21世纪大学课程辅导丛书

数学分析

学习指导 典型题解

(上册) (一元函数部分)

新版

李惜雯

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

21世纪大学课程辅导丛书

数学分析

学习指导 典型题解

(上册) (一元函数部分)

新版

李惜雯

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

丛书总序

"21世纪大学课程辅导丛书"第一版出版已有十年时间，几经再版，深受广大读者的喜爱。为了满足读者朋友的需要，也为了适应高等教育改革的形势和新的教学要求，我们组织作者对本丛书进行了修订，以全新的面貌奉献给大家。

我们出版这套丛书的目的就是为普通高等学校理工类专业的大学生提供一流的学习资源，使大家共享一流教师的教学经验和教学成果，更好地学习、掌握基础课和专业基础课知识，为今后的学习和深造打下良好的基础。

西安交通大学是国内仅有的几所具有百年历史的高等学府，是首批进入国家"211工程"建设的七所大学之一，1999年被国家确定为中西部地区惟一一所以建设世界知名高水平大学为目标的学校。西安交大历来重视本科生教学，1996年成为全国首家本科教学评估为优秀的大学。学校拥有国家级、省部级、校级教学名师数十名，具有丰富的、一流的教学资源。

本丛书由西安交通大学长期在教学一线主讲的教授、副教授主编，他们具有丰富的基础课、专业基础课教学和辅导经验。丛书作者们在长期的教学实践中，深深了解学生在学习基础课、专业基础课时的难点和困惑点之所在，对如何使学生更有效地学习、掌握课程的基本知识和解题技巧进行了深入的探索和研究，并将成果体现于书中。

本丛书以普通高等学校的学生为主要对象，不拘泥于某一本教材，而是将有特色和使用量较大的各种版本的教材加以归纳总结，取其精华，自成一体。书中对课程的基本内容、研究对象、教学要求、学习方法、解题思路等进行了全面、系统的总结和提炼，按基本知识点、重点与难点、典型题解析、自我检测题等环节进行编排；书后附录了自我检测题参考答案和近年来一些院校的期末考试题、考研试题及相应题解。本丛书的指导思想是帮助学生理清学习思路，总结并掌握各章节的要点；通过各类精选题的剖析、求解和示范，分析解题思路，示范解题过程，总结方法要略，展示题型变化；达到扩展知识视野，启迪创新思维，促进能力提高的目的。

本丛书既可以单独使用，也可以与其他教材配合使用；既可以作为课程学习时的同步自学辅导教材，也可以作为考研复习时的主要参考资料。

我们衷心希望本丛书成为您大学基础课和专业基础课学习阶段的良师益友，帮助您克服困难，进入大学学习的自由王国；也希望在考研冲刺时本丛书能助您一臂之力，使您一举成功！

在学习使用过程中，您如果发现书中有不妥之处或有好的建议，敬请批评指正并反馈给我们，我们一定会进一步改进自己的工作，力争使您满意。

真诚感谢您使用西安交大版图书。

西安交大出版社网址： http://press.xjtu.edu.cn/
理工医事业部网址： http://lgny.xjtupress.com/
理工医事业部信箱： jdlgy@yahoo.cn

西安交通大学出版社
2008 年 6 月

前　言

数学分析是数学类各专业的一门学时最高(290 学时左右)的专业基础课。其教学目的是培养学生的专业素养,为后续专业基础课、专业课打下知识方面与能力方面的基础。正是这个教学目的,使该课程在研究方法、理论体系、语言表述、分析技巧等的讲授与学习方面均有较高的要求。所以,本课程在教与学两方面都有较大的难度。

为了帮助学生掌握数学分析最基本的研究方法和最核心的理论体系,并能对分析语言运用自如,对基本的分析技巧有所掌握,作者根据自己多年从事数学分析教学工作的经验与体会,经心挑选 500 余道(大)题(上册含 252 道(大)题),并给出论证、分析、讨论,编成此书。

本书与多数数学分析题解的不同在于:第一,本书侧重于理论部分,因为一般的计算类题目在许多同类书中均可找到;第二,本书每题证(解)之后均有注释,对所用概念、知识作进一步的讨论、分析,特别突出概念与思路的讨论。这样将有助于学生对知识内在联系的把握,有利于对概念与理论的深刻理解。

全书共分 10 章。上册(一元函数部分)5 章,下册(多元函数与级数部分)5 章。与本书内容体系基本一致的教材为复旦大学(陈传璋、金福临等编,高等教育出版社出版)的《数学分析》(第二版)。

由于本人水平有限,编写中定有不少错误与不足之处,敬请读者批评指正。在本书的编写过程中,西安交通大学研究生李鑫、方李斌同学参加了十分辛苦的校稿工作,同时作者得到西安交通大学出版社的大力支持,在此一并致谢!

编　者

2008 年 9 月

于西安交通大学

目　录

第1章 函数与极限

1.1 函 数

1.1.1 基本要求

1. 掌握函数的定义及有关概念；
2. 掌握函数的几何性态；
3. 掌握反函数、复合函数的概念及其应用；
4. 掌握基本初等函数的性质、定义域、值域及初等函数的概念.

1.1.2 内容提要

1. **定义1**(函数) 设给定数集 X、Y，若存在对应规则 f，使得对 $\forall\, x\in X$，存在唯一的 $y\in Y$ 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的函数(或映射)，记为 $f:X\to Y, x\mapsto f(x)$ 或 $y=f(x)$，$x\in X$，其中 $x\in X$ 称为自变量，$y=f(x)$ 称为因变量. 并称 X 为 f 的定义域，数集 $\{f(x)\,|\,x\in X\}\subseteq Y$ 称为 f 的值域.

2. **定义2**(一一对应) 设 $f:X\to Y$，若

(1) $\forall\, x_1,x_2\in X$，有 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$(此时称 $f:X\to Y$ 为单射)，

(2) $\{f(x)\,|\,x\in X\}=Y$(此时称 $f:X\to Y$ 为满射)，

则称 $f:X\to Y$ 为一一对应(也称 $f:X\to Y$ 为双射).

3. **定义3**(单调函数) 设 $f:X\to Y$，若 $\forall\, x_1,x_2\in X$，有 $x_1>x_2\Rightarrow f(x_1)\geqslant f(x_2)$ $(f(x_1)\leqslant f(x_2))$，则称函数 $y=f(x)$ 在 X 上单调增(单调减)，且当其中等号恒不成立时称 $y=f(x)$ 在 X 上严格单调增(严格单调减).

4. **定义4**(反函数) 设 $f:X\to Y$，若 $\forall\, y\in Y$，由方程 $f(x)=y$ 可确定唯一解 $x\in X$，则此对应规则定义一个从 Y 到 X 的函数(映射)，记之为 $f^{-1}:Y\to X$. 称为 f 的反函数.

5. **定理**(反函数存在性) 函数 $f:X\to Y$ 存在反函数 $f^{-1}:Y\to X\Leftrightarrow f:X\to Y$ 为一一对应.

6. **推论** 若 $f(x)$ 在 X 上严格单调，则 f 的反函数必存在，且与 $f(x)$ 具同一单调性.

7. **定义5**(复合函数) 设 $f:X\to Y$，$\varphi:Y\to V$，则变量 $z=\varphi(y)$ 通过变量 $y=f(x)$ 成为变量 $x\in X$ 的函数. $z=\varphi(f(x))$，$x\in X$，称之为复合函数.

8. **定义6**(奇偶函数) 设 $a>0$(可有 $a=+\infty$)，如果 $f(x)$ 定义于 $(-a,a)$，且 $\forall\, x\in(-a,a)$，有 $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$，则称 $f(x)$ 为偶(奇)函数.

9. **定义7**(周期函数) 若存在 $\omega>0$，使得 $\forall\, x\in X$，有 $f(x+k\omega)=f(x)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，则称 $f(x)$ 是 ω 周期函数. ω 称为周期.

10. **定义8**(有界函数) 设 $f:X\to Y$，若存在 $M>0$，使得 $\forall\, x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$. 则

称 $f(x)$ 在 X 上有界，M 称为它的一个界.

11. **定义 9（无界函数）** 设 $f:X\to Y$，若 $\forall M>0$，存在 $x_M\in X$，使得 $|f(x_M)|>M$. 则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

12. **基本初等函数**：

(1) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$；

(2) 对数函数 $y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$，$x\in(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$；

(3) 幂函数 $y=x^\mu(\mu\neq 0)$，设 n,m 为自然数.

① 当 $\mu=n$ 时，$x\in(-\infty,+\infty)$；

② 当 $\mu=-n$ 时，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；

③ 当 $\mu=\dfrac{1}{2n}$ 时，$x\in[0,+\infty)$；

④ 当 $\mu=\dfrac{1}{2n+1}$ 时，$x\in(-\infty,+\infty)$；

⑤ 当 $\mu=\dfrac{m}{n}$ 时，$y=x^\mu=(x^{\frac{1}{n}})^m$；

⑥ 当 μ 为无理数时，$y=x^\mu=e^{\mu\ln x}$，定义域为 $(0,+\infty)$.

(4) 三角函数： $y=\sin x$，$y=\cos x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，

$y=\tan x$，$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，

$y=\cot x$，$x\neq k\pi$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

(5) 反三角函数（反正、余弦）： $y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$，值域 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$；

$y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$，值域 $[0,\pi]$.

(6) 双曲函数： $\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，值域：$(-\infty,+\infty)$；

$\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，值域：$[1,+\infty)$.

13. **定义 10（初等函数）** 经过基本初等函数的有限次四则运算及有限次复合所得到的函数，称为初等函数.

1.1.3 例题解析

例 1-1 写出下列定义于 X 上函数的表达式，作出其图像，求其值集，并求指定点的函数值.

(1) $X=(-4,5)$，$f(x)=[x]$ 表示"取不超过 x 的最大整数"，求 $f(-3.3)$，$f(4.2)$，$f(0.999)$；

(2) $X=[0,20]$，$f(x)=\pi(x)$ 表示"取不超过 x 的素数的个数"，求 $f(0)$，$f(10.999)$，$f(11)$；

(3) $X=(-\infty,+\infty)$，$f(x)=\mathrm{sgn}x$ 表示"大于 0 的 x 与 1 对应，小于 0 的 x 与 -1 对应，0 与 0 对应"，求 $f(-100)$，$f(0)$，$f(55.99)$；

解 (1) 由 $X=(-4,5)$ 及对应规则 f 为"取不超过 x 的最大整数"，得

$$f(x)=[x]=\begin{cases}-4 & -4<x<-3\\ -3 & -3\leqslant x<-2\\ -2 & -2\leqslant x<-1\\ -1 & -1\leqslant x<0\\ 0 & 0\leqslant x<1\\ 1 & 1\leqslant x<2\\ 2 & 2\leqslant x<3\\ 3 & 3\leqslant x<4\\ 4 & 4\leqslant x<5\end{cases}$$

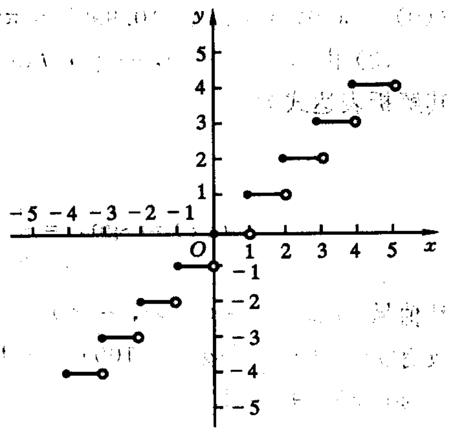

图 1.1

故值域 $\{f(x)\mid x\in(-4,5)\}=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4\}$. 其图像为图 1.1 所示.

且由 $f(x)$ 的定义, $f(-3.3)=[-3.3]=-4$, $f(4.2)=4$, $f(0.999)=[0.999]=0$.

(2) 由 $X=[0,20]$ 及 $f(x)=\pi(x)$ 表示"不超过 x 的素数的个数",得 $f(x)$ 的解析表达式为

$$f(x)=\pi(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<1\\ 1 & 1\leqslant x<2\\ 2 & 2\leqslant x<3\\ 3 & 3\leqslant x<5\\ 4 & 5\leqslant x<7\\ 5 & 7\leqslant x<11\\ 6 & 11\leqslant x<13\\ 7 & 13\leqslant x<17\\ 8 & 17\leqslant x<19\\ 9 & 19\leqslant x\leqslant 20\end{cases}$$

故值域 $\{f(x)\mid x\in[0,20]\}=\{0,1,2,3,\cdots,9\}$.

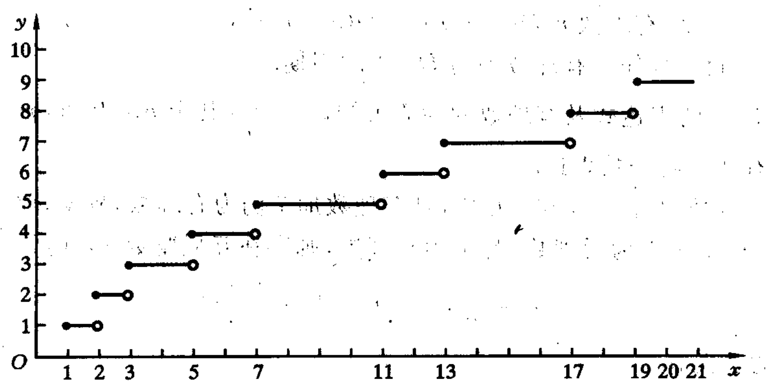

图 1.2

其图像为图 1.2 所示.

$f(0)=\pi(0)=0$；$f(10.999)=\pi(10.999)=5$；$f(11)=\pi(11)=6$.

(3) 由 $X=(-\infty,+\infty)$，$f(x)=\mathrm{sgn}x$ 的对应规则，可得到其解析表达式为

$$f(x)=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

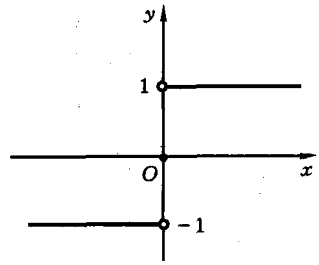

图 1.3

其值域 $\{f(x)\mid x\in(-\infty,+\infty)\}=\{0,\pm1\}$，图像为图 1.3 所示.故有 $f(-100)=\mathrm{sgn}(-100)=-1$，$f(0)=\mathrm{sgn}0=0$，$f(55.99)=\mathrm{sgn}(55.99)=1$.

注 1. 本题用到函数的概念；

2. 本题中的(1)所给函数称为“取整函数”.易见，$f(x)=[x]$ 可定义于 $(-\infty,+\infty)$，其图像为自左向右的阶梯线段；(2)所给函数可定义于 $[0,+\infty)$，其性质与(1)的大致相同，只不过不是均匀的，这是由 $\pi(x)$ 的对应规则决定的；(3)所给的函数常被称为“符号函数”.由此函数的定义，可有表达式 $|x|=x\mathrm{sgn}x$.由(1)～(3)的图像可见，这里所给的函数均为分段定义的，常称这类分段定义的函数为分段函数，分段函数在实际中应用很广.

例 1-2 对下列函数考查其是否为周期的，若是，求出其周期.

(1) $D(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理点时}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理点时}\end{cases}$

(2) $R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}\text{，其中 } p,q \text{ 互质，} q>0\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理点}\end{cases}$

(3) $f(x)=x-[x]$　　(4) $f(x)=xD(x)$

解 (1) 由 $D(x)$ 的定义，并注意对任一有理数 r，其与有理数之和仍为有理数，其与无理数之和为无理数，所以有：

$$\forall \text{ 有理数 } r, D(x+r)=D(x), x\in(-\infty,+\infty).$$

即 $D(x)$ 是周期函数，且任一有理数均为 $D(x)$ 的周期.

(2) 由 $R(x)$ 的表达式及有理数的性质可知，$x=\dfrac{p}{q}$(其中 p,q 互质，$q>0$)是有理数，且任一有理数可有此既约分数表达.

注意当 p,q 互质时，$p+q$ 与 q 互质，且有理数加 1 仍为有理数，故 $\forall\, x\in(-\infty,+\infty)$，若 x 为无理数，有 $x+1$ 为无理数，若 x 为有理数，则存在互质整数 $p,q(q>0)$，使

$$x=\frac{p}{q},\qquad x+1=\frac{p+q}{q}$$

所以由 $R(x)$ 的定义有

$$R(x+1)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}, q,p \text{ 互质}, q>0\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数.}\end{cases}$$

即 $R(x)$ 为周期函数，且 1 为其周期.

(3) 首先注意，$\forall x \in (-\infty, +\infty)$，有$[x] \leqslant x < [x]+1$，

所以 $[x]+1 \leqslant x+1 < [x]+2$，由取整函数的定义及$[x]+1$与$[x]+2$均为整数可知，$[x+1]=[x]+1$. 于是$\forall x \in (-\infty, +\infty)$，

$$f(x+1)=(x+1)-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]=f(x).$$

即 $f(x)=x-[x]$是周期函数，且1为其周期.

(4) 因为 $xD(x)=\begin{cases} x & \text{当 } x \text{ 为有理点时} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理点时} \end{cases}$

注意 有理数 $+\begin{cases}\text{有理数}=\text{有理数} \\ \text{无理数}=\text{无理数}\end{cases}$，无理数 $+\begin{cases}\text{有理数}=\text{无理数} \\ \text{无理数}\quad\text{结果不一定}\end{cases}$

故

$$\text{对任意有理数 } \beta \neq 0, f(x+\beta)=\begin{cases} x+\beta & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases};$$

$$\text{对任意无理数 } \alpha, f(x+\alpha)=\begin{cases} 0 & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ \text{不定} & \text{当 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

即 $f(x)=xD(x)$ 不是周期函数.

注 1. 本题用到有理数、无理数的基本性质、取整函数的定义、周期函数的定义等知识点；

2. (1) 所给函数 $D(x)$ 称为 Dirichlet 函数，由讨论可见，任意一个有理数均为此函数的周期，即此函数虽为周期函数，但并不像我们在初等数学中见过的(如$\sin x$)具最小正周期的周期函数，$D(x)$ 无最小正周期；(2) 中所给函数称为 Riemann 函数，由互质整数的性质，证明了 $R(x)$ 是以1为周期的函数，且可以看出1是 $R(x)$ 的最小正周期. $D(x)$ 与 $R(x)$ 虽定义于 $(-\infty, +\infty)$，但由其定义(对应规则)可见，二者的图像均不能画出. 这是因为有理点的稠密性所导致的，以后会经常用到这两个函数；

3. 在(3)中所给函数的讨论中，关键是由取整函数的定义，推出$\forall x \in (-\infty, +\infty)$，有 $x+1$ 介于两相邻整数$[x]+1$与$[x]+2$之间，从而知道$[x+1]=[x]+1$(不超过$x+1$的最大整数). 由此可推得，$\forall k \in \mathbf{Z}^+$，$[x+k]=[x]+k$. 同理，可有$\forall k \in \mathbf{Z}-$，$[x+k]=[x]+k$. 即$\forall$ 整数k，$[x+k]=[x]+k$，此结果在取整时常用到，但此性质对非整数α不成立. 即一般地，$[x+\alpha] \neq [x]+[\alpha]$. 例

$$[1.8+0.2]=2 \neq [1.8]+[0.2]=1.$$

例 1-3 下列函数能否构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，如果能，指出其定义域与值域.

(1) $f(x)=2^x, \varphi(x)=x^2$

(2) $f(x)=\ln x, \varphi(x)=1-x^2$

(3) $f(x)=x^2+x^3, \varphi(x)=\begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ -1 & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$

(4) $f(x)=x^2\ln(1+x), \varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}$

解 设$f(x)$的定义域为X，$\varphi(x)$的值域为X_1，则仅当$X_1 \cap X \neq \varnothing$时，$f[\varphi(x)]$有意义.

(1) 因为 $f(x)=2^x$ 的定义域为 $X=(-\infty, +\infty)$，

$\varphi(x)$ 的定义域为 $X = (-\infty, +\infty)$，值域为 $[0, +\infty) \subset (-\infty, +\infty)$，故复合函数 $f[\varphi(x)] = 2^{\varphi(x)} = 2^{x^2}$ 定义于 $(-\infty, +\infty)$，其值域为 $[1, +\infty)$；

(2) 因为 $f(x) = \ln x$ 定义域为 $(0, +\infty)$，$\varphi(x) = 1 - x^2$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(-\infty, 1]$，且仅当 $x \in (-1, 1)$ 时，$\varphi(x) \in (0, 1] \subset (0, +\infty)$，即当 $x \in (-1, 1)$ 时，复合函数 $f[\varphi(x)] = \ln(1 - x^2)$ 有意义，其定义域为 $(-1, 1)$，值域为 $(-\infty, 0]$；

(3) 因为 $f(x) = x^2 + x^3$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$，$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ -1 & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$

定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $\{-1, 1\} \subset (-\infty, +\infty)$. 故复合函数 $f[\varphi(x)]$ 对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有意义，且

$$f[\varphi(x)] = \varphi^2(x) + \varphi^3(x) = \begin{cases} 2 & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $\{0, 2\}$.

(4) 因为 $f(x) = x^2\ln(1 + x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$. $\varphi(x) = e^{-x}$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, +\infty) \subset (-1, +\infty)$，故复合函数 $f[\varphi(x)]$ 有意义，且

$$\begin{aligned} f[\varphi(x)] &= \varphi^2(x)\ln(1 + \varphi(x)) = e^{-2x}\ln(1 + e^{-x}) \\ &= e^{-2x}[\ln(1 + e^x) - x] \end{aligned}$$

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, +\infty)$（只要注意在 $f[\varphi(x)] = e^{-2x}\ln(1 + e^{-x})$ 中，$e^{-2x} > 0, e^{-x} > 0$）.

注 1. 本题用到函数的有关概念（对应规则，定义域，值域）、复合函数的有关概念等知识点；

2. 由本题可见，若 $f(x)$ 的定义域为 X，值域为 Y，$\varphi(x)$ 的定义域为 X'，值域为 X_1，则仅当 $X_1 \cap X \neq \varnothing$ 时，复合函数 $f[\varphi(x)]$ 有意义，且当 $X_1 \subseteq X$ 时，$f[\varphi(x)]$ 的定义域即为 $\varphi(x)$ 的定义域 X'，其值域 $\subseteq Y$；当 $X_1 \not\subseteq X$，但 $X_1 \cap X \neq \varnothing$ 时，复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是被 $X_1 \cap X$ 所对应的，本例中的(2)即为此种情形；

3. 对任给的两个函数 $f(x)$、$\varphi(x)$，复合函数 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$ 是否有意义，应首先注意二者的定义域、值域间的关系. 依本题所给思路进行考查. 即不是任何两个函数都可以构成复合函数的. 例：

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - x)}, \text{其定义域为 } x \neq 0, 1.$$

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}, \quad \text{其值域为 } \{0, 1\}.$$

所以复合函数 $f[D(x)]$ 是没有意义的.

但是，当 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 时，无论 $\varphi(x)$ 的值域如何，复合函数 $f[\varphi(x)]$ 总是有意义的. 特别地，$\varphi(x) = f(x)$ 时，任意次复合 $f\underbrace{[f\cdots f(f(x))\cdots]}_{n\text{重}} \triangleq f^n(x)$ 均有意义. 若 $f(x)$ 的值域也为 $(-\infty, +\infty)$，函数 f 则常被称为 $R = (-\infty, +\infty)$ 上的自映射. 在 R 上的自映射中，研究方程 $f^n(x) = x$ 的解是有意义的，此方程的解即是经过 f 的连续 n 次映射后成为自身的那种点 x. 常称这种点 x_0 为映射 f 的 n-周期点.

例 1-4 设 $f(x)=\begin{cases}1+x & \text{当 } x\leqslant 0\\ x & \text{当 } x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x & \text{当 } x\leqslant 0\\ -x^2 & \text{当 } x>0\end{cases}$，求 $f(g(x))$，$g(f(x))$.

解 为求 $f(g(x))$，首先注意 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且 $g(x)$ 的值域为 $(-\infty,0]\subset(-\infty,+\infty)$，于是有

$$f(g(x))=\begin{cases}1+g(x) & \text{当 } g(x)\leqslant 0\\ g(x) & \text{当 } g(x)>0\end{cases}$$

而 $g(x)\not>0$. 所以

$$f(g(x))=1+g(x)=\begin{cases}1+x & \text{当 } x\leqslant 0\\ 1-x^2 & \text{当 } x>0\end{cases}$$

为求 $g(f(x))$，注意 $g(x)$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f(x)$ 的值域为 $(-\infty,+\infty)$，且因为

$$f(x)=\begin{cases}1+x\leqslant 0 & \text{当 } x\leqslant -1\\ 1+x>0 & \text{当 } -1<x\leqslant 0\\ x>0 & \text{当 } x>0\end{cases}$$

由 $g(x)$ 的定义得

$$g(f(x))=\begin{cases}f(x) & \text{当 } f(x)\leqslant 0\\ -(f(x))^2 & \text{当 } f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}1+x & \text{当 } x\leqslant -1\\ -(1+x)^2 & \text{当 } -1<x\leqslant 0\\ -x^2 & \text{当 } x>0\end{cases}$$

注 1. 本题用到分段函数概念及复合函数概念；

2. 由本题可见，两个分段函数进行复合时，特别应注意前一个分段函数的分段定义域与另一个的分段值域之间的关系. 例为求 $f(g(x))$，注意到 $x\in(-\infty,+\infty)$，$g(x)\not>0$，而在 $f(x)$ 定义中，当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=1+x$，故得到 $\forall\, x\in(-\infty,+\infty)$，$f(g(x))=1+g(x)$；

而为求 $g(f(x))$，由于在 $g(x)$ 定义中，$x>0$ 与 $x\leqslant 0$ 分别具有不同表达式，故对 $f(x)$ 的值域应以 0 为界进行划分. 即分 $f(x)>0$ 与 $f(x)\leqslant 0$. 对应地，将 $f(x)$ 的表达式写为

$$f(x)=\begin{cases}1+x & \text{当 } x\leqslant -1\\ 1+x & \text{当 } -1<x\leqslant 0\\ x & \text{当 } x>0\end{cases}$$

这是分段函数进行复合时的一般思路.

例 1-5 在所给条件下，求 $f(x)$：

(1) 如果 $f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}\quad(x\neq 0)$

(2) 如果 $f(\dfrac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}\quad(x>0)$

(3) $f(\dfrac{1-x}{x+1})=x\quad(x\neq -1)$

解 由复合函数的概念，所给条件均可视为函数 f 与某已知函数 g 的复合结果.

(1) 令 $x+\dfrac{1}{x}=g(x)=t$，$x\neq 0$.

因为
$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$$

所以 $f(t)=t^2-2, t\in(-\infty,+\infty)$ 为所求.

(2) 令 $\frac{1}{x}=g(x)=t, x>0$.

因为 $$x+\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}, t>0$$

所以，$f(t)=\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}, t>0$ 即为所求.

(3) 令 $\frac{1-x}{x+1}=g(x)=t\ (x\neq-1)$

则

$$xt+t+x-1=0\Rightarrow x(t+1)+(t-1)=0,\ x=\frac{1-t}{t+1}$$

所以 $f(t)=\frac{1-t}{t+1}\ (t\neq-1)$ 即为所求.

注 1. 本题用到复合函数、函数概念；

2. 本题所用方法是此类问题的一般方法，题中条件均为 $f(g(x))$、$g(x)$ 已知的条件下，要求 $f(x)$. 作法为用 $t=g(x)$ 表出 $f(g(x))$，其实即是由 $t=g(x)$ 求出其反函数 $x=g^{-1}(t)$，然后代入 $f(g(x))$ 即可. 不过在(1)中，并不需求出 $x=g^{-1}(t)$，而用初等关系得到 $t^2=f(g(x))+2$，进而得到结果；在(2)中易于见得 $x=g^{-1}(t)=\frac{1}{t}\ (x>0\Leftrightarrow t>0)$，代入 $f(g(x))$ 即得结果；在(3)中，也是通过求得 $x=g^{-1}(t)$ 解决问题的；

3. 在(3)中，由条件 $f(g(x))=x$ 求得的 f 正好是 g 本身. 即顺便看到 $y=\frac{1-x}{x+1}(x\neq-1)$ 的反函数即为其本身. 对此，我们可指出，更一般的结果是：在 $y=\frac{ax+b}{cx+d}\ (x\neq-\frac{d}{c}; ad-bc\neq0)$ 中，当 $a=-d$ 时，其反函数即为该函数本身.

例 1-6 求下列函数的反函数及其定义域：

(1) $y=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,0]$　　(2) $y=\sin x,\ x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]$

(3) $y=x^2, x\in(-\infty,0]$　　(4) $y=\begin{cases}x & \text{当 } x\in(-\infty,1)\\ x^2 & \text{当 } x\in[1,4]\\ 2^x & \text{当 } x\in(4,+\infty)\end{cases}$

解 设 $f(x)$ 的定义域为 X，值域为 Y，如果 $f:X\to Y$ 是一一对应，则 $f(x)$ 的反函数在 Y 上存在：$f^{-1}:Y\to X$. 同时注意，若 $f(x)$ 在 X 上严格单调，则 $f:X\to Y$ 必为一一对应.

(1) $y=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,0]$，其值域为 $[0,1]$，注意曲线 $y=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,0]$ 为单位圆 $x^2+y^2=1$ 上当 $x\in[-1,0]$ 时的一段弧，故易知其在该区间上单调增，所以其在该区间上的反函数存在，又由该区间可得：$x=-\sqrt{1-y^2}, y\in[0,1]$，即以 x 表自变量，y 表因变量，所求反函数为

$$y=-\sqrt{1-x^2},\quad x\in[0,1]$$

(2) 首先注意在 $[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]$ 上，$y=\sin x$ 严格单调减，且值域为 $[-1,1]$，故反函数于

$[-1,1]$上存在.又当$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$时,$\pi-x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$,且函数$y=\sin x$的反函数为

$$x=\arcsin y, y\in[-1,1]$$

$$\therefore\quad \pi-x=\pi-\arcsin y,\quad y\in[-1,1]$$

令$\pi-x=t$,则$t\in[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]$,且$t=\pi-\arcsin y, y\in[-1,1]$,故以$x$表自变量,$y$表因变量,所求反函数为

$$y=\pi-\arcsin x, x\in[-1,1]$$

(3) 因为函数$y=x^2$于$(-\infty,0]$上严格单调减,值域为$[0,+\infty)$,故反函数于$[0,+\infty)$上存在,且由$x\in(-\infty,0]$得

$$x=-\sqrt{y},\quad y\in[0,+\infty)$$

用x表自变量,y表因变量,得所求反函数为

$$y=-\sqrt{x},\quad x\in[0,+\infty)$$

(4) 因为所给函数为分段函数,且在每段上严格单调增,值域为$(-\infty,+\infty)$,故于$(-\infty,+\infty)$上存在反函数,由各段反函数的存在性可得

$$x=\begin{cases}y & 当 y\in(-\infty,1)\\ \sqrt{y} & 当 y\in[1,16]\\ \log_2 y & 当 y\in(16,+\infty)\end{cases}$$

以x表自变量,y表因变量,所求反函数为

$$y=\begin{cases}x & 当 x\in(-\infty,1)\\ \sqrt{x} & 当 x\in[1,16]\\ \log_2 x & 当 x\in(16,+\infty)\end{cases}$$

注 *1. 本题用到反函数存在定理、基本初等函数反函数等知识点;*

2. 求反函数时应注意,在确定反函数存在的前提下,即先从方程$y=f(x)$中解得x关于y的表达式$x=f^{-1}(y)$,再将此式中的自变量用x表示,因变量用y表示,并注意$y=f(x)$的值域即为所求反函数的定义域,即可得所求结果.

例 1-7 设$f(x)=\sqrt{x}, x\in[0,1)$

(1) 求一个偶函数$F(x), x\in(-1,1)$,使得当$x\in[0,1)$时,$F(x)=f(x)$;

(2) 求一个以1为周期的函数$F(x), x\in(-\infty,+\infty)$,使得当$x\in[0,1)$时,$F(x)=f(x)$.

解 (1) 按要求,$F(x)=\begin{cases}f(x) & 当 x\in[0,1)\\ f_1(x) & 当 x\in(-1,0)\end{cases}$,且$F(x)=F(-x)$.

即$\forall x\in(-1,0)$,应有

$$f_1(x)=f(-x)=\sqrt{-x}=\sqrt{|x|}$$

故可得$F(x)=\sqrt{|x|}, x\in(-1,1)$.此即所求的偶函数.

(2) 由条件,$F(x)$以1为周期,则将以任意整数为周期,所以,$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,由$x=x-[x]+[x]$,应有$F(x)=F((x-[x])+[x])$,由$[x]$的定义,$x-[x]\in[0,1)$,