高等学校教学参考书

线性代数释疑与方法

袁作兴　肖筱南　编著

陕西科学技术出版社

高等学校教学参考书

线性代数释疑与方法

袁作兴　肖筱南　编著

陕西科学技术出版社

（陕）新登字第002号

[illegible]方法

袁仁兴 肖筱南 编著

陕西科学技术出版社出版发行

（西安北大街131号）

西安永宁彩印厂印刷

787×1092毫米 32开本 6.875印张 14.8万字

1994年7月第一版 1994年7月第一次印刷

印数：1—2500

ISBN 7—5369—2170—5/G·572

定 价：5.60元

内 容 提 要

本书作者积多年从事线性代数的教学经验，按照教学大纲的要求，系统地将学习线性代数时应掌握的概念与理论，重点与难点，方法与技巧，以及容易混淆的问题，作了全面的论述与解答。全书构思新颖，内容丰富，思路清晰、分析精当，深入浅出，指点迷津、具有广泛的实用性、可读性与引导性，是一本将理论与实践相结合，知识与应用相结合，系统性与针对性相结合的线性代数教学参考新书。

本书特别适合高等院校师生及自学考试类学生作为线性代数课程的教学参考书，也可供各行各业中从事实际工作而需要用线性代数知识的科技人员学习使用。

前　　言

本书编写的目的有二：一是想对普通理工科院校、财经类院校、成人高校及高教自考类的读者学习线性代数理解、消化其基本概念和理论，培养基本技能，掌握数学方法提供一些帮助；二是以各类院校培养目标为依据，充分考虑到学生学习线性代数的实际需要，从突出实用性、科学性和方法论出发，为提高教学质量，促进该门课程教学改革作些努力。

成书过程中，作者注意了以下几点：

(1) 取材少而精，结构简而明，突出基本概念，重点难点的阐释。在内容的选择上，本着来源于教材，又高于教材的原则，以各类学校通用教材为主线，参照该门课程的教学大纲与要求，取其有共性的东西，提练出有代表性的内容，把教材的重点难点，常用的思考方法与类型作为表述对象。当详之处不惜笔墨，当略之处留有余地，读者无论采用哪类教材，都能使用本书。

(2) 答疑解惑，做到脉络清晰、文字精炼、通俗易懂。根据作者在执教中的经验与体会，把学生在理解某些基本概念和平时可能出现的问题，教师在教学中容易忽略的地方，汇集成百余个问题，对容易混淆的概念，重要定理、公式性质进行深入浅出的阐释，指出其应用，帮助读者形成正确认识，辨证地、多视角地思考和分析问题。因此，读者无论是初学还是复习，均有参考价值。

(3) 疏理思路着重方法归纳，努力贯彻理论与实际相结合原则。线性代数这门课程比较抽象，内容多，实用性强且有一套特有的理论体系与思维方法，根据这些特点，作者选用了大量范例，对所学数学方法作了分类总结，综述概括，以便开拓思路，举一反三，

并力图知识的灵活运用，解决实际问题，以达到宜教易学的目的。

在编写的过程中，我们参阅了大量的书籍与教材，吸收了它们中不少长处。在此，特向有关作者、编者表示感谢。同时，也感谢陕西科学技术出版社的鼎力相助，使本书得以问世。尽管作者想使书稿达到较理想的效果而倾尽其力，但由于学识水平有限，加之时间仓促，不妥与错误之处难免，欢迎读者批评指正。

作　者

1994 年 2 月

目　　录

第一章　行列式

一　主要内容与要求

1　排列和逆序

由 n 个数 $1,2,\cdots\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 称为一个 n 元排列. n 元排列的总数为 $n!$ 个.

在一个排列中,如果有一个较大的数排在一个较小的数之前,就称这两个数构成一个逆序.一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数,并用 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 表示排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数.如果排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆数序 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 是一个偶数,则称 i_1,i_2 $\cdots,i_n$ 是一个偶排列;如果 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 是一个奇数,则称 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是一个奇排列.

交换一个排列中的任意两数 i_c 和 i_m 的位置,称为一次对换.对换改变排列的奇偶性.任意一个 n 元排列经过若干次对换可变为自然顺序的排列,且所作的对换次数与排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 有相同的奇偶性.

在一个 n 元排列中,奇偶排列各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

2　n 阶行列式的定义

用 n^2 个元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots n;\ j=1,2,\cdots n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它表示所有可能取自不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，即等于

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \qquad (1.1)$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots n$ 的一个排列，Σ 是对列标的所有 n 元排列求和，每项前面的符号由 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数决定. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有 n 元排列时，则得到 n 阶行列式表示的代数和所有的项，共 $n!$ 项. n 阶行列式常用下列记号 D、D_n、$|a_{ij}|_n$.

3 行列式的基本性质

(1) 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}$， $D^T=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{n1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}$，

则 $D^T=D$.

(2) 交换行列式中任意两行(列)的位置后，行列式仅改变符号. 如果行列式有两行(列)的对应位置元素相同，则此行列为零.

(3) 用数 k 乘行的式的一行(列)，等于以数 k 乘此行列式. 即如果 $D=|a_{ij}|_n$，则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = kD$$

由此可以得到：

i) 如果行列式某行(列)的所有元素有公因子，则公因子可以提到行列式的外面. 特别地，若行列式中有一行(列)的元素全部为零，则这个行列式等于零.

ii) 如果行列式有两行(列)对应元素成比例，则行列式等于零.

(4) 如果行列式中某一行(列)的各元素都可表成两项之和，如 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}, j=1,2,\cdots n(i=1,2,\cdots n)$，则这个行列式等于两个同阶行列式之和. 这两个同阶行列式的第 i 行(j 列)，一个是 $b_{i1}, b_{i2},\cdots b_{in}(b_{1j},b_{2j},\cdots b_{nj})$，另一个是 $c_{i1},c_{i2},\cdots c_{in}(c_{1j},c_{2j},\cdots c_{nj})$，而其余各行(列)都与原来行列式相同.

(5) 把行列式某一行(列)的元素乘以同一数 k 加到另一行(列)的对应元素上之后，行列式的值不变.

(6) 若行列式中某行(列)中各元素是其余各行(列)分别乘一常数后各对应元素之和，则行列式的值为零.

4 拉普拉斯(laplace)定理：

在 n 阶行列中，任意选取 k 行(列)$(1\leqslant k\leqslant n-1)$后，则含于此诸行(列)中所有 k 阶子式(共 C_n^k 个，设 $t=C_n^k$) M_i 分别与它们的代数余子式 A_i 乘积之和等于原行列式的值. 即

$$D=\sum_{i=1}^{t}M_iA_i=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t \qquad (1.2)$$

特别地，当 $i=1$ 时，有

$$\begin{aligned}D&=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots n)\\&=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1,2\cdots n)\end{aligned} \qquad (1.3)$$

其中 A_{ij}是 a_{ij} 的代数余子式.

行列式任意一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积和必等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\ (i\neq j)$$

$$a_{1k}A_{1l}+a_{2k}A_{2l}+\cdots+a_{nk}A_{nl}=0\ (k\neq l)$$

5 行列式乘法法则

$$|a_{ij}|_n|b_{jk}|_n=|a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk}|_n \qquad (1.4)$$

学习本章的基本要求

行列式是线性代数中的一个重要的研究对象，也是一个基本

的数学工具，在数学的许多部门中有着广泛的应用．其基本要求是：

1．弄清排列和逆序的概念，掌握排列的逆序数的算法；

2．理解并掌握 n 阶行列式的定义和它的一般项的表示法；

3．熟记行列式的性质，能灵活运用性质化简、计算行列式，掌握行列式计算的基本方法；

4．会求行列式 $|a_{ij}|_n$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij}，熟练掌握行列式按某行（列）展开的方法，能用拉普拉斯定理计算某些特殊形式的行列式．

二　疑难解释

1　n 阶行列式定义中包含几层意思？

答　n 阶行列式的定义包含三层意义：

（1）是 $n!$ 项的代数和；

（2）每一项取自不同行和列的 n 个元素的乘积；

（3）每一项的符号是：当其元素的行指标按自然数顺序排列后，如果列指标排列为偶排列，则取正号；如果为奇排列，则取负号．因此一般项可写为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$．

以上三层意义对 n 阶行列式定义是缺一不可的．n 阶行列式 $|a_{ij}|_n$ 的一般项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

因此，也可把行列式定义为：

$$D=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 元一个排列．

2　取自然数列 $1,2,\cdots n$ 怎样排列其逆序数最大？它是多少？

答　排列 $n,n-1,\cdots 2,1$ 的逆序数最大，等于

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$$

3 设 n 元排列的$\cdots i\cdots j\cdots$的逆序数为 k，那么，n 元排列$\cdots j\cdots i\cdots$的逆序数是 $k+1$ 或 $k-1$ 吗？举例说明.

答 不一定是 $k+1$ 或 $k-1$，例如，取排列 123，$\tau(123)=0$，对换(1,3)，得 321，$\tau(321)=3$

4 5 阶行列式的展开式中含形如 $a_{14}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 的项有哪些？

若从它们和中提出 $a_{14}a_{23}$这个因子，括号里的结果是什么？

答 $j_3j_4j_5$ 应是 125 的所有排列共 6 个，由列排列逆序数的奇偶可确定该项的符号. 6 项应是：$-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55}$，$a_{14}a_{23}a_{31}a_{45}a_{51}$，$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55}$，$-a_{14}a_{23}a_{31}a_{45}a_{51}$，$-a_{14}a_{23}a_{35}a_{42}a_{52}$，$a_{14}a_{23}a_{35}a_{42}a_{51}$等. 提出公因子 $a_{14}a_{23}$后，括号内的和为

$$-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} \end{vmatrix}$$

5 在一个 n 阶行列式中等于零的元素如果比 $a(n^2-n)$还多，则这个 n 阶行列式的值必为零，为什么？

答 因为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

由 n 阶行列式定义知 D 是 $n!$ 项代数和，而其中每一项都是 n 个元素的乘积，这 n 个元素又需取自不同行不同列.

又这 n 阶行列式 D，一共有 n^2 个元素，如果等于零的元素比(n^2-n)还多，那么其中不等于零的元素一定比 $n^2-(n^2-n)=n$ 还少，也就是 D 中最多有$(n-1)$个元素不等于零，所以 D 的 $n!$ 项中每一项的 n 个元素中必有零元素出现，即 $n!$ 项的每一项都是零，

故 $D=0$

6 化简行列式的基本方法是什么?通常按什么顺序选择化简方法?

答 任何一个行列式都可用行列式的性质化为三角形行列式,其主对角线上元素的乘积就是所要求的结果;或用行列式的性质,使某行(列)出现尽可能多的零,再按这行(列)展开降阶,如此重复,最终可将行列式化为若干个二、三阶行列式的和.这两个方法是计算行列式的基本方法.在实际计算中上述两法是交叉进行的,如果行列式各行大部分元素相同,应首先考虑使用行列式性质化简;如果行列式中零元素较多,则应考虑使用按行(列)展开的方法.

由于计算行列式方法比较灵活,因而在计算时要首先仔细考察原行列构造上的特点,一般用下面的步骤分析:

(1) 行列式有无明显得零的特征,如两行(列)元素对应成比例等;

(2) 行列式的大部分元素是否相同,如果是,则用性质(5),使行列式出现尽可能多的零;

(3) 某行(列)是否大部分元素为零,如果是,则可按该行(列)展开;

(4) 各行(列)元素之和是否相同,若相同,可以把各列(行)都加到第1列(行)并提出公因子;

(5) 行列式及其划掉第1行第1列后的降阶行列式是否有相同的形状.如有,可采用归纳法或递推法求出原行列式;

(6) 如果找不到行列式任何特点,可利用两个基本方法来解决.

比较复杂的高阶行列式,一般要经过几次分析、试算(预测),或变换或降阶,最后确定采用相对简单的办法.在逐渐降阶的过程中,又要随时注意新的行列式的特点,看是否能利用特殊的行列式

(如范德蒙行列式、对称式或反对称式等).

7 在 n 阶行列式 D 中,如果

(1) 所有元素变号,问 D 有何变化?

(2) D 中各偶数行对应元素之和等于奇数行对应元素之和,问 D 的值是多少?

(3) D 中每个元素 a_{ik} 乘以 $c^{i-k}(c\neq 0)$,D 如何变化?

(4) 从 D 中的第 2 列起每列加上前一列,而第 1 列加上最后一列,问 D 有何变化?

(5) 从 D 的第 1 行起每一行减去它的后一行,而最后一行减去第 1 行,问 D 有何变化?

答 (1) D 变成 $(-1)^n D$; (2) $D=0$; (3) D 不变;

(4) 用 D' 表示变化后的行列式,则 $D'=\begin{cases}0 & n \text{ 为偶数时};\\ 2D & n \text{ 为奇数时}.\end{cases}$

(5) $D=0$

8 在 n 阶行列式中,如果

(1) 把第 1 列移到最后一列,而其余各列保持原来次序向左移动,行列式的值变化如何?

(2) 把它的行写在相反的次序上(即第 1 行写在第 n 行,第 2 行写在 $n-1$ 行,…,第 n 行写在第 1 行)问行列式的值变化如何?

答 (1) 根据行列式性质(2),D 变成 $(-1)^{n-1}D$.

(2) D 变成 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$

9 何谓行列式计算的递推法,它的一般步骤如何?

答 利用行列式的性质,把给定的 n 阶行列式 D_n 变换成用同样形式的 $(n-1)$ 阶(或更低阶)的行列式表示出来(即找出递推关系式),然后根据递推关系式求出 D_n,这种计算法叫做递推法. 递推法分直接、间接两种. 用直接递推法进行计算的关键是设法找出一个关于 D_{n-1} 的代数式来表示 D_n,依次从 $D_1\to D_2\to\cdots\to D_n$ 逐级递推,最后求出 D_n 的值;间接递推法是变换原行列式,构造出关

于 D_n 和 D_{n-1} 的方程组，从而消去 D_{n-1} 就可解得 D_n. 有时要根据行列式特点进行拆项和造零等变换.

例 1 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

解 按第 1 列展开 D_n 得递推关系式 $D_n=xD_{n-1}+a_n$

同理得 $D_{n-1}=xD_{n-2}+a_{n-1}$

$D_{n-2}=x\mathrm{D}_{n-3}+a_{n-2}$

…………

$D_3=xD_2+a_3$

$D_2=xD_1+a_2$

$D_1=x+a_1$

从而得 $D_n=xD_{n-1}+a_n$

$xD_{n-1}=x^2D_{n-2}+a_{n-1}x$,

……………………

$x^{n-2}D_3=x^{n-2}D_2+a_3x^{n-3}$

$x^{n-2}D_2=x^{n-1}D_1+a_2x^{n-2}$

把上述 $(n-1)$ 个等式相加，得

$D_n=x^{n-1}D_1+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

故 $D_n=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\cdots+a_nx+a_n$

例 2 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}$$

解 根据最后一列，把 D_n 拆成两个行列式相加，

$$D_n=\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & a \\ a & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & 0 \\ a & a+x_2 & \cdots & a & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & 0 \\ a & a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n-1 & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}+x_nD_{n-1}$$

$$=x_1x_2\cdots x_{n-1}a+x_nD_{n-1}$$

同理， $D_{n-1}=x_1x_2\cdots x_{n-2}a+x_{n-1}D_{n-2}$，于是

$$D_n=x_1x_2\cdots x_{n-1}a+x_1x_2\, x_{n-2}ax_n+x_nx_{n-1}D_{n-2}$$

如此继续下去，可得：

$$\begin{aligned} D_n&=x_1x_2\cdots x_{n-1}a+x_1x_2\cdots x_{n-2}ax_n+\cdots \\ &\qquad +x_1x_2ax_4\cdots x_n+x_nx_{n-1}\cdots x_3D_2 \\ &=x_1x_2\cdots x_{n-1}a+x_1x_2\cdots x_{n-2}ax_n+\cdots \\ &\qquad +x_1x_2ax_4\cdots x_n+x_nx_{n-1}\cdots x_3(ax_1+ax_2+x_1x_2) \\ &=x_1x_2\cdots x_n+a(x_1x_2\cdots x_{n-1}+\cdots+x_1x_3\cdots x_n+x_2x_3\cdots x_n) \end{aligned}$$

当 $x_1x_2\cdots x_n\neq0$ 时，还可以改写成

$$D_n=x_1x_2\cdots x_n\left[1+a\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\right]$$

10 如果 n 阶行列式中处于某 k 行和某 l 列的交叉处的元素都等于零，且 $k+l>n$，则这个 n 阶行列式必为零，为什么？

答 因为 k、l、n 均为正整数，又 $k+l>n$，所以 $l>n-k$，不妨设 $l=n-k+1=n-(k-1)$