个样本点；

(2) 由于某种对称性，在每次试验中，每一个基本事件发生的可能性相同，

即每一个基本事件发生的概率相等.

2. 古典概率计算公式

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{中包含基本事件个数}}{\text{基本事件总数}}$$

用上式计算得到的事件 A 的概率称为古典概率.

(五) 几何概型概述

1. 几何概型

如果随机试验的样本空间 Ω 为欧氏空间中的一个区域，且每个样本点的出现具有等可能性，则称此试验为几何概型。

2. 几何概型的概率计算公式

对于几何概型，事件 A 的概率有下列计算公式

$$P(A)=\frac{A\text{的测度(长度、面积、体积)}}{\Omega\text{的测度(长度、面积、体积)}}$$

(六) 条件概率与乘法公式

1. 条件概率

设 A，B 是试验的两个随机事件，且 $P(A)>0$，则称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

计算条件概率 $P(B|A)$ 有两种方法：

(1) 在原样本空间 Ω 中，先求出 $P(A)$，$P(AB)$，再用公式，得到 $P(B|A)$；

(2) 按照条件概率的含义，直接计算 $P(B|A)$.

2. 乘法公式

(1) 设 $P(A)>0$，则有 $P(AB)=P(A)P(B|A)$

(2) 设 $P(B)>0$，则有 $P(AB)=P(B)P(A|B)$

(3) 乘法公式还可以推广到任意有限个事件的积事件的情况. 例如，对于三个事件 A，B，C，设 $P(AB)>0$，则有

$$\begin{aligned}P(ABC)&=P(AB)P(C|AB)\\&=P(A)P(B|A)P(C|AB)\end{aligned}$$

(七) 全概率公式与贝叶斯公式

1. 完备事件组

若事件组 A_1，A_2，…，A_n 满足：

(1) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$;

(2) $A_iA_j = \varnothing (i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n)$

则称事件组 A_1，A_2，…，A_n 为**完备事件组**.

2. 全概率公式

设事件组 A_1，A_2，…，A_n 是一个完备事件组，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对任一事件 B，有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

上式称为**全概率公式**.

运用全概率公式的关键在于找出一个完备事件组.

3. 贝叶斯公式

设事件组 A_1，A_2，…，A_n 是一个完备事件组，B 为任一事件，且 $P(A_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$P(B)>0$，则有

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}$$

此式称为**贝叶斯公式**.

(八) 事件的独立性

1. 事件的独立性

设 A 与 B 是两个事件，若

$$P(B|A)=P(B)\text{或}P(A|B)=P(A)$$

则称事件 A 与 B **相互独立**，简称 A、B **独立**.

2. 事件 A 与 B 相互独立的必要且充分条件

设两个事件 A 与 B，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则 A 与 B 相互独立的必要且充分条件是

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

3. 性质

若四对事件

$$A,B;\ A,\overline{B};\ \overline{A},B;\ \overline{A},\overline{B}$$

中有一对独立，则另外三对也独立.

4. 多件事的独立性

设 A，B，C 是三个事件，若满足等式

$$P(AB)=P(A)P(B)$$
$$P(AC)=P(A)P(C)$$
$$P(BC)=P(B)P(C)$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

则称 A，B，C 相互独立，简称 A，B，C 独立.

对于 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，如果其中任意两个事件独立，就称这一事件组是**两两独立**的.

如果对任何整数 $k(2\leqslant k\leqslant n)$，都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

其中，k 个整数 i_1，i_2，…，i_k 满足 $1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n$，则称 A_1，A_2，…，A_n 相互独立.

应该注意的是：

（1）若 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n（$n\geqslant 2$）相互独立，则其中任意 k 个事件也相互独立（$2\leqslant k\leqslant n$）；

（2）若 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n（$n\geqslant 2$）相互独立，则它们一定两两独立；反之，两两独立不一定相互独立.

（九）贝努里概型

1. 贝努里试验

如果试验的结果只有两个：A 和 $\overline{A}$，则称此试验为**贝努里试验**.

2. 贝努里概型

如果（1）试验是在同样的条件下重复进行 n 次；

（2）各次试验是相互独立的；

（3）每次试验只有两个相互对立的结果：事件 A 和 $\overline{A}$，且

$$P(A)=p,P(\overline{A})=q=1-p$$

这样的试验模型称为 n 重贝努里概型，简称**贝努里概型**.

3. n 重贝努里概型概率公式

（1）设每次试验中，事件 A 发生的概率都为 $p(0<p<1)$，则在 n 次独立重复试验中，“事件 A 发生 k 次”的概率为

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

（2）在 n 次独立重复试验中，事件 A 发生的次数 k 介于 k_1 与 k_2 之间的概率为

$$P(k_1\leqslant k\leqslant k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2}P_n(k)$$

事件 A 至少发生 r 次的概率为

$$P(k \geqslant r) = \sum_{k=r}^{n} P_n(k)$$

或

$$P(k \geqslant r) = 1 - P(k < r) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} P_n(k)$$

二、典型例题与考研题精选

例 1 设 A，B 为两个事件，叙述下列各事件表示的含义：

(1) $\overline{A} \cup \overline{B}$；(2) $\overline{A}\ \overline{B}$；(3) $\overline{A}B$；(4) $\overline{A}A$.

解 根据事件间的关系及意义，可知：

(1) $\overline{A} \cup \overline{B}$ 表示两个事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 至少一个发生，或 A 与 B 不都发生.

(2) $\overline{A}\ \overline{B}$表示两个事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 同时发生，或 A 与 B 都不发生.

(3) $\overline{A}B$ 表示事件 A 不发生而 B 发生.

(4) $\overline{A}A = \varnothing$，它表示不可能事件.

例 2 判断下列命题是否正确.

(1) $A \cup B = A\overline{B} \cup B$；

(2) 若 $AB = \varnothing$且 $C \subset A$，则 $BC = \varnothing$；

(3) $\overline{A + BC} = \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$；

(4) 若 $A \subset B$，则 $\overline{B} \subset A$.

解 (1) 正确. 因为 $A = AB \cup A\overline{B}$，且 $AB \subset B$，所以

$$A \cup B = A\overline{B} \cup AB \cup B = A\overline{B} \cup B$$

(2) 正确. 因为 $C \subset A$，所以$\varnothing \subset CB \subset AB = \varnothing$，故 $CB = BC = \varnothing$.

(3) 错误. 因为$\overline{A \cup BC} = \overline{A}\ \overline{BC} \neq \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$.

(4) 错误. 因为 $A \subset B$，则 $\overline{B} \subset \overline{A}$，不能推出 $\overline{B} \subset A$.

例 3 化简下列各式.

(1) $A \cup B - A$；　　(2) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})$；

(3) $(A \cup B)(B \cup C)$；　　(4) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B)$.

分析 事件间运算的优先级为：逆运算→积运算→和、差运算.

解 由事件间的运算关系知

(1) $A \cup B - A = (A \cup B)\overline{A} = A\overline{A} \cup B\overline{A} = B\overline{A} = B - A$

(2) $(A \cup B)(A \cup \overline{B}) = AA \cup BA \cup A\overline{B} \cup B\overline{B} = A \cup \varnothing = A$

注意，$BA \cup \overline{B}A = A$.

(3) $(A \cup B)(B \cup C) = AB \cup BB \cup AC \cup BC$

$$= (AB \cup B \cup BC) \cup AC = B \cup AC$$

(4) 利用 (2) 的结果$(A \cup B)(A \cup \overline{B}) = A$，得

$$(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)=A(\overline{A}\cup B)=A\overline{A}\cup AB=AB$$

例 4 （1998 年）[○]设 A，B 为两个事件，且 $P(AB)=0$，则（　　）

（A）A 与 B 互斥　　（B）AB 是不可能事件

（C）AB 未必是不可能事件　　（D）$P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

分析　概率为 0 的事件不一定是不可能事件.

解　应选（C）. 由 $P(AB)=0$ 不能推出 $AB=\varnothing$，故应排除（A）和（B）；即便 $AB=\varnothing$，也推不出 A，B 独立，从而，由 $P(AB)=0$ 不能得出 $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$。由此排除（D），故选（C）.

例 5 （1989 年）A 表示事件“甲产品畅销且乙产品滞销”，则其对立事件 $\overline{A}$ 表示（　　）

（A）“甲产品滞销且乙产品畅销”　　（B）“甲、乙两种产品均畅销”

（C）“甲产品滞销”　　（D）“甲产品滞销或乙产品畅销”

解　应选（D）. 设 B 表示“甲产品畅销”，C 表示“乙产品畅销”，则有 $A=B\overline{C}$，从而，$\overline{A}=\overline{B\overline{C}}=\overline{B}\cup\overline{\overline{C}}=\overline{B}\cup C$. 故 $\overline{A}$ 表示事件“甲产品滞销或乙产品畅销”，故应选（D）.

例 6 （2001 年）对任意两个事件 A 和 B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是（　　）

（A）$A\subset B$　　（B）$\overline{B}\subset\overline{A}$　　（C）$A\overline{B}=\varnothing$　　（D）$\overline{A}B=\varnothing$

分析　对任意两个事件 A 和 B，都有

$$A\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}\Leftrightarrow A-B=\varnothing\Leftrightarrow A\overline{B}=\varnothing$$

解　应选（D）. 因为 $A\cup B=B\cup A\overline{B}$，所以，$A+B=B$ 等价于 $A\overline{B}=\varnothing$，由此可排除（C）. 又因为（A），（B），（C）相互等价，所以又可排除（A）和（B），故应选（D）.

例 7　设 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 将下列四个数按由小到大的顺序排列：

$$P(A),\ P(AB),\ P(A\cup B),\ P(A)+P(B)$$

分析　注意到事件的关系 $AB\subset A\subset(A\cup B)$，由概率的性质，知 $P(AB)\leqslant P(A)\leqslant P(A+B)$，再利用加法公式便可得解.

解　由事件的关系 $AB\subset A\subset(A\cup B)$ 及加法公式

$$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$$

可得

$$P(AB)\leqslant P(A)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$$

例 8　已知 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.4$，$AC=\varnothing$，$B\subset C$，求 $P(C)$ 及 $P(C-A)$.

分析　由已知条件及所求概率 $P(C)$ 及 $P(C-A)$ 可知，本题需要用概率的性质和加法公式，寻找 $P(C)$ 与 $P(A)$ 之间的关系.

解　由 $AC=\varnothing$ 知

○　表示本题为 1998 年全国硕士研究生入学考试题。以下凡题号后括号内标有某年的皆同。

$$P(A)+P(C)=P(A\cup C)\leqslant P(\Omega)=1$$

又由 $B\subset C$ 可知

$$P(A)+P(C)\geqslant P(A)+P(B)=0.6+0.4=1$$

故有

$$P(A)+P(C)=1$$

$$P(C)=1-P(A)=1-0.6=0.4$$

从而

$$P(C-A)=P(C)-P(AC)=P(C)=0.4$$

例 9 袋中有 a 个白球和 b 个黑球，从中任意接连取出 $k(1\leqslant k\leqslant a+b)$ 个球，如果球被取出后不放回，试求最后取出的一个球是白球的概率.

解 设事件 A 表示最后取出的一个球是白球.

设把 $a+b$ 个球加以编号，前 a 个号为白球，后 b 个号是黑球. 用 ω_i 表示第 k 次取出第 i 号球，则样本空间

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{a+b}\}$$

易知，每一个球都等可能地在第 k 次被抽到. 事件 $A=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_a\}$，故由古典概型的概率计算公式，得

$$P(A)=\frac{a}{a+b}$$

例 10 从分别标有 1，2，…，9 等数字的九张卡片中任取两张，求这两张卡片能拼成偶数的概率.

分析 直接求所求事件的概率比较繁琐，改求其逆事件的概率比较简便.

解 设 A 表示两张卡片能拼成偶数. 九张卡片中任取两张的每一种取法构成一个基本事件，样本空间所含样本点的个数为 C_9^2，有利于两张卡片不能构成偶数的事件 $\overline{A}$（即从 1，3，5，7，9 等五张中任取两张）的样本点的个数为 C_5^2. 于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_5^2}{C_9^2}=1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$$

例 11 在 1 ~ 100 共 100 个数中任取一个，求它能被 2 或 3 或 5 整除的概率.

分析 所求事件“能被 2 或 3 或 5 整除”较复杂，可引进简单事件并把复杂事件用简单事件来表示，从而简化问题.

解 设事件 A，B，C 分别表示取出的数能被 2，3，5 整除，则事件“取出的数能被 2 或 3 或 5 整除”可表示为：$A+B+C$. 而 AB，AC，BC，ABC 则分别表示取出的数能被

$$2\times3=6,2\times5=10,3\times5=15,2\times3\times5=30$$

整除. 在 1 ~ 100 共 100 个数中，能被 2，3，5，6，10，15，30 整除的数分别有 50 个，33 个，20 个，16 个，10 个，6 个，3 个，故由加法公式得

$$\begin{aligned} P(A+B+C) &= P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \\ &= \frac{50}{100}+\frac{33}{100}+\frac{20}{100}-\frac{16}{100}-\frac{10}{100}-\frac{6}{100}+\frac{3}{100} \\ &= 0.74 \end{aligned}$$

例 12 在线段 AB 上，有一点 C 介于 A，B 之间，线段 AB 的长度 a 大于线段 CB 的长度 b. 在线段 AC 上随机地取一个点 X，在线段 CB 上随机地取一个点 Y，求长度为 AX，XY，YB 的线段可构成一个三角形的概率.

分析 长度为 AX，XY，YB 的线段可构成一个三角形的充分必要条件是每一条线段的长度小于另两条线段长度的和.

解 设线段 AX 的长度为 x，线段 YB 的长度为 y，则线段 XY 的长度为 $a+b-x-y$，且 $0<x<a$，$0<y<b$，则样本空间为如图 1-1 所示的矩形区域，即

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0<x<a, 0<y<b\}$$

其面积为 $S_\Omega = ab$.

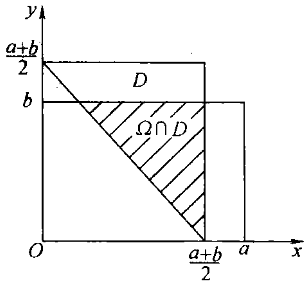


图 1-1

长度为 AX，XY，YB 的线段可构成一个三角形的充分必要条件是每一条线段的长度小于另两条线段长度的和，即满足下列条件：

$$x<(a+b-x-y)+y, \text{即 } x<\frac{a+b}{2}$$

$$a+b-x-y<x+y, \text{即 } x+y>\frac{a+b}{2}$$

$$y<(a+b-x-y)+x, \text{即 } y<\frac{a+b}{2}$$

满足上述条件的点（x，y）构成三角型区域 D（见图 1-1）为

$$D=\left\{(x,y) \mid 0<x<\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}-x<y<\frac{a+b}{2}\right\}$$

区域 $\Omega \cap D$ 的面积为 $S_{\Omega\cap D} = b^2/2$，由几何概型的概率计算公式，得所求概率为

$$p=\frac{S_{\Omega\cap D}}{S_\Omega}=\frac{b^2/2}{ab}=\frac{b}{2a}$$

例 13 （1988 年）在区间（0，1）内任取两个数，则事件“两数之和小于 $\frac{6}{5}$”的概率为__________.

解 应填$\frac{17}{25}$.

设所取两数分别为 x，y，则有 $0<x<1$，$0<y<1$. 所求概率为点（x，y）落在图 1-2 中阴影部分的概率. 这是一个几何概型，故所求概率为图中阴影部分的面积与正方形面积之比：$1-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{17}{25}$.

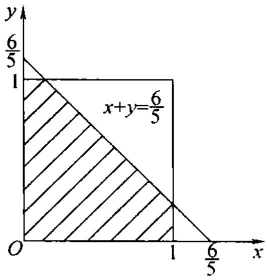


图 1-2

例 14 （1991 年）设 A，B 是任意两个概率不为 0 的互不相容事件，则下列结论中肯定正确的是（　　）

（A）$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容　　（B）$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

（C）$P(AB)=P(A)P(B)$　　（D）$P(A-B)=P(A)$

解 应选（D）. 因事件 A 与 B 互不相容，所以 $AB=\varnothing$，$P(AB)=0$. 由减法公式，得

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)$$

故，应选（D）.

注：A 与 B 互不相容，仅有 $AB=\varnothing$. $P(AB)=0$. 不一定满足 $A\cup B=\Omega$，故 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}=\varnothing$不一定成立，所以（A），（B）均不能选；同时，$P(A)P(B)>0$，故（C）也不能选，应选（D）.

例 15 （1992 年）设 A，B 同时发生时，事件 C 必发生，则（　　）

（A）$P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　（B）$P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

（C）$P(C)=P(AB)$　　（D）$P(C)=P(A\cup B)$

解 应选（B）. 因 A，B 同时发生时，事件 C 必发生，即 $AB\subset C$，又 $P(A+B)\leqslant 1$，所以，由加法公式得

$$P(C)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$$

故应选（B）.

例 16 （1992 年）已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{6}$，则事件 A，B，C 全不发生的概率为__________.

分析 事件 A，B，C 全不发生可表示为$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$. 应利用逆事件的概率计算公式去求解.

解 应填$\frac{7}{12}$. 因 $P(AB)=0$，所以 $P(ABC)=0$. 由概率的加法公式得