高职高专工程管理专业系列教材 WUTP

# 高等数学

主编 全焕

武汉理工大学出版社

高职高专工程管理专业系列教材

# 高等数学

主　编　全　焕
副主编　刘雅妹　崔令霞　徐华锋

武汉理工大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学/全焕主编.—武汉:武汉理工大学出版社,2005

ISBN 7-5629-2263-2

Ⅰ.高…

Ⅱ.全…

Ⅲ.高等数学-高等学校-教材

Ⅳ.013

**中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 088469 号**

**出版发行**:武汉理工大学出版社(武汉市武昌珞狮路 122 号　**邮政编码**:430070)

http://www.techbook.com.cn

E-mail:wutp@public.wh.hb.cn

**经 销 者**:各地新华书店

**印 刷 者**:荆州市鸿盛印刷厂

**开　　本**:787×960　1/16

**印　　张**:25.25

**字　　数**:424 千字

**版　　次**:2005 年 8 月第 1 版

**印　　次**:2005 年 8 月第 1 次印刷

**印　　数**:1～4200 册

**定　　价**:26.00 元

# 高职高专工程管理专业系列教材

# 编审委员会

# 前　言

本书是我们多年来进行高等数学教学改革实践的结晶.我们根据多年教学中积累起来的经验和体会,并结合高职高专学生的特点,努力做到:概念清楚,结论正确;循序渐进,由浅入深;重点突出,难点分散.为使教材便于自学,便于使用,我们还采取了以下一些措施:

(1) 取材"少而精".对超出教育部"高职高专教育基础课程教学基本要求"的内容,一般不编入.而个别因后继课程用得较多的内容,则以 * 号标出,可以不作必读内容,仅供需要时查阅参考.

(2) 注意理论联系实际,重视学生能力的培养.尽可能使数学的概念、理论与应用相结合,并适当增加数学在经济学中的应用举例.

(3) 贯彻"学练结合,适当反复"的教学原则.在每节后都附有较为简单的练习题,供学生消化所学的内容;在每章末配有复习题,供学生在掌握基础后,系统而又全面地巩固所学的知识.各章节后的习题均有答案,可供参考.

(4) 考虑到学生查阅有关资料可能不便,我们在书后还特地附有二阶和三阶行列式,积分表,初等数学公式,常用曲线等.

本书内容包括函数与极限,一元函数微积分,常微分方程,级数,多元函数微积分简介等.

书中重视高等数学的基本理论,突出实用性和针对性,注重提高读者的数学修养,致力于培养他们的洞察力和判断力.本书内容简洁,分析透彻,便于自学.可作为高职高专学生、成人教育的脱产生、函授生、电大生的教材,也可以作为广大数学爱好者或工程技术和管理人员的自学参考书.

本书的参编人员都是多年从事高职高专高等数学教学的教师,全焕担任主编,并编写了第四、五章内容,刘雅妹任副主编,编写了第一、二、三章内容,崔令霞任副主编,编写了第六、七章内容,徐华锋任副主编,编写了第八、九、十章内容.

由于我们的水平有限,书中难免有许多不足和错误之处,诚恳地希望广大读者批评指正.

编　者

2005 年 6 月

# 目　　录

# 第一章　函数与极限

高等数学与初等数学区别的主要标志在于前者研究的对象是变量，而后者研究的对象基本上是不变的量. 函数关系是变量之间的依赖关系，它是高等数学中最重要的基本概念，极限方法是研究变量的一种基本方法. 本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

## 第一节　函　　数

### 一、集合

#### 1. 集合的概念

在数学中，我们把具有某种特定性质的事物所组成的总体称为一个**集合**(或简称**集**). 组成这个集合的事物称为该集合的**元素**. 如果 $a$ 是集合 $A$ 的元素，就说 $a$ 属于 $A$，记作 $a\in A$；如果 $a$ 不是集合 $A$ 的元素，就说 $a$ 不属于 $A$，记作 $a\notin A$. 一个集合，若其元素的个数是有限的，则称作有限集，否则就称作无限集.

表示集合的方法通常有以下两种：一种是列举法，就是把集合的全体元素一一列举出来. 例如，由元素 1,2,3 组成的集合 $A$，可表示成 $A=\{1,2,3\}$；另一种是描述法，若集合 $B$ 是由具有某种性质 $P$ 的元素 $x$ 的全体所组成，就可表示成

$$B=\{x \mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如，集合 $C$ 是方程 $x^2-4=0$ 的解集，就可表示成

$$C=\{x \mid x^2-4=0\}.$$

通常，全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$；全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，即 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$；全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，即 $\mathbf{Z}=\{0,-1,1,-2,2,\cdots,-n,n,\cdots\}$；全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$；全体复数的集合记作 $\mathbf{C}$.

有时我们在表示数集的字母的右上角添加“$*$”、“$+$”、“$-$”等上标，来表示该数集的几个特定子集。如，$\mathbf{R}^*$ 表示排除数 0 的实数集；$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数集；$\mathbf{R}^-$ 表示全体负实数集.

如果 $A$、$B$ 是两个集合，且 $A$ 的元素都是集合 $B$ 的元素，则称 $A$ 是 $B$ 的**子集**，记作 $A\subset B$(读作 $A$ 包含于 $B$)或 $B\supset A$(读作 $B$ 包含 $A$).

如果集合 $A$ 与集合 $B$ 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 $A$ 与集合 $B$ **相等**，记作 $A=B$.

若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$，则称 $A$ 是 $B$ 的**真子集**，记作 $A \subsetneqq B$. 例如，$\mathbf{N} \subsetneqq \mathbf{Z} \subsetneqq \mathbf{Q} \subsetneqq \mathbf{R}$. 不含任何元集的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$，并规定空集是任何集合的子集.

2. 区间和邻域

区间是用得较多的一类数集. 设 $a$ 和 $b$ 是实数，且 $a<b$，数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为**开区间**，记作 $(a,b)$，即

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

$a$ 和 $b$ 称为开区间 $(a,b)$ 的**端点**. 这里 $a \notin (a,b)$，$b \notin (a,b)$. 数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

这里端点 $a, b$ 属于区间 $[a,b]$.

类似地可说明

$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\},$$
$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}.$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为**半开区间**.

以上这些区间都称为**有限区间**. 数 $b-a$ 称为这些区间的**长度**. 在数轴上，这些有限区间为长度有限的(包括或不包括端点)的线段(图 1-1).

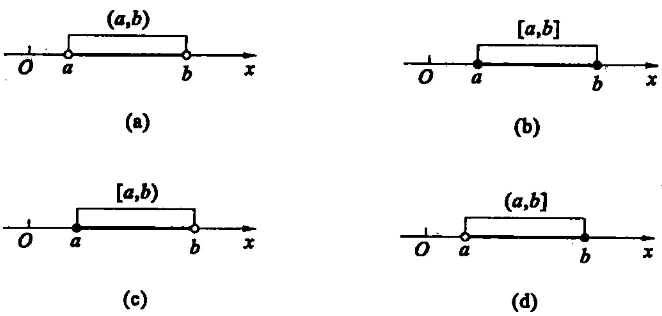


图 1-1

此外还有所谓无限区间. 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大)，则无限的半开或开区间表示如下：

$$[a,+\infty) = \{x \mid a \leqslant x\},$$
$$(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b\},$$
$$(a,+\infty) = \{x \mid a < x\},$$
$$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}.$$

这些区间在数轴上表现为长度为无限的半直线，如图 1-2 所示.

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限的开区间.

今后，在不需要辨明所论区间是否包含端点或是否为有限区间还是无限区


图 1-2

间的场合，我们即简称为"区间"且用 $I$ 表示.

邻域也是一个常用的概念. 设 $a$ 与 $\delta$ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

称为点 $a$ 的 $\delta$ **邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

点 $a$ 叫做 $U(a,\delta)$ 的**中心**，$\delta$ 叫做 $U(a,\delta)$ 的**半径**. 事实上 $U(a,\delta)$ 即为区间 $(a-\delta,a+\delta)$.

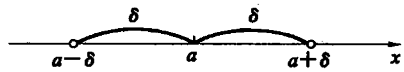


图 1-3

在数轴上，$|x-a|$ 表示点 $x$ 与点 $a$ 之间的距离，因此点 $a$ 的 $\delta$ 邻域 $U(a,\delta)$ 在数轴上表示与点 $a$ 距离小于 $\delta$ 的一切点 $x$ 的全体(如图 1-3).

若点 $a$ 的邻域中去掉中心 $a$ 后，称为点 $a$ 的去心邻域，记作 $U(\hat{a},\delta)$，即

$$U(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 即表示 $x\neq a$.

## 二、函数的概念

在实际问题中，常常要考察变量以及变量之间的依赖关系. 本章只讨论两个变量的情况，先看下面的例子.

**例 1**　抛物线 $y=x^2$，确定了抛物线上点 $(x,y)$ 纵横两坐标之间的依赖关系.

**例 2**　邮寄信件时，信件的重量 $x$ 与所需支付的邮资 $y$ 之间的依赖关系

$$y=\begin{cases}0.8, & 0<x\leqslant 20,\\ 1.6, & 20<x\leqslant 40.\end{cases}$$

这是从信件重量 $x$(克)到邮资 $y$(元)的对应关系. 仅用一个解析式子已经不能表达清楚. 我们可以看出，当信件重量在不同的范围内，确定邮资的解析式子也不一样.

**例 3**　气象台的自动记录仪记录一天的温度 $y$ 随时间变化的曲线，反映了温度对时间的依赖关系. 但是，温度随时间的变化关系一般不可能用一个或几个解析式子表达出来. 事实上，变量之间的关系大多数是不可能用一个或几个解析式子表示的. 所以，把以上所述的变量间的依赖关系抽象出共同的本质，就是数

值之间的对应关系.

可以发现上述三个例子具有如下共同特征：

① 都有两个变量，前者取值一经确定，后者的值随之确定. 且每个变量都有相应的变化范围.

② 两个变量之间受一个对应规则约束，或者说两个变量由一个对应规则对应.

这些共同特征所反映出的变量之间的对应关系就是函数.

**函数的定义**：设 $D$ 为一实数集，对 $D$ 中任意一个 $x$，按照某种对应关系，总有一个确定的值 $y$ 与之对应，则我们就称这种对应关系是**函数**，记作 $y=f(x)$. 其中，实数集 $D$ 称为函数的**定义域**，$x$ 称为**自变量**，$y$ 称为**因变量**，也称 $y$ 为 $x$ 的**函数**，$f$ 表示 $x$ 到 $y$ 的**对应关系**.

需要注意的几个问题：

① 当自变量 $x$ 取数值 $x_0\in D$ 时，与 $x_0$ 对应的因变量 $y$ 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的函数值，记为 $f(x_0)$，或 $y|_{x=x_0}$. 当 $x$ 遍取 $D$ 的各个数值时，对应的函数值 $y$ 的全体组成的数集称作这个函数的**值域**.

② 函数的两要素　定义域 $D$ 是自变量的取值范围，其函数值由对应规则 $f$ 确定. 我们称函数的定义域和对应规则为函数的两要素. 通常在表示不同的对应规则时也可用 $\varphi,\psi,\phi$ 等来表示.

③ 函数的单值性　由定义知，若对 $D$ 内的每一个 $x$ 都有唯一的 $y$ 与之对应，则称 $y$ 为 $x$ 的**单值函数**。如果对某一 $x$ 有不止一个 $y$ 值与之对应，则称这样的函数为**多值函数**，本书一般讨论的为单值函数.

④ 函数的图像　在平面直角坐标系中，定义在 $D$ 上的函数 $y=f(x)$ 构成数对 $(x,y)$. 这些数对所对应的点集，称为该函数的图像. 函数的图形一般是一条曲线或一些散点.

⑤ 函数的表示　分解析法(公式法)、图示法、列表法三种. 在函数的解析表达中，有时，一个函数在其定义域的不同范围内计算函数值的解析式子可能会不一样。例如：

$$y=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 3x, & x>1.\end{cases}$$

这类函数我们称为**分段函数**. 计算函数值时，需要先根据 $x$ 所在的范围确定解析表达式，然后再计算函数值. 本例中 $f(2)=6$，$f(-1)=1$.

下面再举几个函数的例子.

**例 4**　常数函数 $y=2$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{2\}$，它的图形是一条平行于 $x$ 轴的直线(图 1-4).

**例 5**　数 $x$ 的绝对值记为 $|x|$. 如果把 $x$ 看作变量，则有函数