

莫叶 著

勒襄特函数论



**LEGENDRE
FUNCTIONS**

勒 襄 特 函 数 论

莫 叶 著

山东大学出版社

勒 襄 特 函 数 论

莫 叶 著

山 东 大 学 出 版 社

山东省新华书店发行 山东潍坊新华印刷厂印刷

山东省潍坊计算机公司激光照排厂培训中心排版

开本850×1168 1/32 印张23.75 字数617千字

1988年1月第1版 1988年1月第1次印刷

印数1——1000册

ISBN 7—5607—0054—3

N · 3

定价: 4.85元

内 容 提 要

本书内容为 Γ 函数, 超越几何函数, 连带勒襄特函数, 雅谷比多项式; 勒襄特多项式的性质、积分表示、零点分布、不等式、渐近表示; 勒襄特级数的积分定理、自然边界、所定义的整函数的性质等, 可供大学生、研究生、工程技术人员学习特殊函数参考用。

序

1785 年勒襄特为了研究球体吸力及行星运动,引进了勒襄特多项式。以后在拉伯拉斯、司帝吉斯、麦留、布劳史、史瑞果等许多数学家的研究下,理论与应用均得到重大发展。

本书着重叙述自本世纪五十年代起到最近有关勒襄特多项式方面的成果。但是为了读者方便,五十年代以前的内容以及有关的函数,如 Γ 函数,超越几何函数,勒襄特函数,连带勒襄特函数,雅谷比多项式等等,也作必要的介绍。

本书虽反映近代成果,但叙述由浅入深,力求易懂,读者只要学过作者所编《复变函数论》第一、二册(已由山东科技出版社出版)即可无师自学。本书引用该书内容仅注章节数码,不写书名。由于本书章节编码方法与该书不同,故无混淆可能。当然读者也可以参阅其它复变函数论教材,如作者所编《复变函数论教程》(已在山东大学出版社出版)等。本书可作为大学生、研究生、工程技术人员学习特殊函数的参考书。

本书出版,得到山东大学领导的支持,全书经仪洪勋同志校阅初稿,并用初稿作为教材对研究生、进修教师讲课,他提出了许多宝贵意见;另外,杨连中、巩昌镇、扈培础、张在利、韩廷春、周长桐、张庆彩、乔建永、詹小平、周德山、李伶俐、李玉华、孟梅等同志协助校阅;对他们特表示谢意。

限于作者水平,错误之处在所难免,还希读者不吝指正。

莫 叶

1985 年 6 月于济南山东大学

目 录

第一章	Γ 函数	1
§ 1	定义	1
1.1	欧拉常数	1
1.2	无穷积表示	2
1.3	极限表示	4
§ 2	性质	4
2.1	差分方程	4
2.2	乘积公式	7
2.3	二倍公式	7
§ 3	广义积分表示	9
3.1	第二种欧拉积分	9
3.2	与 $\Gamma(z)$ 的关系	13
3.3	实部为负数	16
3.4	围道积分	18
§ 4	用 $[t]$ 构造的函数	22
4.1	实数的整数部分	22
4.2	函数 $g(t)$ 的积分	23
4.3	进一步求积分	25
4.4	欧拉求和公式	27
§ 5	史斗林公式	28
5.1	常用公式	28

5.2	改进公式	35
5.3	$\Gamma(z+\lambda)/\Gamma(z)$ 的估计	36
5.4	当 $ y \rightarrow \infty$ 时, $ \Gamma(x+iy) $ 的估计	37
5.5	华力斯公式	38
§ 6	Γ 函数的图形	39
6.1	$x > 0$ 部分	39
6.2	$x < 0$ 部分	40
§ 7	B 函数	42
7.1	第一种欧拉积分	42
7.2	与 Γ 函数的关系	44
习题一		48
第二章 超越几何函数		51
§ 1	超越几何级数	51
1.1	收敛半径	51
1.2	在收敛圆上	53
1.3	$F(a, b; c; 1)$ 的值	54
§ 2	积分表示	59
2.1	广义积分表示	59
2.2	围道积分	62
§ 3	高斯微分方程	68
3.1	高斯微分方程的解	68
3.2	解的另一形式	70
3.3	解的线性关系	71
§ 4	相邻超越几何函数	76
4.1	近邻	76
4.2	远邻	80
§ 5	级数的变换	81
5.1	二重级数的重排	81

5.2	线性变换	86
5.3	平方变换	89
§ 6	广义超越几何函数	101
6.1	定义	101
6.2	性质	103
6.3	沙儿修兹恒等式	104
6.4	菲浦利定理	105
习题二		109
第三章	勒襄特多项式的定义及性质	112
§ 1	根式的选取	112
1.1	对数的单值分支	112
1.2	平方根	113
1.3	根式 $\sqrt{1-2zt+t^2}$	114
§ 2	定义	116
2.1	$P_n(z)$ 的明显表示	116
2.2	在一些特殊点处的值	118
2.3	$P_n(\cos\theta)$ 的表达式	119
§ 3	递推公式	122
3.1	纯粹递推公式	122
3.2	含有导数的递推公式	123
3.3	勒襄特微分方程	125
§ 4	导数表示	126
4.1	洛巨里格公式	126
4.2	幂级数反演	128
4.3	对称表示	130
4.4	$P_n(z)$ 为勒襄特微分方程解的又一证明	131
4.5	零点	132
§ 5	母函数	134

5.1	定义	134
5.2	白特门母函数	135
5.3	含有复参数 c 的母函数	136
习题三		139
第四章 积分表示		141
§ 1	拉伯拉斯积分表示	141
1.1	围道积分	141
1.2	拉伯拉斯第一积分	141
1.3	拉伯拉斯第二积分	145
§ 2	$P_n(\cos\theta)$ 的积分表示	153
2.1	麦留积分	153
2.2	司帝吉斯积分	162
§ 3	三角级数表示	167
3.1	正弦级数	167
3.2	司帝吉斯展开式	174
§ 4	超越几何函数表示	176
4.1	展成 $1-z$ 的多项式	176
4.2	用 z^n 乘以 $\frac{1}{z^2}$ 的多项式表示	178
4.3	用 $(z-1)^n$ 乘以 $\frac{z+1}{z-1}$ 的多项式表示	180
4.4	用 z^n 乘以 $\frac{z^2-1}{z^2}$ 的多项式表示	181
习题四		181
第五章 定积分及导数		183
§ 1	定积分的值	183
1.1	$\int_{z_1}^{z_2} P_n(z)P_n(z)dz$ 的值	183
1.2	正交性	184
1.3	$\int_0^1 P_m(x)P_n(x)dx$ 的值	185

1.4	$\int_{z_1}^{z_2} P_n^*(z) dz$ 的值	185
1.5	多项式的勒襄特线性表示	187
1.6	$\int_{-1}^1 z^n P_n(z) dz$ 的值	188
1.7	$\int_{-1}^1 P_n'(z) P_n(z) dz$ 的值	191
1.8	$\int_0^1 \{x P_n(x)\}^2 dx$ 的值	193
1.9	$\int_{-1}^1 (1-2xh+h^2)^{-\frac{1}{2}} P_n(x) dx$ 的值	194
1.10	$\int_0^1 (1-x^2) \{P_n'(x)\}^2 dx$ 的值	196
1.11	$\int_0^\pi P_n(\cos\theta) \cos n\theta d\theta$ 的值	197
§ 2	广义积分	198
2.1	$\int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{(1-x)^\omega} dx \quad (0 < \omega < 1)$ 的值	198
2.2	$\int_{-1}^1 P_n(x) \log(1-x) dx$ 的值	199
2.3	$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} P_n(x) dx$ 的值	200
§ 3	导数	202
3.1	$P_n^{(r)}(1)$ 的值	202
3.2	$P_n^{(r)}(\cos\theta)$ 的表达式	203
3.3	$P_n^{(r)}(0)$ 的值	205
3.4	$P_{n+r}^{(r)}(z)$ 用勒襄特多项式乘积的和表示	206
§ 4	一种正交多项式	207
4.1	正交性	207
4.2	$\int_{-1}^1 \lambda^2(x) dx$ 的值	209
4.3	一些性质	209
习题五		210
第六章	零点的分布	213
§ 1	$P_n(\cos\theta)$ 的零点分布	213

1.1	布劳史不等式	213
1.2	凸序列	221
1.3	史瑞果不等式	226
§ 2	$P_n(x)$ 的零点分布	231
2.1	凸序列	231
2.2	$P_n(x)$ 与 $P_{n-1}(x)$ 的零点分隔	232
2.3	$x_{v,n}$ 与 $x_{v,n-1}$ 的距离	235
2.4	$P_n(x)$ 的最大正零点与 1 的距离	243
2.5	$ P_n(x) $ 的极大值	247
习题六		250
第七章 不等式		251
§ 1	杜拉不等式	251
1.1	叙述	251
1.2	史瑞果的证明	251
1.3	爱畏达的证明	258
1.4	$\Delta_n(x)$ 的一些性质	261
1.5	$\Delta_n(x)$ 的上界	262
1.6	$y = \Delta_n(x)$ 的图形	266
1.7	南裘帝阿的结果	267
§ 2	二阶行列式	268
2.1	符记的引进	268
2.2	富赛茨不等式	268
2.3	在 $(0, 1)$ 中变号的情形	274
2.4	在 $1 < x < \infty$ 的情形	280
§ 3	伯恩斯坦不等式	283
3.1	费玖的证明	283
3.2	伯恩斯坦的证明	293
3.3	马里克证明	297

3.4	一个类似的不等式	298
§ 4	$P_n(z)$ 在有沟 z 面的估计	300
4.1	符记	300
4.2	当 $x \geq 1$ 时, $P_n(x)$ 的估计	301
4.3	当 $\alpha > 0$ 时, $P_n\{\cosh(\alpha + i\beta)\}$ 的估计	304
4.4	伯恩斯坦方法	305
习题七		309
第八章	渐近表示	311
§ 1	$P_n(\cos\theta)$ 的渐近表示	311
1.1	拉伯拉斯渐近表示	311
1.2	司帝吉斯渐近表示	317
§ 2	$P_n(z)$ 的达颇克渐近表示	325
2.1	简单表示	325
2.2	一般表示	333
习题八		340
第九章	两种勒襄特函数	341
§ 1	第一种勒襄特函数	341
1.1	定义	341
1.2	微分方程	342
1.3	递推公式	343
§ 2	第二种勒襄特函数	345
2.1	定义	345
2.2	$W'_{n-1}(z)$ 的勒襄特线性表示	350
2.3	$Q_n(z)$ 的超越几何函数表示	352
§ 3	$Q_n(z)$ 的积分表示	360
3.1	类石勒夫里积分表示	360
3.2	类拉伯拉斯积分表示	363
3.3	牛曼积分表示	367

3.4	马克洛培特积分表示	372
§ 4	$Q_n(z)$ 的性质	375
4.1	递推公式	375
4.2	与 $P_n(z)$ 的关系	377
4.3	$Q'_n(z)$ 与 $P'_n(z)$ 的关系	379
习题九		380
第十章	连带勒襄特函数	382
§ 1	定义	382
1.1	在有沟 z 面的定义	382
1.2	在 $-1 < x < 1$ 中的定义	385
1.3	导数表示	386
1.4	$P_n^2(x)$	391
§ 2	递推公式	392
2.1	对上标 m 的递推公式	392
2.2	对下标 n 的递推公式	392
2.3	含有导数的递推公式	393
§ 3	定积分	396
3.1	正交性	396
3.2	平方的积分	398
3.3	积分 $\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2} P_n^m(x) P_{n+1}^m(x) dx$	401
§ 4	积分表示	404
4.1	雅谷比引理	404
4.2	$P_n^m(z)$ 的积分表示	406
4.3	$Q_n^m(z)$ 的积分表示	411
§ 5	勒襄特多项式的加法公式	415
5.1	一个恒等式	415
5.2	加法公式	416
习题十		422

第十一章	勒襄特级数	423
§ 1	函数的勒襄特级数表示	423
1.1	克瑞斯脱费求和公式	423
1.2	展开定理	425
1.3	跳跃间断点	430
§ 2	杂例	433
2.1	牛曼展开式	433
2.2	卡他兰展开式	443
§ 3	改进	445
3.1	黎曼定理	445
3.2	定理 1 的改进	447
§ 4	勒襄特级数的性质	451
4.1	绝对收敛	451
4.2	开区间 $(-1, 1)$	452
4.3	$S(x)$ 取正值	454
§ 5	积分定理	460
5.1	$0 < \omega < 1$	460
5.2	$1 \leq \omega < 2$	474
5.3	$p \leq \omega < p + 1$	481
习题十一		487
第十二章	收敛椭圆	488
§ 1	展开定理	488
1.1	海涅公式	488
1.2	牛曼展开定理	493
1.3	椭圆环形域	495
§ 2	收敛域	499
2.1	收敛参数	499
2.2	简单性质	500

2.3	与幂级数的联系	502
§ 3	奇点	507
3.1	极点	507
3.2	奇点的位置	513
§ 4	解析点	520
4.1	两个例子	520
4.2	法都定理	522
§ 5	自然边界	528
5.1	简单的例子	528
5.2	空隙定理	531
5.3	卢辛例子	543
§ 6	极限性质	544
6.1	亚倍尔定理	544
6.2	刀培定理	550
§ 7	求和	557
7.1	一般公式	557
7.2	极点	559
习题十二		564
第十三章	整函数	566
§ 1	阶与型	566
1.1	阶	566
1.2	型	567
1.3	例子	567
1.4	多项式	568
§ 2	系数与滋长	570
2.1	系数模的 n 次根	570
2.2	系数模的比	580
§ 3	型函数	582

3.1	零阶整函数	582
3.2	ρ 阶整函数	589
§ 4	极大项	598
4.1	定义	598
4.2	$v(\alpha)$ 的性质	599
4.3	$\mu(\alpha)$ 的性质	602
4.4	阶与型	607
4.5	无穷阶	614
§ 5	正则滋长	618
5.1	下阶与下型	618
5.2	空隙定理	622
5.3	完全正则滋长	625
习题十三		630
第十四章 雅谷比多项式		632
§ 1	超越几何级数表示	632
1.1	定义	632
1.2	对称表示	633
1.3	首项系数	634
§ 2	母函数	635
2.1	一个超越几何函数构成的母函数	635
2.2	白特门母函数	636
§ 3	导数表示	637
3.1	$-1 < x < 1$	637
3.2	z 为复变数	638
3.3	一个简单相邻关系	639
§ 4	定积分	640
4.1	微分方程	640
4.2	正交性	641

4.3	$\int_{-1}^1 (1-x)^a(1+x)^\beta \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^2 dx \dots\dots\dots$	642
4.4	$\int_{-1}^1 (1-x)^a(1+x)^\beta x^k P_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx \dots\dots\dots$	644
4.5	$\int_{-1}^1 \frac{(1-x)^a(1+x)^\beta}{(1-x)^\alpha} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx \dots\dots\dots$	645
§ 5	递推公式\dots\dots\dots	647
5.1	$(1-z)^a$ 的雅谷比多项式线性表示\dots\dots\dots	647
5.2	含有导数的递推公式\dots\dots\dots	650
5.3	纯粹递推公式\dots\dots\dots	652
5.4	混合递推公式\dots\dots\dots	654
§ 6	零点\dots\dots\dots	659
6.1	单零点\dots\dots\dots	659
6.2	零点的位置\dots\dots\dots	660
6.3	最大正零点与 1 的距离\dots\dots\dots	663
§ 7	模的估计\dots\dots\dots	667
7.1	$\alpha > -\frac{1}{2}, \beta > -\frac{1}{2} \dots\dots\dots$	667
7.2	$\alpha = \beta = -\frac{1}{2} \dots\dots\dots$	668
7.3	$\alpha \geq -\frac{1}{2}, -1 < \beta < -\frac{1}{2}$ 以及 $\alpha > -\frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2} \dots\dots\dots$	669
7.4	$-1 < \alpha < -\frac{1}{2}, \beta \geq -\frac{1}{2}$ 以及 $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta > -\frac{1}{2} \dots\dots\dots$	670
§ 8	雅谷比级数\dots\dots\dots	670
8.1	积分定理\dots\dots\dots	671
8.2	多项式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \dots\dots\dots$	675
习题十四\dots\dots\dots		679
第十五章 超球多项式\dots\dots\dots		681