高等数学习题课教程

西安公路学院数学教研室

高等数学习题课教程

西安公路学院数学教研室　　主编

西北工业大学出版社

1990年9月　西安

内 容 简 介

本书是遵照高等数学教学基本要求,突出习题课特点,并与同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第三版）配套的一本习题课教程，可作为非数学专业本科生及专科生上高等数学习题课的教材或主要参考书．全书共八个单元，每单元均有系统的内容提要和必要的点注，有助于强化记忆、加深理解．各单元例题丰富，题型多样，注重解题思路，有分析、有评注、有综合；并配有精选的练习题．另外，每单元还有部分综合性、技巧性较强，覆盖面较宽的例题和参考题，供学有余力或有志报考研究生的学生参阅．书末附有全书练习题的答案或提示；并附有从试题库调出的若干套试题、题解及评分标准，供学生参考和自我测试．

高 等 数 学 习 题 课 教 程

主　　编　西安公路学院数学教研室

责任编辑　柴文强　刘 红　郑永安

责任校对　雷　鹏

*

西北工业大学出版社出版发行

(西安市友谊西路 127 号)

全国各地 新华书店 经销

陕西省富平县印刷厂印装

ISBN 7-5612-0285-7 / O · 32

*

开本 787×1092 毫米　1 / 16　24.75 印张　609 千字

1990 年 9 月第 1 版　　1990 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—11000 册　　　定价 8.00 元

前 言

习题课是高等数学教学的一个重要环节，对于学生熟练和巩固所学内容，激发学生的学习兴趣，养成独立思考的习惯，培养灵活运用所学知识的能力，都有不容忽视的作用。如何上好习题课，一直是高等数学教学中普遍关注的问题，又是迄今为止未能很好解决的一个难题。由于没有与教学内容配合紧密的习题课教材，习题课多由任课教师自行其事，内容、方法和效果往往因人而异，以致人们对习题课的评价褒贬不一，褒少于贬，毁多于誉。看来，编写一本符合“基本要求”、配合所用教材、又顾及习题课特点的习题课教程，很可能是解决问题的关键。鉴于上述考虑，交通部高等院校数学协作组邀请了部分高等院校一些富有教学经验的数学教师，合编了这本“高等数学习题课教程”，权且作为一粒问路的投石，祈做引玉之砖，甘为众矢之的。

作为供学生和教师上习题课使用的教材及主要参考书，本教程内容的深度和广度，力求体现国家教委工科数学课程指导委员会颁布的“基本要求”。本教程是一本与同济大学数学教研室主编的《高等数学》（第三版）配套使用的习题课教材。本教程提及的“教材”、“课本”及习题编号均指前提及的《高等数学》。另外，该教程在内容和形式方面都尽可能突出习题课这一教学环节的特点，注重实践性，强调趣味性、灵活性。

为了使本教程能同时供专科和本科学生使用，在内容取舍、例题选择和练习配置等方面，都注意到对本科和专科这两个不同层次的不同要求。有较宽的幅度，给教师和学生留有充分的选择余地。

本教程第一单元由西安公路学院袁天俊编写，第二单元第一节和第五单元由大连海运学院张彦超编写，第二单元第二、三节由长沙交通学院杨润生、周世琼编写，第三单元第一节和第八单元由重庆交通学院邹兆南编写，第三单元第二、三节由武汉河运专科学校刘芷芳、张玉瑛编写，第四单元由西安公路学院任功全、首第星编写，第六单元由武汉水运工程学院彭德茂、黄承绪编写，第七单元由南京航务工程专科学校何清编写。

全书的主编与审订工作由西安公路学院数学教研室担任。

在本教程的编写过程中，西安公路学院和武汉水运工程学院的有关领导和数学教研室的同志们倾注了热情的关怀，给予了积极的支持和具体的帮助。为使该教程能尽快出版，西安公路学院数学教研室的敬福田、冯振英等同志及西北工业大学出版社的同志们，付出了辛勤的劳动，做了大量深入细致的工作，在此谨表示衷心感谢。

由于本教程是由几所院校的作者分工合编的，虽几经共同努力，但因时间匆促，又囿于编者水平有限，缺点和错误在所难免，热诚希望使用本教程的教师和学生多提意见，多加指正。

编 者

1990 年 4 月 25 日

目　录

第一单元　函数、极限及函数的连续性 …… 1

第一节　函数 …… 1
第二节　极限 …… 12
第三节　函数的连续性 …… 28

第二单元　一元函数微分学 …… 38

第一节　导数与微分及其计算 …… 38
第二节　微分中值定理与罗必塔法则 …… 58
第三节　导数的应用 …… 78

第三单元　一元函数积分学 …… 91

第一节　不定积分 …… 91
第二节　定积分 …… 110
第三节　定积分的应用 …… 135

第四单元　向量代数与空间解析几何 …… 147

第一节　向量代数 …… 147
第二节　空间解析几何 …… 166

第五单元　多元函数微分学 …… 190

第一节　基本概念和基本运算 …… 190
第二节　多元函数微分学的应用 …… 209

第六单元　多元函数积分学 …… 218

第一节　二重积分 …… 218
第二节　三重积分 …… 229
第三节　曲线积分 …… 236
第四节　曲面积分 …… 256

第七单元　无穷级数 …… 278

第一节　数项级数 …… 278
第二节　幂级数 …… 293
第三节　傅立叶级数 …… 311

第八单元　微分方程 …… 323

第一节　一阶微分方程 …………………………………………………… 323
第二节　高阶微分方程 …………………………………………………… 337
附录一　高等数学试题及解答 ……………………………………………… 346
附录二　补充题参考答案 …………………………………………………… 381

第一单元 函数、极限及函数的连续性

本单元是高等数学重要的基础理论部分。函数是高等数学的主要研究对象。极限概念与方法贯穿于高等数学的始终，如微分学、积分学、级数理论等，都是建立在极限概念基础上的，都是用极限方法来研究的。连续函数则是最基本的一类函数，微积分中的主要概念都是以连续函数为基础的。因此，正确理解函数概念、极限概念、连续函数概念，对于学生系统学习高等数学是十分重要的。

第一节 函 数

内 容 提 要

1. 邻域

设a与δ是两个实数，且$\delta>0$。数集

$$\{x|\ |x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的 δ **邻域**，记作 $U(a,\ \delta)$。点 a 叫做这邻域的**中心**，δ 叫做这邻域的**半径**。

通常，称数集

$$U(\hat{a},\ \delta)=\{x|\quad 0<|x-a|<\delta\}$$

为点 a 的**去心** δ **邻域**。

显然

$$U(a,\ \delta)=(a-\delta,\ a+\delta) \qquad U(\hat{a},\ \delta)=(a-\delta,\ a)U(a,\ a+\delta)$$

2. 函数

(1) 定义：设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集。如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按一定法则（记为 f）总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$。

(2) 函数的几种特性：

1) 有界性：设 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$。若存在正数 M，使得对任一 $x\in X$ 都有$|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上**有界**。若不存在这样的 M，则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**。

2) 单调性：设 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，若对任意的 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2) \qquad (f(x_1)>f(x_2))$$

成立，则称 $f(x)$ 在 I 上**单增（减）**。

3) 奇偶性：设 $f(x)$ 的定义域关于原点对称。若对任一 $x\in D$

$$f(-x)=f(x) \qquad (f(-x)=-f(x))$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶（奇）函数**。

4) 周期性：设 $f(x)$ 的定义域为 D。若存在一个不为零的数 l，使得对于任一 $x\in D$，有 $(x\pm l)\in D$，且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期。通常所说的周期函数的周期是指最小正周期。

(3) 反函数：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W。若对每一个 $y\in W$，都有确定的 $x\in D$ 与 y 对应，而且它们满足 $f(x)=y$，则在 W 上就定义了一个函数，记为

$$x=\varphi(y)$$

且称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**。

(4) 复合函数：设 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，$u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2。若

$$G=\{x|x\in D_2,\ \varphi(x)\in D_1\}\neq\Phi$$

则 $y=f[\varphi(x)]$ 是定义在 G 上的一个函数，称它为 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 在 G 上的**复合函数**。

(5) 初等函数：由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的，并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**。

概 念 点 注

(1) 给定一个函数 $y=f(x)$，就是给定了它的对应法则“f”及定义域“D”。反之亦然。即函数 $y=f(x)$ 与元素对 $(f,\ D)$ 互相唯一决定。称元素对 $(f,\ D)$ 为函数的两个要素。只不过在通常情况下，函数定义域并不明显写出。

(2) 两个函数 $y=f(x)(x\in D_1)$，$y=g(x)\ (x\in D_2)$ 相等的充分必要条件是

$D_1=D_2$，且对每一 $x\in D_1=D_2$，$f(x)=g(x)$。

(3) 函数的定义域 D，是数的集合，常见的是以区间表示的。但函数的定义域又不全是区间。如函数

$$f(x)=\sqrt{\cos x-1}$$

的定义域是 $x=2k\pi(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$。

例 题

例 1. 将下列各题的正确结论填入题后的括号内。

(1) 下面的每对函数是否相同？

$f(x)=x^2$ 与 $g(x)=x^2(x>0)$ （不同，因定义域不同）

$f(x)=\ln x^2$ 与 $g(t)=2\ln|t|$ （相同）

$f(x)=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ （相同）

$f(x)=|x|$ 与 $g(x)=\sqrt{x}$ （不同，定义域不同）

(2) 写出下面函数的定义域D。

1) $y=\begin{cases}0 & x\geqslant 0\\ 2x^2 & -2\leqslant x<0\\ x & x<-2\end{cases}$

解：$D=\{x|x\in R\}$　（即各分段表达式的定义域的并集）。

2) $f(x)=\sqrt{x}+\arcsin x$

解：$D=\{x|x\in[0,\ 1]\}$　（D 是$\sqrt{x}$ 的定义域与 $\arcsin x$ 的定义域的交集）。

(3)下列命题是否正确。

1) 若两个函数的定义域和值域都相同，则这两个函数相同。　（错）

2) 分段函数都不是初等函数。　（错）

3) 若 $f(x)=\begin{cases}x-1 & x\geqslant 1\\ x+1 & x<1\end{cases}$ 则 $f(a)=a-1$。　（错）

例2. 求函数定义域D。

(1) $\varphi(x)=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$

(2) $f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\lg(5-x)$

解：(1)要$\varphi(x)$有意义必须且只须

$$\begin{cases}x^2-x-6\geqslant 0 & ①\\ \left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1 & ②\end{cases}$$

由式①得　$\begin{cases}x-3\geqslant 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-3\leqslant 0\\ x+2\leqslant 0\end{cases}$

即　$x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -2$

由式②得　$-7\leqslant 2x-1\leqslant 7$

即　$-3\leqslant x\leqslant 4$

所以 $\varphi(x)$ 的定义域

$$D=[(-\infty,\ -2]\cup[3,\ +\infty)]\cap[-3,\ 4]$$
$$=[-3,\ -2]\cup[3,\ 4]$$

(2) 要$f(x)$有意义必须且只须

$$\begin{cases}x-2\geqslant 0\\ x-3\neq 0\\ 5-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant 2\\ x\neq 3\\ x<5\end{cases}$$

即　$D=(3,\ 5)\cup[2,\ 3)$

例 3. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,\ 1]$，求 $f(x^2)$，$f(\sin x)$ 和 $f(x+a)$ $(a>0)$ 的定义域 D。

解：求 $f(x^2)$ 的定义域。由题设 $0\leqslant x^2\leqslant 1$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$。故 $f(x^2)$ 的定义域 $D=[-1,\ 1]$。

求 $f(\sin x)$ 的定义域。由题设 $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$，即

$$2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi \qquad (k\text{是整数})$$

所以 $f(\sin)$ 的定义域是 $\{x|2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi,\ k\ \text{是整数}\}$。

求 $f(x+a)\quad (a>0)$ 的定义域。 由题设 $0 \leqslant x+a \leqslant 1$，即 $-a \leqslant x \leqslant 1-a$。所以 $f(x+a)\ (a>0)$的定义域$D=[-a,\ 1-a]$。

例 4. 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,\ 1)$，求 $f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)$ 的定义域。其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

解：由题设得 $\qquad 0<\dfrac{[x]}{x}<1$ 且 $x \neq 0$

当 $x<0$ 时，显然 $[x]<0$，$|[x]| \geqslant |x|$，即有$\dfrac{[x]}{x} \geqslant 1$，故必须 $x>0$。

当 $0<x \leqslant 1$ 时，有 $[x]=0$ 或 $[x]=1$，相应地有$\dfrac{[x]}{x}=0$ 或$\dfrac{[x]}{x}=1$。故必须 $x>1$，但又不能使 $x=2,\ 3,\ \cdots$，才能保障 $0<\dfrac{[x]}{x}<1$.

综上所述 $f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)$ 的定义域是 $\{x|1<x$ 且 $x \neq 2,\ 3,\ \cdots\}$。

例 5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1 & |x| \leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\dfrac{[x]}{x}$，求函数 $F(x)=f(x)+g(x)$ 的定义域。

解：$f(x)$ 的定义域是 $D_1=(-\infty,\ +\infty)$，$g(x)$ 的定义域是 $D_2=(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$。因此使 $F(x)$ 有意义的 x 的全体应该是 $D_1 \bigcap D_2$，即 $F(x)$ 的定义域为

$$D=D_1 \bigcap D_2=D_2 \quad \text{或} \quad x \neq 0$$

例 6. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f\{f[f(x)]\}$ 的定义域。

解：因为

$$f[f(x)]=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\frac{1}{x}$$

所以 $f[f(x)]$ 定义域为 $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$。因为

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{1}{1-(1-\dfrac{1}{x})}=x$$

所以 $f\{f[f(x)]\}$ 的定义域为 $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$.

例 6 是确定一个函数自身复合所成函数的定义域。其复合函数虽然是

$$f\{f[f(x)]\}=x$$

但其定义域并不是全体实数。至于理由，请读者思考。

例7. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant 1\\ 2 & |x|>1\end{cases}$$

(1) 求$f[f(x)]$；　(2) 求$f[g(x)]$。

解：(1) 解法一：因为$f(x)$的定义域和值域分别为

$$D=(-\infty,\ +\infty),\ W=\{0,\ 1\}\Rightarrow D\cap W\neq\Phi$$

所以$f(x)$可以自身复合。

当$x\in(-\infty,\ +\infty)$时，$W=\{1,\ 0\}\subset(-1,\ 1)$，故$f[f(x)]=1$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$。

解法二：令$f(x)=u$，则

$$f[f(x)]=f(u)=\begin{cases}1 & |u|\leqslant 1\\ 0 & |u|>1\end{cases}$$

对任意的$x\in(-\infty,\ +\infty)$，由$f(x)=u$，得$|u|\leqslant 1$，故$f(u)=1$，即$f[f(x)]=1$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$。

(2) 解法一：令$g(x)=u$，当$|x|\leqslant 1$时，$u=2-x^2\geqslant 1$；当$|x|>1$时，$u=2>1$。所以对任意的实数x都有$u\geqslant 1$。

当$u=1$时，$f(u)=1$；当$u>1$时，$f(u)=0$。故

$$f(u)=\begin{cases}1 & u=1\\ 0 & u>1\end{cases}$$

而$u=1$，相当于$|x|=1$；$u>1$相当于$|x|\neq 1$，故

$$f[g(x)]=\begin{cases}1 & |x|=1\\ 0 & |x|\neq 1\end{cases}$$

解法二：当$|x|=1$时，$g(x)=1$；当$|x|>1$或$|x|<1$时，$g(x)>1$。因为$g(x)$的值域是$f(x)$的定义域集合之子集，所以

$$f[g(x)]=\begin{cases}1 & |x|=1\\ 0 & |x|\neq 1\end{cases}$$

注意：函数的复合方法，如例7所示可以不同，但是都必须满足可复合的条件，否则复合是无意义的。此外，还须注意，如果设中间变量求复合函数，那么在复合结果中不能含中间变量。

例8. 求函数值或求函数。

(1) 设函数

$$f(x)=\sqrt{x^2}+a \qquad g(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+1} & x\geqslant 2\\ \dfrac{2-x}{x+1} & x<2 \quad x\neq -1\end{cases}$$

求$f(a)$和$g(b)$；

(2) 设$f(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$内是奇函数，$f(1)=a$，且对任意的x有$f(x+2)-f(x)=f(2)$，求$f(5)$；

(3) 已知$f(\sqrt[3]{x}-1)=x-1$，求$f(x)$。

解：(1) 求 $f(a)$。因为 $x=a$ 时，$\sqrt{x^2}=\sqrt{a^2}=|a|$，故当 $a\geqslant 0$ 时

$$f(a)=\sqrt{a^2}+a=a+a=2a$$

当 $a<0$ 时
$$f(a)=\sqrt{a^2}+a=-a+a=0$$

因此
$$f(a)=\begin{cases}2a & a\geqslant 0\\ 0 & a<0\end{cases}$$

求 $g(b)$。由题设，当 $b\geqslant 2$ 时

$$g(b)=\frac{b-2}{b+1}$$

当 $b<2$ 时

$$g(b)=\frac{2-b}{b+1}$$

于是
$$g(b)=\begin{cases}\dfrac{b-2}{b+1} & b\geqslant 2\\ \dfrac{2-b}{b+1} & b<2,\ b\neq -1\end{cases}$$

(2) 由题设

$$f(1)=a,\ f(-1+2)-f(-1)=f(2)\quad 且\ f(-1)=-f(1)$$

所以
$$f(1)+f(1)=f(2)$$

即
$$f(2)=2a$$

注意到 $f(5)=f(3+2)$，利用上面方法可得

$$f(5)+f(-1)=2f(2)$$

即
$$f(5)=2f(2)+f(1)=5a$$

(3) 解法一：令 $t=\sqrt[3]{x}-1$，则 $x=(t+1)^3$，于是 $f(t)=(t+1)^3-1$

即
$$f(t)=t^3+3t^2+3t$$

亦即
$$f(x)=x^3+3x^2+3x$$

解法二：由

$$\begin{aligned}f(\sqrt[3]{x}-1)&=x-1\\&=(x^{\frac{1}{3}}-1)(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1)=(x^{\frac{1}{3}}-1)[(x^{\frac{1}{3}}-1)^2+3x^{\frac{1}{3}}]\\&=(x^{\frac{1}{3}}-1)^3+(x^{\frac{1}{3}}-1)[3(x^{\frac{1}{3}}-1)+3]\\&=(x^{\frac{1}{3}}-1)^3+3(x^{\frac{1}{3}}-1)^2+3(x^{\frac{1}{2}}-1)\end{aligned}$$

得
$$f(x)=x^3+3x^2+3x$$

例9. 设 $f(x)$ 是一多项式，且满足方程

$$f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x^2$$

求 $f(x)$。

解：由于 $f(x)$ 是多项式，所以 $f\left(\frac{x}{2}\right)$ 也是同次多项式。且由

$$f(x)=-\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})=x^2$$

可知，$f(x)$是二次多项式。设

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

将$x=0$代入

$$f(x)-\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})=x^2$$

得　　$c-\frac{1}{2}c=0$　　$c=0$。

于是

$$f(x)=ax^2+bx$$

将此再代入方程得

$$ax^2+bx-\frac{1}{2}a\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}b\frac{x}{2}=x^2$$

即

$$ax^2(1-\frac{1}{8})+bx(1-\frac{1}{4})=x^2$$

故　　$a=\frac{8}{7}$　　$b=0$

所求多项式为

$$f(x)=\frac{8}{7}x^2。$$

例10. 求下列函数的反函数。

(1) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$

(2) $y=\begin{cases} x & x<1 \\ x^2 & 1\leqslant x\leqslant 4 \\ 2^x & 4<x \end{cases}$

(3) $y=x+[x]$

解: 由 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$　得

$$\begin{aligned} y^3&=2x+3(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{2}{3}}(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}+3(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{2}{3}} \\ &=2x+3(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}[(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}+(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}] \\ &=2x-3[(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}+(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}]=2x-3y \end{aligned}$$

即　　$x=\frac{1}{2}(3y+y^3)$

对调字母得　　$y=\frac{1}{2}(3x+x^3)$

(2) 分段函数的反函数可分段求出:

由 $y=x$，$x\in(-\infty,\ 1)$　得　$x=y$，　$y\in(-\infty,\ 1)$

由 $y=x^2$，$x\in[1,\ 4]$　得　$x=\sqrt{y}$，　$y\in[1,\ 16]$

由 $y=2^x$，$x\in(4,\ +\infty)$　得　$x=\log_2 y$，　$y\in(16,\ +\infty)$

对调字母得　$y=\begin{cases} x & x<1 \\ \sqrt{x} & 1\leqslant x\leqslant 16 \\ \log_2 x & 16<x \end{cases}$

(3) 对任一整数 k，当 $k\leqslant x<k+1$ 时，$y=x+[x]=x+k$，　从而 $x=y-k$，$2k\leqslant y<2k+1$。于是得到 $y=x+[x]$ 的反函数为

$$y=x-k,\ 2k\leqslant x<2k+1\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

例 11. 当 $ad-bc=0$ 时，函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$　(a，b，c，d 是常数)是否存在反函数？

$ad-bc\neq0$ 时 存在反函数

解：当 $c=0$，$d\neq0$ 时，由 $ad-bc=0$ 得 $a=0$，故

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{b}{d}$$

不存在反函数。

当 $c\neq0$，$d=0$ 时，由 $ad-bc=0$ 得 $b=0$，故

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}$$

不存在反函数。

当 $c\neq0$，$d\neq0$ 时，由 $ad-bc=0$ 得 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$，令

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=k\ (\text{常数})$$

[illegible]

故　$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=k$　不存在反函数。

总之，对于 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，只要 $ad-bc=0$，就不存在反函数。

例 12. 证明函数 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 分别在区间 $[\frac{1}{2},\ 1]$ 与 $[1,\ +\infty)$ 上有界。

证：因为在区间 $[\frac{1}{2},\ 1]$ 上，函数 $\dfrac{1}{x}$ 是单减的，$\lg x$ 是单增的，所以当 $x\in[\frac{1}{2},\ 1]$ 时

$$1\leqslant\frac{1}{x}\leqslant2\qquad \lg\frac{1}{2}\leqslant\lg x\leqslant\lg1=0$$

于是　$\lg\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{x}\lg x\leqslant2\lg1=0$

即函数 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 在 $[\frac{1}{2},\ 1]$ 上有界。

当 $x\in[1,\ +\infty)$ 时，显然有 $\dfrac{\lg x}{x}\geqslant0$ 与 $\lg x<x$，即 $\dfrac{\lg x}{x}<1$。故当 $x\in[1,\ +\infty)$ 时

$$0\leqslant\frac{\lg x}{x}\leqslant1$$

即函数$f(x)=\frac{\lg x}{x}$在$[1, +\infty)$有界。

例 13. 设函数 $\varphi(x)$，$f(x)$，$\psi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上都是单增的，且 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$。证明在 $(-\infty, +\infty)$ 上有

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$$

证：任取$x_0\in(-\infty, +\infty)$，那么由题设 $\varphi(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant\psi(x_0)$ 代换法

令 $u_1=\varphi(x_0)$，$u_2=f(x_0)$，$u_3=\psi(x_0)$

则 $$u_1\leqslant u_2\leqslant u_3 \quad 且 \quad u_1, u_2, u_3\in(-\infty, +\infty)$$

再由 $f(u)$，$\psi(u)$ 的单增性及 $\varphi(u)\leqslant f(u)\leqslant\psi(u)$ 得

$$\varphi(u_1)\leqslant f(u_1)\leqslant f(u_2)\leqslant\psi(u_2)\leqslant\psi(u_3)$$

即 $$\varphi(u_1)\leqslant f(u_2)\leqslant\psi(u_3)$$

也就是 $$\varphi[\varphi(x_0)]\leqslant f[f(x_0)]\leqslant\psi[\psi(x_0)]$$

注意到 x_0 的任意性，因此在 $(-\infty, +\infty)$ 上有

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$$

例 14. 证明：若 $f[g(x)]=x$，$\varphi[f(x)]=x$，则 $g(x)=\varphi(x)$。

分析：注意到，$f[g(x)]=x$，$\varphi\{f[g(x)]\}=\varphi(x)$，就可看出命题的证法。

证：因为 $$\varphi\{f[g(x)]\}=\varphi(x) \qquad ①$$

而 $$\varphi[f(x)]=x$$

所以 $$\varphi\{f[g(x)]\}=g(x) \qquad ②$$

由式①与②得 $$g(x)=\varphi(x)$$

例 15. 已知函数 $f(x)$ 定义在整个实数集上，且满足

$$f(x+T)=kf(x) \qquad (k, T为正常数)$$

证明 $f(x)$ 可表示成 $a^x\varphi(x)$ 的形式，其中 a 为正常数，$\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数。

分析：按要求，$\varphi(x)$ 的周期性是要证的，a 是待求的，并注意到 $a^x>0$。由此利用 $f(x+T)=kf(x)$就可证得。

证：设 $$f(x)=a^x\varphi(x)$$

则由 $$f(x+T)=kf(x)=ka^x\varphi(x)$$

和 $$f(x+T)=a^{x+T}\varphi(x+T)$$

得 $$a^{x+T}\varphi(x+T)=ka^x\varphi(x)$$

令 $a^T=k$(或$a=k^{\frac{1}{T}}$)，则对任意的实数x，有

$$\varphi(x+T)=\varphi(x)$$

即 $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的函数，$a=k^{\frac{1}{T}}$ 是正常数。

例 16. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象，问以下函数的图象与它有何关系？

(1) $y=f(x+a)$; (2) $y=f(x)+b$;

(3) $y=f(x+a)+b$; (4) $y=kf(x)$;

(5) $y=f(kx)$; (6) $y=|f(x)|$。

解：(1) 将 $y=f(x)$ 的图象向左 $(a>0)$ 平移 a 个单位，或向右 $(a<0)$ 平移 $|a|$ 个单位就得到 $y=f(x+a)$ 的图象。

(2) 将 $y=f(x)$ 的图象向上 $(b>0)$ 平移 b 个单位，或向下 $(b<0)$ 平移 $|b|$ 个单位就得到 $y=f(x)+b$ 的图象。

(3) 将 $y=f(x)$ 的图象，按 (1) 的方法移动，再按 (2) 的方法移动便得 $y=f(x+a)+b$ 的图象。

(4) 将 $y=f(x)$ 的图象上任一点 $M_0(x_0,\ y_0)$ 的纵坐标乘以 k，就得到 $y=kf(x)$ 上的点 $M_0^1(x_0,\ ky_0)$，再描点、连线，就可得 $y=kf(x)$ 的图象。即将 $y=f(x)$ 的图象顺着 y 轴压缩或伸长 k 倍，就是 $y=kf(x)$ 的图象。

(5) 将 $y=f(x)$ 的图象顺着 x 轴的方向压缩或扩张 k 倍，就得 $y=f(kx)$ 的图象。

(6) 将 $y=f(x)$ 的图象在 x 轴下方（如果有的话）部分关于 x 轴对称地移到 x 轴上方，而保留在 x 轴上方的图象不动，这样所得到的图象就是 $y=|f(x)|$ 的图象。

例17. 描绘出函数

$$y=\cos(2\arccos x) \qquad -1\leqslant x\leqslant 1$$

的图象。

解：因为 $\quad y=\cos(2\arccos x)=2\cos^2(\arccos x)-1=2x^2-1$

所以 $y=\cos(2\arccos x)$ 的图象与 $y=2x^2-1$ 的图象是一样的（图形略）。

例 18. 在平面上给定点 A 和 B，A、B 间的距离记为 $3c$，设有一动点 M 到 A 和 B 的距离分别为 $|MA|$ 和 $|MB|$，且 $|MA|=2|MB|$。求动点 M 的两个坐标的函数关系。

解：取分直线段 AB 为 $AO:OB=2:1$ 的分点 O 为原点，x 轴过 A、B 两点，且点 A 在 x 轴正向上。则 A、B 的坐标分别为 $(2c,\ 0)$，$(-c,\ 0)$。设点 M 的坐标为 $(x,\ y)$，则由 $|MA|=2|MB|$ 得

$$\sqrt{(x-2c)^2+y^2}=2\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

即

$$y^2=\frac{1}{3}(x-2c)^2-\frac{4}{3}(x+c)^2$$

练 习 题

1. 必作题号(下同)

习题 1－1　3；4. (5)，(8)；6；8；9.(4)，(6)；11；12.(2)，(3)；15

习题 1－2　1.(4)，(5)，(6)；5；6.(4)，(5)；9.(4)，(5)；11；13；16

2. 补充题

(1) 下列函数是否相同，为什么？

1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$　与　$\varphi(x)=1$

2) $f(x)=1$　与　$\varphi(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$

3) $f(x)=\frac{\pi}{2}x$ 与 $\varphi(x)=x(\arcsin x+\arccos x)$

4) $f(x)=\frac{1}{4}[(x+|x|^2+(x-|x|)^2]$ 与 $\varphi(x)=x^2$

5) $f(x)=x\cdot \mathrm{sgn}x$ 与 $\varphi(x)=|x|$

(2) 设 $f(x)=(x+|x|)(1-x)$，求使以下各式满足的 x 值。

1) $f(x)=0$; 2) $f(x)>0$; 3) $f(x)<0$

(3) 求 $f[f(x)]$，$g[g(x)]$，$f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$，设:

1) $f(x)=x^2$ $g(x)=2^x$

2) $f(x)=\mathrm{sgn}x$ $g(x)=\frac{1}{x}$

3) $f(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ x & x>0\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$

(4) 设函数$f(x)$与$g(x)$可以复合得到

$$f[g(x)]=\sin x \qquad g[f(x)]=\sin x$$

求$f(x)$与$g(x)$。

(5) 求出函数 $y=\mathrm{th}x$，其中 $\mathrm{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $(-\infty<x<+\infty)$ 的反函数及反函数的定义域。

(6) 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$。

(7) 求下列函数的定义域:

1) $y=\lg(1-2\cos x)$ 2) $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$

3) $y=\arcsin(\lg\frac{x}{10})$ 4) $y=(-1)^x$

(8) 设 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}+1$，求 $f(x)$，$f(x+y)$.

(9) 设 $g(x+1)=x^2-2x+2^x$，求 $g(x-1)$。

(10) 证明：若对任意的 x，$y\in(-\infty, +\infty)$ 有 $2f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$，且 $f(x)\neq 0$，则

1) $[f(x)]^2=\frac{f(2x)+1}{2}$ 2) $[f(x)]^2+[f(y)]^2=f(x+y)\cdot f(x-y)+1$

(11) 设 $f(x)$ 是 x 的二次函数，且 $f(0)=1$，$f(x+1)-f(x)=2x$，求 $f(x)$。

(提示：设$f(x)=ax^2+bx+c$，求a，b，c。)

(12) 试证在 $(-\infty, +\infty)$ 上不存在严格单调偶函数。

(提示：用反证法。)

(13) 已知 $f(2x-1)=x^2$，$x\in(-\infty, +\infty)$，指出 $f[f(x)]$ 是否有界。

(14) 设 $f(y)-f(x)\leqslant(y-x)^2$ 对任意的 x，y 成立，证明对任意的正整数 n 和任意