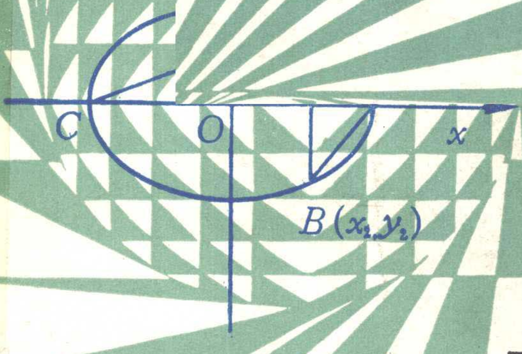
高中数学精要

修订本 （上册）



天津人民出版社

高中数学精要

〔按“两种教学要求”编〕

（修订本上）

贺信淳、明知白、张君达、魏仲和、臧龙光 编
钟善基 审订

天津人民出版社

高中数学精要
修订本（上册）
贺信淳等编
※
天津人民出版社出版
（天津市赤峰道130号）
天津新华印刷一厂印刷　新华书店天津发行所发行
※
787×1092毫米　32开本　13.75印张　1插表　280千字
1983年12月第1版
1987年10月第5版　1987年10月第5次印刷
印数：949,301－1,030,400
统一书号：　7072·1341
定　价：　2.25　元
国标号：　ISBN7-201-00085-3/G·29

出版说明

已故著名数学家华罗庚说，如果读书的时候，做不到由厚到薄，那么读书越多越麻烦，就会如堕书堆的烟海之中不能自拔。高中生学习各门功课时，在学完每一单元、章、编和全册之后，都应该把学过的内容进行全面系统的温习，通过对所学知识进行比较、分析、归纳、综合，升华出知识的本质属性及其相互间的内在联系，做到由厚到薄。我社约请北京市东城、西城、海淀、朝阳等区有经验的教师和教研员，按教学的“基本要求”和“较高要求”编写的这套《高中语文、数学、物理、化学精要》是这种由厚到薄的成功尝试。

这套丛书每科分上、下两册，曾多次在较大的范围内与读者见面，对广大高中教师和学生在复习工作中，进行由厚到薄的工作起了卓有成效的指导作用，受到读者的广泛欢迎。我们这次根据新颁布的教学大纲的要求做了修订，再次将它奉献给读者，切望得到大家的批评指正。

《高中数学精要》由贺信淳、明知白、张君达、魏仲和、臧龙光编，钟善基先生审订。

目　　录

基本要求部分

第一编　代数

第二编 平面三角

基本要求部分

第一编 代 数

第一章 数 集

一、内容概述与分析

本章主要内容有集合、实数集、复数集三部分，它们是整个中学代数的基础.

集合是近代数学中最基本、最重要的概念之一.学习集合，有助于对初等数学的一些基本概念理解得更深刻，表达得更明确.

集合部分要掌握集合的表示方法，集合同集合之间的关系.

实数部分要掌握实数的分类，实数的运算以及相反数、倒数、绝对值等基本概念.

复数部分要掌握复数的概念，复数的各种表示方法，复数的运算以及某些应用.

(一) 集合

1.集合的概念

(1) 集合：每一组对象的全体形成一个集合.

(2) 集合中元素的确定性、互异性与无序性.

确定性：对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的。这就是说，任何一个对象或者是这个集合的元素，或者不是它的元素。

互异性：对于一个给定的集合，集合中的元素是互异的。这就是说，集合中的任何两个元素都是不同的对象。

无序性：对于一个给定的集合，不考虑元素之间的顺序。

（3）含有有限个元素的集合叫做有限集，含有无限个元素的集合叫做无限集。

2.集合的表示

（1）表示集合的方法，常用的有列举法和描述法。

列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合。

描述法：把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合。

（2）常用的集合符号：N——正整数（自然数）集，Z——整数集，Q——有理数集，R——实数集，C——复数集。

3.子集、交集、并集、补集

（1）子集：如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集，记作$A\subseteq B$（或$B\supseteq A$）。

任何一个集合是它本身的子集。规定空集是任何集合A的子集，即$\varnothing\subseteq A$。

如果A是B的子集，并且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的真子集，记作$A\subset B$（或$B\supset A$）。

（2）交集：由所有属于集合A且属于集合B的元素组成的集合，叫做A，B的交集，记作$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{\,x\mid x\in A\text{且}x\in B\,\}.$$

（3）并集：由所有属于集合A或属于集合B的元素组成的集合，叫做A，B的并集，记作$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{\,x\mid x\in A\text{或}x\in B\,\}.$$

（4）补集：已知全集I，且集合$A\subseteq I$，由I中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A在集合I中的补集，记作$\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\{\,x\mid x\in I\text{且}x\notin A\,\}.$$

（5）对任何集合A，B，有

$$A\cap A=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing,\quad A\cap B=B\cap A;$$

$$A\cup A=A,\quad A\cup\varnothing=A,\quad A\cup B=B\cup A;$$

$$A\cup\overline{A}=I,\quad A\cap\overline{A}=\varnothing,\quad \overline{\overline{A}}=A.$$

（二）实数集

1.实数的概念

整数与分数统称有理数，有理数与无理数统称实数．如果把整数看成是分母为1的分数，那么有理数集实际上就是分数集．如果把整数、有限小数都看成循环节为0的循环小数，那么有理数集实际上就是循环小数的集合．这样，实数还可以作如下分类：

$$\text{实数}\left\{\begin{array}{l}\text{有理数(分数)}\left\{\begin{array}{l}\text{正有理数}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\end{array}\right\}\text{循环小数(包括整数与有限小数)}\\ \text{无理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{array}\right\}\text{无限不循环小数}\end{array}\right\}\text{小数}$$

需要注意以下几点：

（1）任何一个正整数都可以表示为

$$a_0\cdot10^n+a_1\cdot10^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\cdot10+a_n,$$

其中$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n$分别选自0到9这十个数码，$n\in N$.

（2）偶数可以表示为$2n$，奇数可以表示为$2n+1$，其中$n\in Z$。

（3）任何一个有理数都可以表示为$\frac{n}{m}$，其中$m,n\in Z$且$m\neq0$.利用它可以证明有理数的一些性质，还可以用反证法证明某些数不是有理数。

2.实数的某些性质

（1）如果$a\in R$，那么$a^2\geqslant0$.

（2）相反数：设$a\in R$，则a与$-a$互为相反数.a与b是互为相反数的充要条件是$a+b=0$.

特别要注意，$a>0$时，$-a<0$；$a=0$时，$-a=0$；$a<0$时，$-a>0$.

（3）绝对值：设$a\in R$，则

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{当}\ a\geqslant0\ \text{时；}\\ -a, & \text{当}\ a<0\ \text{时。}\end{cases}$$

$|a|$表示数轴上与a对应的点到原点的距离.

（4）如果$a\geqslant0$，$b\geqslant0$，并且$a+b=0$，那么$a=b=0$.

（三）复数集

1.复数的概念

（1）复数的表示

复数的代数形式：$a+bi(a,b\in R)$.当$b=0$时，是实数；当b

$\neq 0$ 时，是虚数；当$a=0$，$b\neq 0$ 时，是纯虚数。

复数的几何形式：复数$a+bi(a,b\in R)$可以用复平面上的点$Z(a,b)$来表示，也可以用向量$\overrightarrow{OZ}$来表示。向量$\overrightarrow{OZ}$的长度r叫做复数的模（或绝对值），记作$|a+bi|$。x轴的正方向到向量$\overrightarrow{OZ}$的角θ叫做复数的辐角。适合于$0\leqslant\theta<2\pi$的辐角θ的值，叫做辐角的主值。设$a>0$，则复数a，ai，$-a$，$-ai$的辐角的主值分别是 0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$。

复数的三角形式：$r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中

$$r=\sqrt{a^2+b^2}\text{，}\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\text{，}\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

要注意，复数的代数形式是唯一的，但三角形式却不是唯一的。

（2）复数的相等：设a_1，b_1，a_2，b_2是实数，则

$$a_1+b_1i=a_2+b_2i\Longleftrightarrow a_1=a_2\text{，}b_1=b_2.$$

（3）共轭复数：$a+bi$与$a-bi(a,b\in R)$或者$r(\cos\theta+i\sin\theta)$与$r(\cos\theta-i\sin\theta)$叫做共轭复数。复数$z$的共轭复数用$\bar{z}$表示。在复平面上，表示共轭复数的点关于实轴对称。要注意，实数与其自身共轭。

2.复数的运算

一般说来，复数的加、减法用复数的代数形式运算。复数的乘除法用复数的代数形式还是三角形式运算，要根据具体情况选定。复数的乘方与开方，在大多数情况下，用复数的三角形式较为方便。复数的乘、除、乘方、开方用三角形式进行运算的法则是

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)],$$

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}\Big[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\Big],$$

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta),n\in N$$

（棣莫弗定理），

$r(\cos\theta+i\sin\theta)$的$n$次方根是

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\quad(k=0,1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

3.数集的不断扩展是建立在人类生产实践和生活实践的需要，以及数学本身发展的需要基础上的.随着数集从自然数集到整数集，再到有理数集、实数集、复数集的扩展，越来越多的运算在新的数集中总可以实施：在自然数集中，加、乘两种运算总可以实施；在整数集中，加、减、乘运算总可以实施；在有理数集或实数集中，加、减、乘、除（除数不为零）、乘方运算总可以实施；在复数集中，加、减、乘、除（除数不为零），乘方、开方运算总可以实施.在每次扩展中，自然数集所满足的几条基本运算律（加法交换律、结合律，乘法交换律、结合律以及乘法对加法的分配律）都被保持下来.但是经过数集的不断扩展，新数集的某些性质也可能发生一些变化.如有理数集与实数集都有稠密性，而整数集却没有这一性质；实数集中元素可以比大小，复数集中，如果两个数不全是实数，就不能比大小.

4.要特别注意在学过复数之后，对中学数学各部分的影响.如因式分解与解方程，要看是在哪个数集中进行；有关函数的问题，在中学阶段，仍限在实数集中讨论，等等.

二、例题选讲

〔例1〕 设$I=\{$绝对值不大于4的整数$\}$，$A=\{0\}$，$B=\{2,3,4\}$，$C=\{$小于3的非负整数$\}$，求$A\cap C$，$B\cup C$，$\overline{A\cup B}\cap C$.

分析："不大于"就是"小于或等于".绝对值不大于4的整数，就是绝对值小于或等于4的整数，即0，±1，±2，±3，±4.小于3的非负整数指的是0，1，2，注意包括0.

解：∵ $C=\{0,1,2\}$，

∴ $A\cap C=\{0\}$，

$B\cup C=\{0,1,2,3,4\}$，

$A\cup B=\{0,2,3,4\}$.

∵ $I=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$，

∴ $\overline{A\cup B}=\{-4,-3,-2,-1,1\}$，

$\overline{A\cup B}\cap C=\{1\}$.

说明：由已知的一些集合求它们的交集、并集、补集时，关键是要弄清楚已知各集合中，包含哪些元素，以及交集、并集、补集的意义.

〔例2〕 设M是由十个元素a_1，a_2，a_3，…，a_{10}组成的集合，求集合M的所有子集的总数.

分析：为防止有的子集没有被计算在内，求子集总数时，应从一个元素不取，以及依次取一个元素，两个元素，…，直到取完所有元素顺序去考虑.

解：由集合M中每次取出$i(i=0,1,2,\cdots,10)$个

元素组成集合 M 的子集，而这样的子集个数为 $C_{10}^{i}(i=0,1,2,\cdots,10)$，因此，集合$M$的所有子集的总数为

$$C_{10}^{0}+C_{10}^{1}+C_{10}^{2}+\cdots+C_{10}^{9}+C_{10}^{10}$$
$$=2^{10}=1024\text{（个）}.$$

说明：〔1〕要注意，空集ϕ是任何集合的子集，任何一个集合是它本身的子集．在本题中，它们的个数分别由C_{10}^{0}与C_{10}^{10}表示．

〔2〕此题可以推广到一般情况，由n个元素组成的集合$M=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，它的所有子集的总数为

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n\text{（个）}.$$

〔例3〕求证：$\sqrt{2}+\sqrt{3}$不是有理数．

分析：证明一个数不是有理数，常常用反证法，即假定这个数是有理数，设法推出矛盾来．

证明：设$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是有理数m，即$\sqrt{2}+\sqrt{3}=m$．两边平方，得

$$5+2\sqrt{6}=m^2,$$

于是

$$\sqrt{6}=\frac{m^2-5}{2}.$$

上式左边为$\sqrt{6}$，是无理数，而右边为$\frac{m^2-5}{2}$是有理数，这是不可能的，所以$\sqrt{2}+\sqrt{3}$不是有理数．

说明：此题的结论是否定的，其反面则是肯定的，应考虑到用反证法证明．证明过程中用到了“两个有理数的和、差、积、商（除数不为零）还是有理数”这条性质．通过此题的证明，不能一般地下结论说：“任何两个无理数之和不是有

理数”，如$\sqrt{2}$和$-\sqrt{2}$都是无理数，但$\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$就是有理数。

〔例4〕实数m为何值时，复数$(2m-i)^3$是实数？是纯虚数？

分析：复数$a+bi(a,b\in R)$的虚部为零时，是实数；实部为零虚部不为零时，是纯虚数。所以应从化$(2m-i)^3$为代数形式入手，分离出实部和虚部后再解。

解：$(2m-i)^3$

$=8m^3-12m^2i-6m+i$

$=2m(4m^2-3)+(1-12m^2)i$.

（1）当$1-12m^2=0$，即$m=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{6}$时，$(2m-i)^3$是实数。

（2）当$\begin{cases}2m(4m^2-3)=0,\\1-12m^2\neq 0,\end{cases}$

即$m=0$，$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$时，$(2m-i)^3$是纯虚数。

说明：复数$a+bi(a,b\in R)$是纯虚数的条件是$a=0$且$b\neq 0$，解题时，常易忽视$b\neq 0$这个条件。

〔例5〕计算：

（1）$\dfrac{3-4i}{1+2i}+\left(2+i^{15}\right)-\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{20}$；

（2）$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{101}$.

分析：这两个题目都含有虚数的乘方运算，而且指数较