

高职高专工程管理专业系列教材 WUTP

高等数学

主 编 全 焕

武汉理工大学出版社

高职高专工程管理专业系列教材

高等数学

主 编 全 焕

副主编 刘雅妹 崔令霞 徐华锋

武汉理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/全焕主编. —武汉:武汉理工大学出版社, 2005

ISBN 7-5629-2263-2

I. 高…

II. 全…

III. 高等数学-高等学校-教材

IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 088469 号

出版发行:武汉理工大学出版社(武汉市武昌珞狮路 122 号 邮政编码:430070)

<http://www.techbook.com.cn>

E-mail:wutp@public.wh.hb.cn

经 销 者:各地新华书店

印 刷 者:荆州市鸿盛印刷厂

开 本:787×960 1/16

印 张:25.25

字 数:424 千字

版 次:2005 年 8 月第 1 版

印 次:2005 年 8 月第 1 次印刷

印 数:1~4200 册

定 价:26.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请向出版社发行部调换。本社购书热线电话:(027)87397097 87394412

高职高专工程管理专业系列教材

编 审 委 员 会

名 誉 主 任: 李生平

主 任: 张坤书

副 主 任: 张洪力 蔡德明

委 员(按姓氏笔画顺序排列)

马宁奇 于应魁 王召东 孙 洁

全 焕 苏天宝 张坤书 张国兴

张洪力 李高平 宋德耀 赵玉霞

程国政 董 颇 蔡德明

总责任编辑: 于应魁

秘 书 长: 李高平

前 言

本书是我们多年来进行高等数学教学改革实践的结晶。我们根据多年教学中积累起来的经验和体会,并结合高职高专学生的特点,努力做到:概念清楚,结论正确;循序渐进,由浅入深;重点突出,难点分散。为使教材便于自学,便于使用,我们还采取了以下一些措施:

(1) 取材“少而精”。对超出教育部“高职高专教育基础课程教学基本要求”的内容,一般不编入。而个别因后继课程用得较多的内容,则以*号标出,可以不作必读内容,仅供需要时查阅参考。

(2) 注意理论联系实际,重视学生能力的培养。尽可能使数学的概念、理论与应用相结合,并适当增加数学在经济学中的应用举例。

(3) 贯彻“学练结合,适当反复”的教学原则。在每节后都附有较为简单的练习题,供学生消化所学的内容;在每章末配有复习题,供学生在掌握基础后,系统而又全面地巩固所学的知识。各章节后的习题均有答案,可供参考。

(4) 考虑到学生查阅有关资料可能不便,我们在书后还特地附有二阶和三阶行列式,积分表,初等数学公式,常用曲线等。

本书内容包括函数与极限,一元函数微积分,常微分方程,级数,多元函数微积分简介等。

书中重视高等数学的基本理论,突出实用性和针对性;注重提高读者的数学修养,致力于培养他们的洞察力和判断力。本书内容简洁,分析透彻,便于自学。可作为高职高专学生、成人教育的脱产生、函授生、电大生的教材,也可以作为广大数学爱好者或工程技术和管理人员的自学参考书。

本书的参编人员都是多年从事高职高专高等数学教学的教师,全焕担任主编,并编写了第四、五章内容,刘雅妹任副主编,编写了第一、二、三章内容,崔令霞任副主编,编写了第六、七章内容,徐华锋任副主编,编写了第八、九、十章内容。

由于我们的水平有限,书中难免有许多不足和错误之处,诚恳地希望广大读者批评指正。

编 者

2005年6月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
第一节 函数	(1)
一、集合	(1)
二、函数的概念	(3)
三、函数的几种特性	(6)
四、初等函数	(9)
五、经济分析中常见的函数	(11)
第二节 极限	(15)
一、函数的极限	(15)
二、极限的性质	(19)
三、极限思想的发展	(20)
第三节 无穷小与无穷大	(21)
一、无穷小及其性质	(21)
二、无穷大	(23)
第四节 极限的运算法则	(25)
一、函数极限的四则运算	(25)
二、复合函数的极限	(27)
第五节 极限存在准则、两个重要极限	(28)
一、极限存在准则	(28)
二、两个重要极限	(30)
第六节 无穷小的比较	(35)
一、无穷小的比较	(35)
二、等价无穷小代换	(36)
第七节 函数的连续性	(38)
一、连续函数的概念	(38)
二、函数的间断点	(40)
三、初等函数的连续性	(41)
四、闭区间上连续函数的性质	(42)
复习题一	(44)
第二章 导数与微分	(46)

第一节 导数的概念	(46)
一、引例	(46)
二、导数的定义	(47)
三、求导数举例	(48)
四、导数的实际意义	(49)
五、可导与连续的关系	(51)
第二节 求导法则	(53)
一、函数的和、差、积、商的求导法则	(53)
二、反函数的求导法则	(54)
三、复合函数的求导法则	(56)
第三节 隐函数的导数 参数方程所确定的函数的导数	(59)
一、隐函数及其求导	(59)
二、对数求导法	(60)
三、参数方程所确定的函数的导数	(61)
第四节 高阶导数	(62)
一、高阶导数的概念	(62)
二、高阶导数的求法	(62)
第五节 微分及其应用	(66)
一、微分的定义和几何意义	(66)
二、微分运算法则	(69)
三、微分在近似计算中的应用	(71)
复习题二	(74)
第三章 导数的应用	(76)
第一节 微分中值定理	(76)
一、罗尔中值定理	(76)
二、拉格朗日中值定理	(77)
三、柯西中值定理	(78)
第二节 泰勒公式	(81)
一、泰勒中值定理	(81)
二、麦克劳林公式	(84)
第三节 洛必达法则	(86)
一、“ $\frac{0}{0}$ ”及“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式的极限	(86)
二、其他类型的未定式	(89)
第四节 函数的单调性与极值	(94)

一、函数的单调性	(94)
二、函数的极值	(97)
三、最大值、最小值	(99)
第五节 曲线的凹凸性与拐点	(102)
第六节 函数图形的描绘	(105)
一、曲线的水平渐近线和铅直渐近线	(105)
二、函数图形的描绘	(106)
* 第七节 曲率	(108)
一、弧微分	(108)
二、曲率	(109)
三、曲率半径、曲率圆	(111)
第八节 导数在经济分析中的应用	(112)
一、边际分析	(112)
二、弹性分析	(115)
复习题三	(120)
第四章 不定积分	(123)
第一节 不定积分的概念与性质	(123)
一、原函数与不定积分的概念	(123)
二、不定积分的性质	(125)
三、不定积分的几何意义	(125)
四、基本积分表	(126)
第二节 换元积分法	(128)
一、第一类换元法(凑微分法)	(128)
二、第二类换元法	(131)
第三节 分部积分法	(135)
复习题四	(138)
第五章 定积分及其应用	(140)
第一节 定积分的概念	(140)
一、引例	(140)
二、定积分的定义	(142)
三、定积分的几何意义	(145)
第二节 定积分的性质	(146)
第三节 微积分基本公式	(149)
一、积分上限函数及其导数	(149)
二、微积分基本公式	(151)

第四节 定积分的计算方法	(154)
一、换元积分法	(154)
二、分部积分法	(157)
第五节 定积分的应用	(161)
一、定积分的微元法	(161)
二、平面图形的面积	(162)
三、体积	(165)
四、平面曲线的弧长	(168)
五、定积分在经济方面的应用举例	(170)
第六节 广义积分	(173)
一、无限区间上的广义积分	(173)
二、无界函数的广义积分	(175)
复习题五	(177)
第六章 常微分方程	(180)
第一节 微分方程的一般概念	(180)
一、微分方程的定义	(180)
二、微分方程的阶	(181)
三、微分方程的解	(181)
第二节 一阶微分方程	(183)
一、可分离变量的微分方程	(183)
二、齐次微分方程	(184)
三、一阶线性微分方程	(186)
第三节 可降阶的高阶微分方程	(189)
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	(189)
二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	(189)
三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	(190)
第四节 二阶线性微分方程	(191)
一、二阶齐次线性微分方程解的结构	(191)
二、二阶非齐次线性微分方程解的结构	(192)
第五节 二阶常系数线性微分方程的解法	(194)
一、二阶常系数齐次线性微分方程的解法	(194)
二、二阶常系数非齐次线性微分方程的解法	(196)
第六节 微分方程的应用	(201)
复习题六	(211)
第七章 无穷级数	(213)

第一节 数项级数的概念及其性质	(213)
一、数项级数的概念	(213)
二、数项级数的性质	(215)
第二节 数项级数的敛散判别法	(217)
一、正项级数	(217)
二、任意项级数	(220)
第三节 幂级数	(222)
一、幂级数及其收敛性	(222)
二、幂级数的运算性质	(225)
第四节 函数展开成幂级数	(227)
一、泰勒公式	(227)
二、泰勒级数	(229)
三、函数展开成为幂级数	(230)
四、幂级数的应用	(232)
第五节 傅里叶级数	(235)
一、以 2π 为周期的函数展开成傅里叶级数	(235)
二、以 $2l$ 为周期的函数展开成傅里叶级数	(241)
三、傅里叶级数的指数形式	(243)
复习题七	(244)
第八章 空间解析几何与向量代数	(245)
第一节 空间坐标系	(245)
一、空间直角坐标系	(245)
二、两点间的距离	(246)
三、柱面坐标系	(247)
第二节 向量的概念及线性运算	(248)
一、向量的基本概念	(248)
二、向量的线性运算	(248)
第三节 向量的坐标表示式	(250)
一、向径及其坐标表示式	(250)
二、任意向量 M_1M_2 的坐标表示式	(251)
三、向量的模与方向余弦的坐标表示式	(252)
第四节 两向量的数量积、向量积	(254)
一、两向量的数量积	(254)
二、两向量的向量积	(256)
第五节 平面及其方程	(260)

一、平面的点法式方程	(260)
二、平面的一般式方程和截距式方程	(261)
三、两平面的夹角	(263)
四、点到平面的距离	(264)
第六节 空间直线及其方程	(265)
一、空间直线的点向式及参数式方程	(265)
二、直线的一般式方程	(266)
三、两直线的夹角	(267)
四、平面与直线间的夹角	(268)
第七节 空间曲面	(270)
一、曲面及其方程	(270)
二、柱面	(270)
三、旋转曲面	(271)
四、二次曲面	(272)
第八节 空间曲线及其方程	(275)
一、空间曲线的一般方程	(275)
二、空间曲线的参数方程	(275)
三、空间曲线在坐标面上的投影	(276)
复习题八	(277)
第九章 多元函数微分学简介	(279)
第一节 多元函数	(279)
一、多元函数概念	(279)
二、二元函数的几何表示	(280)
三、二元函数的极限	(281)
四、二元函数的连续性	(282)
第二节 二元函数的偏导数	(283)
一、偏导数的定义	(283)
二、二元函数偏导数的几何意义	(286)
三、偏导数存在与函数连续性的关系	(287)
第三节 高阶偏导数	(288)
一、高阶偏导数的定义	(288)
二、高阶混合偏导数与求导次序无关的条件	(289)
第四节 二元函数的全微分	(290)
一、全微分	(290)
二、利用全微分进行近似计算	(292)

第五节 多元函数的求导法则	(293)
一、多元复合函数的求导法则	(293)
二、隐函数求导公式	(295)
第六节 偏导数的应用	(298)
一、偏导数的几何应用	(298)
二、多元函数的极值	(300)
复习题九	(305)
第十章 多元函数积分学简介	(307)
第一节 二重积分的概念及性质	(307)
一、两个实际的问题	(307)
二、二重积分的概念	(308)
三、二重积分的性质	(309)
第二节 二重积分的计算	(310)
一、在直角坐标系下计算二重积分	(310)
二、在极坐标系中计算二重积分	(315)
* 第三节 三重积分	(318)
一、三重积分的概念	(318)
二、在直角坐标系下计算三重积分	(319)
三、在柱面坐标系中的计算方法	(320)
第四节 重积分的应用	(322)
一、重积分的几何应用	(322)
二、重积分的物理应用	(325)
第五节 对弧长的曲线积分	(328)
一、密度不均匀曲线的质量	(328)
二、对弧长的曲线积分的定义及性质	(328)
三、对弧长曲线积分的计算	(329)
第六节 对坐标的曲线积分	(331)
一、变力沿曲线所做的功	(331)
二、对坐标的曲线积分的定义及性质	(332)
三、对坐标的曲线积分的计算	(333)
第七节 格林公式 平面曲线积分与路径无关的条件	(336)
一、格林公式	(336)
二、平面曲线积分与路径无关的条件	(337)
复习题十	(340)
附录 I 二阶和三阶行列式简介	(342)

附录 II 几种常用的曲线.....	(346)
附录 III 初等数学公式.....	(351)
一、代数公式	(351)
二、三角公式	(352)
附录 IV 积分用表.....	(354)
附录 V 希腊字母表.....	(364)
习题参考答案与提示.....	(365)
参考文献.....	(392)

第一章 函数与极限

高等数学与初等数学区别的主要标志在于前者研究的对象是变量,而后者研究的对象基本上是不变的量.函数关系是变量之间的依赖关系,它是高等数学中最重要的基本概念,极限方法是研究变量的一种基本方法.本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念,以及它们的一些性质.

第一节 函 数

一、集合

1. 集合的概念

在数学中,我们把具有某种特定性质的事物所组成的总体称为一个集合(或简称集).组成这个集合的事物称为该集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$.一个集合,若其元素的个数是有限的,则称作有限集,否则就称作无限集.

表示集合的方法通常有以下两种:一种是列举法,就是把集合的全体元素一一列举出来.例如,由元素 $1, 2, 3$ 组成的集合 A ,可表示成 $A = \{1, 2, 3\}$;另一种是描述法,若集合 B 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成,就可表示成

$$B = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}.$$

例如,集合 C 是方程 $x^2 - 4 = 0$ 的解集,就可表示成

$$C = \{x \mid x^2 - 4 = 0\}.$$

通常,全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$;全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$,即 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$;全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$,即 $\mathbf{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots, -n, n, \dots\}$;全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$;全体复数的集合记作 $\mathbf{C}$.

有时我们在表示数集的字母的右上角添加“ $*$ ”、“ $+$ ”、“ $-$ ”等上标,来表示该数集的几个特定子集.如, $\mathbf{R}^*$ 表示排除数 0 的实数集; $\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数集; $\mathbf{R}^-$ 表示全体负实数集.

如果 A, B 是两个集合,且 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记作 $A \subset B$ (读作 A 包含于 B) 或 $B \supset A$ (读作 B 包含 A).

如果集合 A 与集合 B 互为子集,即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A = B$.

若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$. 例如, $\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R}$. 不含任何元素的集合称为空集, 记作 $\emptyset$, 并规定空集是任何集合的子集.

2. 区间和邻域

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 是实数, 且 $a < b$, 数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为开区间, 记作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点. 这里 $a \notin (a, b)$, $b \notin (a, b)$. 数集 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

这里端点 a, b 属于区间 $[a, b]$.

类似地可说明

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}.$$

$[a, b)$ 和 $(a, b]$ 都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b - a$ 称为这些区间的长度. 在数轴上, 这些有限区间为长度有限的 (包括或不包括端点) 的线段 (图 1-1).

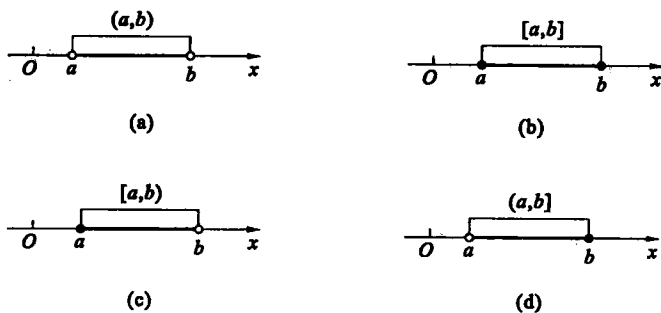


图 1-1

此外还有所谓无限区间. 引进记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大), 则无限的半开或开区间表示如下:

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \mid a < x\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}.$$

这些区间在数轴上表现为长度为无限的半直线, 如图 1-2 所示.

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也记作 $(-\infty, +\infty)$, 它也是无限的开区间.

今后, 在不需要辨明所论区间是否包含端点或是否为有限区间还是无限区



图 1-2

间的场合,我们即简称为“区间”且用 I 表示.

邻域也是一个常用的概念. 设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 数集

$$\{x \mid |x - a| < \delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

点 a 叫做 $U(a, \delta)$ 的中心, δ 叫做 $U(a, \delta)$ 的半径. 事实上 $U(a, \delta)$ 即为区间 $(a - \delta, a + \delta)$.

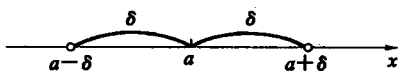


图 1-3

在数轴上, $|x - a|$ 表示点 x 与点 a 之间的距离, 因此点 a 的 δ 邻域 $U(a, \delta)$ 在数轴上

表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体 (如图 1-3).

若点 a 的邻域中去掉中心 a 后, 称为点 a 的去心邻域, 记作 $U(\hat{a}, \delta)$, 即

$$U(\hat{a}, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

这里 $0 < |x - a|$ 即表示 $x \neq a$.

二、函数的概念

在实际问题中, 常常要考察变量以及变量之间的依赖关系. 本章只讨论两个变量的情况, 先看下面的例子.

例 1 抛物线 $y = x^2$, 确定了抛物线上点 (x, y) 纵横两坐标之间的依赖关系.

例 2 邮寄信件时, 信件的重量 x 与所需支付的邮资 y 之间的依赖关系

$$y = \begin{cases} 0.8, & 0 < x \leq 20, \\ 1.6, & 20 < x \leq 40. \end{cases}$$

这是从信件重量 x (克) 到邮资 y (元) 的对应关系. 仅用一个解析式子已经不能表达清楚. 我们可以看出, 当信件重量在不同的范围内, 确定邮资的解析式子也不一样.

例 3 气象台的自动记录仪记录一天的温度 y 随时间变化的曲线, 反映了温度对时间的依赖关系. 但是, 温度随时间的变化关系一般不可能用一个或几个解析式子表达出来. 事实上, 变量之间的关系大多数是不可能用一个或几个解析式子表示的. 所以, 把以上所述的变量间的依赖关系抽象出共同的本质, 就是数

值之间的对应关系.

可以发现上述三个例子具有如下共同特征:

① 都有两个变量,前者取值一经确定,后者的值随之确定.且每个变量都有相应的变化范围.

② 两个变量之间受一个对应规则约束,或者说两个变量由一个对应规则对应.

这些共同特征所反映出的变量之间的对应关系就是函数.

函数的定义: 设 D 为一实数集,对 D 中任意一个 x ,按照某种对应关系,总有一个确定的值 y 与之对应,则我们就称这种对应关系是函数,记作 $y=f(x)$. 其中,实数集 D 称为函数的定义域, x 称为自变量, y 称为因变量,也称 y 为 x 的函数, f 表示 x 到 y 的对应关系.

需要注意的几个问题:

① 当自变量 x 取数值 $x_0 \in D$ 时,与 x_0 对应的因变量 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记为 $f(x_0)$,或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 遍取 D 的各个数值时,对应的函数值 y 的全体组成的数集称作这个函数的值域.

② **函数的两要素** 定义域 D 是自变量的取值范围,其函数值由对应规则 f 确定.我们称函数的定义域和对应规则为函数的两要素.通常在表示不同的对应规则时也可用 φ, ψ, ϕ 等来表示.

③ **函数的单值性** 由定义知,若对 D 内的每一个 x 都有唯一的 y 与之对应,则称 y 为 x 的单值函数.如果对某一 x 有不止一个 y 值与之对应,则称这样的函数为多值函数,本书一般讨论的为单值函数.

④ **函数的图像** 在平面直角坐标系中,定义在 D 上的函数 $y=f(x)$ 构成数对 (x, y) . 这些数对所对应的点集,称为该函数的图像.函数的图形一般是一条曲线或一些散点.

⑤ **函数的表示** 分解析法(公式法)、图示法、列表法三种.在函数的解析表达中,有时,一个函数在其定义域的不同范围内计算函数值的解析式子可能会不一样.例如:

$$y = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ 3x, & x > 1. \end{cases}$$

这类函数我们称为分段函数.计算函数值时,需要先根据 x 所在的范围确定解析表达式,然后再计算函数值.本例中 $f(2)=6, f(-1)=1$.

下面再举几个函数的例子.

例 4 常数函数 $y=2$ 的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域 $W=\{2\}$, 它的图形是一条平行于 x 轴的直线(图 1-4).

例 5 数 x 的绝对值记为 $|x|$. 如果把 x 看作变量,则有函数