

# 奥赛经典

专题研究系列



湖南省数学会 | 组编  
湖南师范大学数学奥林匹克研究所

## 奥林匹克数学中的几何问题

◇ 沈文选 张 垚 冷岗松 / 编著

◆ 湖南师范大学出版社



**奥赛经典**

专题研究系列

# 奥林匹克数学中的几何问题

湖南省数学会 | 组编  
湖南师范大学数学奥林匹克研究所

◇沈文选 张 珏 冷岗松/编著

◆湖南师范大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学中的几何问题 / 沈文选, 张垚, 冷岗松编著. —修订本.  
—长沙: 湖南师范大学出版社, 2009. 5

(奥赛经典丛书·专题研究系列)

ISBN 978 - 7 - 5648 - 0026 - 0

I. 奥… II. ①沈…②张…③冷… III. 几何课—中学—教学参考资料  
IV. G634. 633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 072399 号

---

## 奥林匹克数学中的几何问题

沈文选 张 垚 冷岗松 编著

---

◇组 稿: 廖小刚

◇责任编辑: 廖小刚

◇责任校对: 蒋旭东

◇出版发行: 湖南师范大学出版社

地址/长沙市岳麓山 邮编/410081

电话/0731. 8853867 8872751 传真/0731. 8872636

网址/http://press. hunnu. edu. cn

◇印刷: 国防科技大学印刷厂

---

◇开本: 730 × 960 1/16 开

◇印张: 33

◇插页: 0.25

◇字数: 710 千字

◇版次: 2004 年 7 月第 1 版 2009 年 5 月第 1 次修订

2009 年 5 月第 5 次印刷

◇书号: ISBN 978 - 7 - 5648 - 0026 - 0

◇定价: 36.00 元

---

## 前 言

数学奥林匹克是起步最早、规模最大、类型多种、层次较多的一项学科竞赛活动。多年来的实践表明：这项活动可以激发青少年学习数学的兴趣，焕发青少年的学习热情，吸引他们去读一些数学小册子，促使他们寻找机会去听一些名师的讲座；这项活动可以使参与者眼界大开，跳出一个班、一个学校或一个地区的小圈子，去与其他“高手”互相琢磨，激励并培养他们喜爱有挑战性数学问题的素养与精神；这项活动可以使参与者求知欲望大增，使得他们的阅读能力、理解能力、交流能力、表达能力等诸能力与日俱进。这是一种有深刻内涵的文化现象，因此，越来越多的国家或地区除组织本国或本地区的各级各类数学奥林匹克外，还积极地参与到国际数学奥林匹克中。

我国自1986年参加国际数学奥林匹克以来，所取得成绩举世公认，十多年来一直保持世界领先的水平。其中，到2007年止，湖南的学生已取得10块金牌、3块银牌的好成绩。这优异的成绩，是中华民族精神的体现，是国人潜质的反映，是民族强盛的希望。为使我国数学奥林匹克事业可持续发展，一方面要继续吸引越来越多的青少年参与，吸引一部分数学工作者扎实地投入到这项活动中来，另一方面要深入研究奥林匹克数学的理论体系，要深入研究数学奥林匹克教育理论与教学方略，研究数学奥林匹克教育与中学数学教育的内在联系。为此，在中国数学奥林匹克委员会领导的大力支持与热情指导下，2003年，湖南师范大学成立了“数学奥林匹克研究所”。研究所组建近一年来，我们几位教授都积极投身到研究所的工作中，除深入进行奥林匹克数学与数学奥林匹克教育理论研究外，还将我们多年积累的辅导讲座资料进行了全面、系统的整理，以专题讲座的形式编写成了这套专题研究丛书，分几何、代数、组合、数论、真题分析五卷。这些丰富、系统的专题知识不仅是创新地解竞赛题所不可或缺的材料，而且还可激发解竞赛题的直觉或灵感。从教育心理学角度上说，只有具备了充分的专题知识与逻辑推理知识，才能有目的、有方向、有成效地进行探究性活动。

由于这套丛书篇幅较大，2009年又进行了修订，有些部分可能整理欠完善，敬请专家、同行和读者不吝指正。

编者  
2009年5月



## 目 录

### 第一篇 平面几何问题/1

- 第一章 梅涅劳斯定理及应用/1
- 第二章 塞瓦定理及应用/18
- 第三章 托勒迷定理及应用/37
- 第四章 斯特瓦尔特定理及应用/55
- 第五章 张角定理及应用/67
- 第六章 西姆松定理及应用/81
- 第七章 九点圆定理及应用/89
- 第八章 相交两圆的性质及应用/96
- 第九章 完全四边形的性质及应用/104
- 第十章 根轴的性质及应用/126
- 第十一章 线段调和分割的性质及应用/138
- 第十二章 三角形内心的性质及应用/162
- 第十三章 三角形外心的性质及应用/173
- 第十四章 三角形重心的性质及应用/185
- 第十五章 三角形垂心的性质及应用/197
- 第十六章 三角形旁心的性质及应用/213
- 第十七章 关联三角形巧合点的性质及应用/228
- 第十八章 几何变换的性质及应用/242

### 第二篇 立体几何问题/254

- 第十九章 空间射影图的性质及应用/254
- 第二十章 空间向量法及应用/264
- 第二十一章 平行六面体的性质及应用/274
- 第二十二章 一般四面体的性质及应用/283





第二十三章 特殊四面体的性质及应用/310

第二十四章 三面角的性质及应用/341

### 第三篇 平面解析几何问题/352

第二十五章 一般圆锥曲线的性质及应用/352

第二十六章 圆锥曲线的相关性质及应用/366

第二十七章 圆的解析性质及应用/376

第二十八章 椭圆的性质及应用/386

第二十九章 双曲线的性质及应用/399

第三十章 抛物线的性质及应用/410

参考解答/425

参考文献/522



第一篇

平面几何问题

第一章 梅涅劳斯定理及应用

【基础知识】

梅涅劳斯定理 设  $A', B', C'$  分别是  $\triangle ABC$  的三边  $BC, CA, AB$  或其延长线上的点, 若  $A', B', C'$  三点共线, 则  $\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$ . ①

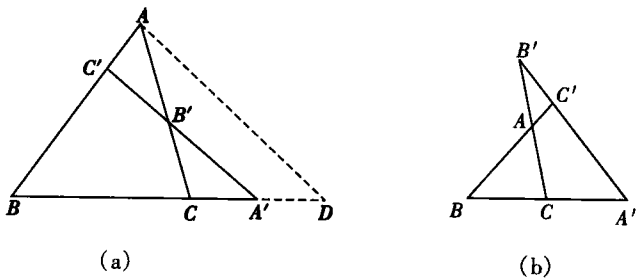


图 1-1

证明 如图 1-1(a), 过  $A$  作直线  $AD \parallel C'A'$  交  $BC$  的延长线于  $D$ , 则

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{CA'}{A'D}, \frac{AC'}{C'B} = \frac{DA'}{A'B}, \text{ 故}$$

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CA'}{A'D} \cdot \frac{DA'}{A'B} = 1.$$

**注** 此定理的证明还有如下正弦定理证法及面积证法。

**正弦定理证法** 设  $\angle BC'A' = \alpha, \angle CB'A' = \beta, \angle B'A'B = \gamma$ , 在  $\triangle BA'C'$  中, 有  $\frac{BA'}{C'B} =$

$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$ , 同理,  $\frac{CB'}{CA'} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}, \frac{AC'}{AB'} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ , 此三式相乘即证。

**面积证法** 由  $\frac{BA'}{A'C} = \frac{S_{\triangle A'CB}}{S_{\triangle A'CC}}, \frac{CB'}{B'A} = \frac{S_{\triangle CBF}}{S_{\triangle B'AC}} = \frac{S_{\triangle CA'B'}}{S_{\triangle A'AB'}} = \frac{S_{\triangle CBF} + S_{\triangle CA'B'}}{S_{\triangle B'AC} + S_{\triangle A'AB}} = \frac{S_{\triangle CCA'}}{S_{\triangle ACA'}}$ ,

$\frac{AC'}{C'B} = \frac{S_{\triangle ACA'}}{S_{\triangle CBA'}}$ , 此三式相乘即证。

**梅涅劳斯定理的逆定理** 设  $A', B', C'$  分别是  $\triangle ABC$  的三边  $BC, CA, AB$  或其延长线上的点, 若

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1, \quad (2)$$

则  $A', B', C'$  三点共线。

**证明** 设直线  $A'B'$  交  $AB$  于  $C_1$ , 则由梅涅劳斯定理, 得到  $\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC_1}{C_1A} = 1$ 。

由题设, 有  $\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$ , 即有  $\frac{AC_1}{C_1A} = \frac{AC'}{C'B}$ 。

又由合比定理, 知  $\frac{AC_1}{AB} = \frac{AC'}{AB}$ , 故有  $AC_1 = AC'$ , 从而  $C_1$  与  $C'$  重合, 即  $A', B', C'$  三点共线。

有时, 也把上述两个定理合写为: 设  $A', B', C'$  分别是  $\triangle ABC$  的三边  $BC, CA, AB$  所在直线 (包括三边的延长线) 上的点, 则  $A', B', C'$  三点共线的充要条件是

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1.$$

上述①与②式是针对  $\triangle ABC$  而言的, 如图 1-1(b), 对于  $\triangle C'BA', \triangle B'CA', \triangle AC'B'$  也有下述形式的充要条件:

$$\frac{C'A}{AB} \cdot \frac{BC}{CA'} \cdot \frac{A'B'}{B'C'} = 1; \quad \frac{B'A}{AC} \cdot \frac{CB}{BA'} \cdot \frac{A'C'}{C'B'} = 1; \quad \frac{AB}{BC'} \cdot \frac{C'A'}{A'B'} \cdot \frac{B'C}{CA} = 1. \quad (3)$$

**第一角元形式的梅涅劳斯定理** 设  $A', B', C'$  分别是  $\triangle ABC$  的三边  $BC, CA, AB$  所在直线 (包括三边的延长线) 上的点, 则  $A', B', C'$  共线的充分必要条件是

$$\frac{\sin \angle BAA'}{\sin \angle A'AC} \cdot \frac{\sin \angle ACC'}{\sin \angle C'CB} \cdot \frac{\sin \angle CBB'}{\sin \angle B'BA} = 1. \quad (4)$$

**证明** 如图 1-2, 可得



$$\begin{aligned} \frac{BA'}{A'C} &= \frac{S_{\triangle ABA'}}{S_{\triangle AA'C}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AA' \cdot \sin \angle BAA'}{\frac{1}{2} AA' \cdot AC \cdot \sin \angle A'AC} \\ &= \frac{AB \cdot \sin \angle BAA'}{AC \cdot \sin \angle A'AC}. \end{aligned}$$

同理,  $\frac{CB'}{B'A} = \frac{BC \cdot \sin \angle CBB'}{AB \cdot \sin \angle B'BA}$ ,  $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC \cdot \sin \angle ACC'}{BC \cdot \sin \angle C'CB}$ .

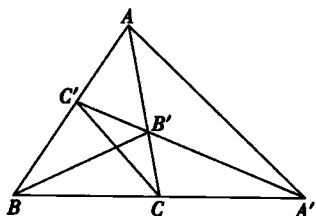


图 1-2

以上三式相乘, 运用梅涅劳斯定理及其逆定理, 知结论成立.

**第二角元形式的梅涅劳斯定理** 设  $A'$ 、 $B'$ 、 $C'$  分别是  $\triangle ABC$  的三边  $BC$ 、 $CA$ 、 $AB$  所在直线上的点, 点  $O$  不在  $\triangle ABC$  三边所在直线上, 则  $A'$ 、 $B'$ 、 $C'$  三点共线的充要条件是

$$\frac{\sin \angle BOA'}{\sin \angle A'OC} \cdot \frac{\sin \angle COB'}{\sin \angle B'OA} \cdot \frac{\sin \angle AOC'}{\sin \angle C'OB} = 1. \quad (5)$$

**证明** 如图 1-3, 由  $\frac{S_{\triangle BOA'}}{S_{\triangle A'OC}} = \frac{BA'}{A'C}$ , 有

$$\frac{\sin \angle BOA'}{\sin \angle A'OC} = \frac{OC}{OB} \cdot \frac{BA'}{A'C}.$$

同理,  $\frac{\sin \angle COB'}{\sin \angle B'OA} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{CB'}{B'A}$ ,  $\frac{\sin \angle AOC'}{\sin \angle C'OB} = \frac{OB}{OA} \cdot \frac{AC'}{C'B}$ .

于是  $\frac{\sin \angle BOA'}{\sin \angle A'OC} \cdot \frac{\sin \angle COB'}{\sin \angle B'OA} \cdot \frac{\sin \angle AOC'}{\sin \angle C'OB} = \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B}$ .

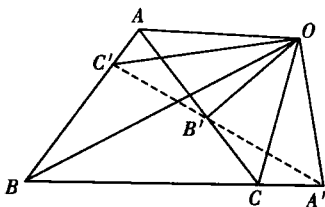


图 1-3

$$\frac{AC'}{C'B}.$$

故由梅涅劳斯定理知  $A'$ 、 $B'$ 、 $C'$  共线  $\Leftrightarrow \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$ .

从而定理获证.

**注** (1) 对于④、⑤式也有类似③式的结论.

(2) 于在上述各定理中, 若采用有向线段或有向角, 则①、②、③、④、⑤式中的右端均为  $-1$ , ③、④、⑤式中的角也可以按①或②式中的对应线段记忆. 特别要注意的是三边所在直线上的点为一点或者三点在边的延长线上.

## 【典型例题与基本方法】

1. 恰当地选择三角形及其截线(或作出截线), 是应用梅涅劳斯定理的关键

**例 1** 如图 1-4, 在四边形  $ABCD$  中,  $\triangle ABD$ ,  $\triangle BCD$ ,  $\triangle ABC$  的面积比是  $3:4:1$ , 点

$M, N$  分别在  $AC, CD$  上, 满足  $AM:AC = CN:CD$ , 并且  $B, M, N$  共线. 求证:  $M$  与  $N$  分别是  $AC$  和  $CD$  的中点. (1983 年全国高中联赛题)

**证明** 设  $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CD} = r (0 < r < 1)$ ,  $AC$  交  $BD$  于  $E$ .

$$\therefore S_{\triangle ABD} : S_{\triangle BCD} : S_{\triangle ABC} = 3:4:1,$$

$$\therefore \frac{BE}{BD} = \frac{1}{7}, \frac{AE}{AC} = \frac{3}{7}.$$

$$\frac{EM}{MC} = \frac{AM - AE}{AC - AM} = \frac{\frac{AM}{AC} - \frac{AE}{AC}}{1 - \frac{AM}{AC}} = \frac{r - \frac{3}{7}}{1 - r} = \frac{7r - 3}{7 - 7r}.$$

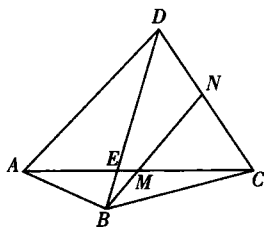


图 1-4

又因  $B, M, N$  三点共线, 可视  $BMN$  为  $\triangle CDE$  的截线, 故由梅涅劳斯定理, 得

$$\frac{CN}{ND} \cdot \frac{DB}{BE} \cdot \frac{EM}{MC} = 1, \text{ 即 } \frac{r}{1-r} \cdot \frac{7}{1} \cdot \frac{7r-3}{7-7r} = 1.$$

化简整理, 得  $6r^2 - r - 1 = 0$ ,

$$\text{解得 } r = \frac{1}{2}, r = -\frac{1}{3} \text{ (舍去)}.$$

故  $M$  与  $N$  分别是  $AC$  和  $CD$  的中点.

**例 2** 如图 1-5, 在四边形  $ABCD$  中, 对角线  $AC$  平分  $\angle BAD$ , 在  $CD$  上取一点  $E$ ,  $BE$  与  $AC$  相交于  $F$ , 延长  $DF$  交  $BC$  于  $G$ . 求证:  $\angle GAC = \angle EAC$ .

(1999 年全国高中联赛题)

**证明** 记  $\angle BAC = \angle CAD = \theta$ ,  $\angle GAC = \alpha$ ,  $\angle EAC = \beta$ , 直线  $GFD$  与  $\triangle BCE$  相截, 由梅涅劳斯定理, 有

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FB} = \frac{S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle ACD} \cdot S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle AGC} \cdot S_{\triangle AED} \cdot S_{\triangle ABF}} \\ &= \frac{AB \cdot \sin(\theta - \alpha)}{AC \cdot \sin \alpha} \cdot \frac{AC \cdot \sin \theta}{AE \cdot \sin(\theta - \beta)} \cdot \frac{AE \cdot \sin \beta}{AB \cdot \sin \theta} \\ &= \frac{\sin(\theta - \alpha) \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin(\theta - \beta)}. \end{aligned}$$

$$\therefore \sin(\theta - \alpha) \cdot \sin \beta = \sin(\theta - \beta) \cdot \sin \alpha.$$

即  $\sin \theta \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \cos \theta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta = \sin \theta \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha - \cos \theta \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha$ ,

亦即  $\sin \theta \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta = \sin \theta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta \Leftrightarrow \sin(\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = k\pi$ , 且  $k$  只可能为 0, 故  $\angle GAC = \angle EAC$ .

**例 3** 设  $E, F$  分别为四边形  $ABCD$  的边  $BC, CD$  上的点,  $BF$  与  $DE$  交于点  $P$ . 若  $\angle BAE = \angle FAD$ , 则  $\angle BAP = \angle CAD$ .

**证明** 如图 1-6, 只需证得当  $AF$  关于  $\angle BAD$  的等角线交  $BE$  于  $P$  时,  $B, P, F$  共

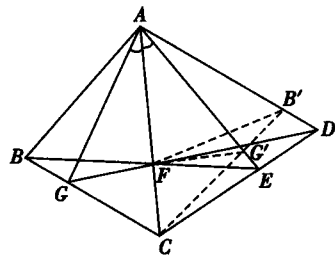


图 1-5

线即可.

事实上,  $B, P, F$  分别为  $\triangle CDE$  三边所在直线上的三点, 且  $A$  不在其三边所在直线上.

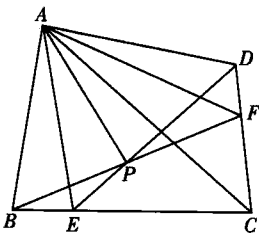
又  $\angle FAD = \angle EAB, \angle DAP = \angle BAC, \angle PAE = \angle CAF,$

由第二角元形式的梅涅劳斯定理, 有

$$\frac{\sin \angle EAB}{\sin \angle BAC} \cdot \frac{\sin \angle CAF}{\sin \angle FAD} \cdot \frac{\sin \angle DAP}{\sin \angle PAE} = 1. \text{ 故 } B, P, F \text{ 三点共线.}$$

注 当  $AC$  平分  $\angle BAD$  时, 即为 1999 年全国高中联赛题.

图 1-6



2. 梅涅劳斯定理的逆用(逆定理的应用)与选用, 是灵活应用梅氏定理的一种方法

例 2 另证 如图 1-5, 设  $B, G$  关于  $AC$  的对称点分别为  $B', G'$ , 易知  $A, D, B'$  三点共线, 连  $FB', FG'$ , 只须证明  $A, E, G'$  三点共线.

设  $\angle EFB' = \alpha, \angle DFE = \angle BFG = \angle B'FG' = \beta, \angle AFD = \angle GFC = \angle G'FC = \gamma,$  则

$$\frac{DA}{AB'} \cdot \frac{B'G'}{G'C} \cdot \frac{CE}{ED} = \frac{S_{\triangle FDA}}{S_{\triangle FB'A}} \cdot \frac{S_{\triangle FG'B'}}{S_{\triangle FG'C}} \cdot \frac{S_{\triangle FEC}}{S_{\triangle FED}} = \frac{FD \cdot \sin \gamma}{FB' \cdot \sin(\beta + \gamma - \alpha)} \cdot \frac{FB' \cdot \sin \beta}{FC \cdot \sin \gamma} \cdot \frac{FC \cdot \sin(\beta + \gamma - \alpha)}{FD \cdot \sin \beta} = 1.$$

对  $\triangle CB'D$ , 应用梅涅劳斯定理的逆定理, 知  $A, E, G'$  三点共线. 故  $\angle GAC = \angle EAC$ .

注 在图 1-5 中, \* 式也可为  $\sin(180^\circ - \beta - \gamma)$ , 若  $B'$  在  $AD$  的延长上, 则 \* 式为  $\sin(\beta + \gamma + \alpha)$ .

例 4 如图 1-7,  $\odot O_1$  与  $\odot O_2$  和  $\triangle ABC$  的三边所在的 3 条直线都相切,  $E, F, G, H$  为切点, 直线  $EG$  与  $FH$  交于点  $P$ . 求证:  $PA \perp BC$ . (1996 年全国高中联赛题)

证法 1 过  $A$  作  $AD \perp BC$  于  $D$ , 延长  $DA$  交直线  $HF$  于点  $P'$ . 对  $\triangle ABD$  及截线  $FHP'$  应用梅涅劳斯定理, 有

$$\frac{AH}{HB} \cdot \frac{BF}{FD} \cdot \frac{DP'}{P'A} = 1.$$

由  $BF = BH$ , 有  $\frac{AH}{FD} \cdot \frac{DP'}{P'A} = 1$ .

显然  $O_1, A, O_2$  三点共线, 连  $O_1E, O_1G, O_2F, O_2H$ , 则由  $O_1E \parallel AD \parallel O_2F$ , 有  $\triangle AGO_1 \sim \triangle AHO_2$ , 从而

$$\frac{DE}{DF} = \frac{AO_1}{AO_2} = \frac{AG}{AH}, \text{ 即 } \frac{AH}{FD} = \frac{AG}{ED}.$$

又  $CE = CG$ , 则  $1 = \frac{AH}{FD} \cdot \frac{DP'}{P'A} = \frac{DP'}{P'A} \cdot \frac{AG}{ED} = \frac{DP'}{P'A} \cdot \frac{AG}{GC} \cdot \frac{CE}{ED}$ .

对  $\triangle ADC$ , 应用梅涅劳斯定理的逆定理, 知  $P', G, E$  三点共线, 即  $P'$  为直线  $EG$  与  $FH$  的交点. 故点  $P'$  与点  $P$  重合, 从而  $PA \perp BC$ .

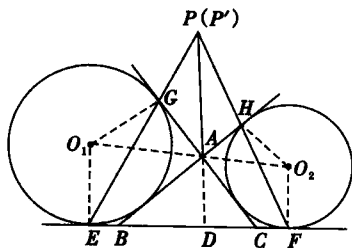


图 1-7

证法2 延长  $PA$  交  $BC$  于  $D$ , 直线  $PHF$  与  $\triangle ABD$  的三边延长线都相交, 直线  $PGE$  与  $\triangle ADC$  的三边延长线都相交, 分别应用(选用)梅涅劳斯定理, 有

$$\frac{AH}{HB} \cdot \frac{BF}{FD} \cdot \frac{DP}{PA} = 1, \frac{DP}{PA} \cdot \frac{AG}{GC} \cdot \frac{CE}{ED} = 1.$$

上述两式相除, 则有  $\frac{AH}{HB} \cdot \frac{BF}{FD} = \frac{AG}{GC} \cdot \frac{CE}{ED}$ .

而  $HB = BF, CE = GC$ , 于是  $\frac{AH}{FD} = \frac{AG}{ED}$ , 即  $\frac{AG}{AH} = \frac{DE}{DF}$ .

连  $O_1G, O_1E, O_1A, O_2A, O_2H, O_2F$ , 而  $O_1, A, O_2$  共线, 则  $OG \perp GC, O_2H \perp BH$ , 且  $\triangle O_1AG \sim \triangle O_2AH$ , 从而  $\frac{O_1A}{O_2A} = \frac{AG}{AH} = \frac{DE}{DF}$ , 于是  $AD \parallel O_1E$ . 故  $AD \perp EF$ , 即  $PA \perp BC$ .

## 【解题思维策略分析】

梅涅劳斯定理是三角形几何学中的一颗明珠, 它蕴含着深刻的数学美, 因而它在求解某些平面几何问题, 特别是某些平面几何竞赛题中有着重要的应用.

### 1. 寻求线段倍分的一座桥梁

例5 已知  $\triangle ABC$  的重心为  $G, M$  是  $BC$  边的中点, 过  $G$  作  $BC$  边的平行线交  $AB$  边于  $X$ , 交  $AC$  边于  $Y$ , 且  $XC$  与  $GB$  交于点  $Q, YB$  与  $GC$  交于点  $P$ . 证明:  $\triangle MPQ \sim \triangle ABC$ .

(1991年第三届亚太地区竞赛题)

证明 如图1-8, 延长  $BG$  交  $AC$  于  $N$ , 则  $N$  为  $AC$  的中点.

由  $XY \parallel BC$ , 知  $\frac{AX}{XB} = \frac{AG}{GM} = 2$ , 而  $\frac{NC}{CA} = \frac{1}{2}$ .

对  $\triangle ABN$  及截线  $XQC$ , 应用梅涅劳斯定理, 有

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BQ}{QN} \cdot \frac{NC}{CA} = 2 \cdot \frac{BQ}{QN} \cdot \frac{1}{2} = 1, \text{ 故 } BQ = QN.$$

从而  $MQ \parallel AC$ , 且  $MQ = \frac{1}{2} CN = \frac{1}{4} AC$ .

同理,  $MP \parallel AB$ , 且  $MP = \frac{1}{4} AB$ .

由此可知,  $\angle PMQ$  与  $\angle BAC$  的两边分别平行且方向相反, 从而  $\angle PMQ = \angle BAC$ ,

且  $\frac{MP}{AB} = \frac{MQ}{AC}$ , 故  $\triangle MPQ \sim \triangle ABC$ .

例6  $\triangle ABC$  是一个等腰三角形,  $AB = AC, M$  是  $BC$  的中点;  $O$  是  $AM$  的延长线上的一点, 使得  $OB \perp AB$ ;  $Q$  是线段  $BC$  上不同于  $B$  和  $C$  的任意一点,  $E$  在直线  $AB$  上,  $F$  在直线  $AC$  上, 使得  $E, Q, F$  是不同的和共线的. 求证:

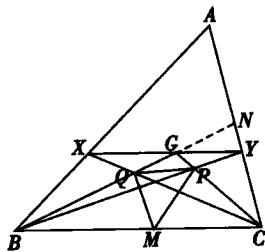


图 1-8

(I) 若  $OQ \perp EF$ , 则  $QE = QF$ ;

(II) 若  $QE = QF$ , 则  $OQ \perp EF$ . (1994 年第 35 届 IMO 试题)

**证明** (I) 如图 1-9, 连  $OE, OF, DC$ . 由  $OQ \perp EF$ , 易证  $O, E, B, Q$  四点共圆,  $O, C, F, Q$  四点共圆. 则  $\angle OEQ = \angle OBQ = \angle OCQ = \angle OFQ$ , 因此  $OE = OF$ . 故  $QE = QF$ .

(II) 由  $AB = AC, EQ = QF$ , 对  $\triangle AEF$  及截线  $BQC$  运用梅涅劳斯定理, 有  $1 = \frac{AB}{BE} \cdot \frac{EQ}{QF} \cdot \frac{EC}{CA} = \frac{FC}{BE}$ , 即  $BE = CF$ . 于是可证  $\text{Rt}\triangle OBE \cong \text{Rt}\triangle OCF$ , 得  $OE = OF$ , 故  $OQ \perp EF$ .

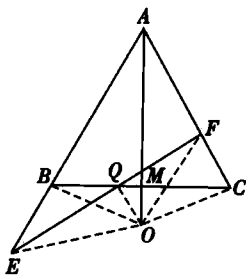


图 1-9

**例 7** 在凸四边形  $ABCD$  的边  $AB$  和  $BC$  上取点  $E$  和  $F$ , 使线

段  $DE$  和  $DF$  把对角线  $AC$  三等分, 已知  $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle CDF} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$ , 求证:  $ABCD$  是平行四边形.

(1990 年第 16 届全俄竞赛题)

**证明** 如图 1-10, 设  $DE, DF$  分别交  $AC$  于  $P, Q$ , 两对角线交于  $M$ . 要证  $ABCD$  是平行四边形, 若证得  $AM = MC$  (或  $PM = MQ$ ), 且  $BM = MD$  即可.

由  $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle CDF}, S_{\triangle ADP} = S_{\triangle CDQ}$  (等底等高), 知  $S_{\triangle AEP} = S_{\triangle CFQ}$ , 而  $AP = CQ$ , 故有  $EF \parallel AC$ , 从而有  $\frac{BE}{EA} = \frac{BF}{FC}$ .

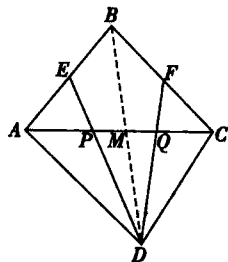


图 1-10

对  $\triangle BAM$  及截线  $EPD$ ,  $\triangle BCM$  及截线  $FQD$ , 分别应用梅涅劳斯定理, 有

$$\frac{BE}{EA} \cdot \frac{AP}{PM} \cdot \frac{MD}{DB} = 1, \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{CQ}{QM} \cdot \frac{MD}{DB} = 1. \quad \textcircled{2}$$

由  $\textcircled{1}, \textcircled{2}$  两式相除得  $\frac{AP}{PM} = \frac{CQ}{QM}$ .

而  $AP = CQ$ , 故  $PM = MQ$ , 即有  $AM = MC$ .

此时, 又有  $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ .

又由  $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$ , 知  $BE = EA$ , 于是  $\textcircled{1}$  式可写为  $\frac{BE}{EA} \cdot \frac{AP}{PM} \cdot \frac{MD}{DB} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{MD}{DB} = 1$ ,

即有  $DB = 2MD$ , 亦即  $BM = MD$ .

故  $ABCD$  为平行四边形.

## 2. 导出线段比例式的重要途径

**例 8** 在  $\triangle ABC$  中,  $AA_1$  为  $BC$  边上的中线,  $AA_2$  为  $\angle BAC$  的平分线, 且交  $BC$  于

$A_2, K$  为  $AA_1$  上的点, 使  $KA_2 \parallel AC$ . 证明  $AA_2 \perp KC$ . (1997 年第 58 届莫斯科竞赛题)

**证明** 如图 1-11, 延长  $CK$  交  $AB$  于  $D$ , 只须证  $AD = AC$ .

由  $AA_2$  平分  $\angle BAC$ , 有  $\frac{AB}{AC} = \frac{BA_2}{A_2C}$ . ①

由  $KA_2 \parallel AC$ , 有  $\frac{A_1K}{KA} = \frac{A_1A_2}{A_2C}$ .

注意到  $BC = 2A_1C$ , 对  $\triangle ABA_1$  及截线  $DKC$  运用梅涅劳斯定理, 得

$$1 = \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BC}{CA_1} \cdot \frac{A_1K}{KA} = \frac{AD}{DB} \cdot 2 \cdot \frac{A_1A_2}{A_2C}. \text{ 故 } \frac{BD}{DA} = \frac{2A_1A_2}{A_2C}, \text{ 由合比定理, 有}$$

$$\frac{BD + DA}{DA} = \frac{2A_1A_2 + A_2C}{A_2C} = \frac{A_1A_2 + A_1C}{A_2C} = \frac{A_1A_2 + BA_1}{A_2C}, \text{ 即为 } \frac{AB}{AD} = \frac{BA_2}{A_2C}. \quad \text{②}$$

由①, ②式有  $\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AD}$ , 故  $AC = AD$ .

**例 9** 给定锐角  $\triangle ABC$ , 在  $BC$  边上取点  $A_1, A_2$  ( $A_2$  位于  $A_1$  与  $C$  之间), 在  $CA$  边上取点  $B_1, B_2$  ( $B_2$  位于  $B_1$  与  $A$  之间), 在  $AB$  边上取点  $C_1, C_2$  ( $C_2$  位于  $C_1$  与  $B$  之间), 使得  $\angle AA_1A_2 = \angle AA_2A_1 = \angle BB_1B_2 = \angle BB_2B_1 = \angle CC_1C_2 = \angle CC_2C_1$ , 直线  $AA_1, BB_1$  与  $CC_1$  可构成一个三角形, 直线  $AA_2, BB_2$  与  $CC_2$  可构成另一个三角形. 证明: 这两个三角形的六个顶点共圆. (1995 年第 36 届 IMO 预选题)

**证明** 如图 1-12, 设题中所述两个三角形分别为  $\triangle UVW$  与  $\triangle XYZ$ .

由已知条件, 有  $\triangle AC_1C \sim \triangle AB_2B, \triangle BA_2A \sim \triangle BC_1C, \triangle CB_2B \sim \triangle CA_1A$ , 得  $\frac{AC_1}{AB_2} = \frac{AC}{AB}, \frac{BA_2}{BC_1} = \frac{AB}{BC}, \frac{CB_2}{CA_1} = \frac{BC}{AC}$ , 此

三式相乘得  $\frac{AC_1}{AB_2} \cdot \frac{BA_2}{BC_1} \cdot \frac{CB_2}{CA_1} = 1$ . ①

对  $\triangle AA_1B$  及截线  $CUC_1, \triangle AA_2C$  及截线  $BXB_2$ , 分别应用梅涅劳斯定理, 得

$$\frac{AU}{UA_1} \cdot \frac{A_1C}{CB} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1, \quad \text{②} \quad \frac{A_2X}{XA} \cdot \frac{AB_2}{B_2C} \cdot \frac{CB}{BA_2} = 1, \quad \text{③}$$

①, ②, ③ 三式相乘化简, 得  $\frac{AU}{UA_1} = \frac{AX}{XA_2}$ . 故  $UX \parallel BC$ .

同理,  $WX \parallel CA$ . 故  $\angle AUX = \angle AA_1A_2 = \angle BB_1B_2 = \angle BWX$ .

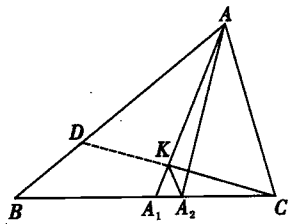


图 1-11

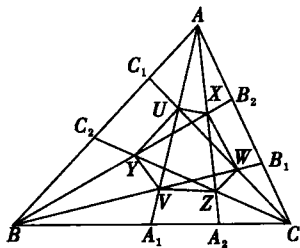


图 1-12

从而点  $X$  在  $\triangle UVW$  的外接圆上.

同理, 可证得  $Y, Z$  也在  $\triangle UVW$  的外接圆上. 证毕.

**例 10** 如图 1-13, 以  $\triangle ABC$  的底边  $BC$  为直径作半圆, 分别与边  $AB, AC$  交于点  $D$  和  $E$ , 分别过点  $D, E$  作  $BC$  的垂线, 垂足依次为  $F, G$ , 线段  $DG$  和  $EF$  交于点  $M$ . 求证:  $AM \perp BC$ . (IMO-37 中国国家队选拔赛题)

**证法 1** 设直线  $AM$  与  $BC$  交于  $H$ , 连  $BE, CD$ , 则知  $\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$ , 直线  $FME$  与  $\triangle AHC$  相截, 直线  $GMD$  与  $\triangle ABH$  相截, 选用梅涅劳斯定理, 有

$$\frac{AM}{MH} \cdot \frac{HF}{FC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1, \frac{AM}{MH} \cdot \frac{HG}{GB} \cdot \frac{BD}{DA} = 1.$$

两式相除, 得  $\frac{FH}{HG} = \frac{CF \cdot AE \cdot BD}{CE \cdot BG \cdot AD}$ .

在  $\text{Rt}\triangle DBC$  与  $\text{Rt}\triangle EBC$  中, 有

$$CD^2 = BC \cdot FC, BE^2 = BC \cdot BG, \text{ 即 } \frac{CF}{BG} = \frac{CD^2}{BE^2}. \text{ 将其代入①式, 得}$$

$$\frac{FH}{HG} = \frac{CD^2 \cdot AE \cdot BD}{BE^2 \cdot CE \cdot AD}. \quad \textcircled{2}$$

又由  $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ , 有  $\frac{CD}{BE} = \frac{AD}{AE}$ .

将其代入②式, 得  $\frac{FH}{HG} = \frac{CD \cdot BD}{BE \cdot CE} = \frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle EBC}} = \frac{DF}{EG} = \frac{DM}{MG}$ , 从而,  $MH \parallel DF$ .

而  $DF \perp BE$ , 则  $MH \perp BC$ , 故  $AM \perp BC$ .

**证法 2** 作高  $AH$ , 连  $BE, CD$ , 则  $\angle BDC = 90^\circ = \angle BEC$ , 于是,  $DF = BD \cdot \sin \angle B = BC \cdot \cos \angle B \cdot \sin \angle B$ ,  $EG = BC \cdot \cos \angle C \cdot \sin \angle C$ .

$$\therefore \frac{GM}{MD} = \frac{EG}{FD} = \frac{\cos \angle C \cdot \sin \angle C}{\cos \angle B \cdot \sin \angle B} = \frac{AB \cdot \cos \angle C}{AC \cdot \cos \angle B}.$$

又  $BH = AB \cdot \cos \angle B$ ,  $HG = AE \cdot \cos \angle C$ ,

$$\therefore \frac{BH}{HG} = \frac{AB \cdot \cos \angle B}{AE \cdot \cos \angle C} = \frac{AC \cdot \cos \angle B}{AD \cdot \cos \angle C}, \text{ 即 } \frac{BH}{HG} \cdot \frac{GM}{MD} = \frac{AB}{AD}, \text{ 故 } \frac{BH}{HG} \cdot \frac{GM}{MD} \cdot \frac{DA}{AB} = 1.$$

对  $\triangle BGD$  应用梅涅劳斯定理的逆定理, 知  $H, M, A$  三点共线. 由  $AH \perp BC$ , 知  $AM \perp BC$ .

**例 11** 如图 1-14, 设点  $I, H$  分别为锐角  $\triangle ABC$  的内心和垂心, 点  $B_1, C_1$  分别为边  $AC, AB$  的中点. 已知射线  $B_1 I$  交边  $AB$  于点  $B_2$  ( $B_2 \neq B$ ), 射线  $C_1 I$  交  $AC$  的延长线于点  $C_2$ ,  $B_2 C_2$  与  $BC$  相交于  $K$ ,  $A_1$  为  $\triangle BHC$  的外心. 试证:  $A, I, A_1$  三点共线的充分必要条件是  $\triangle BKB_2$  和  $\triangle CKC_2$  的面积相等. (CMO-2003 试题)

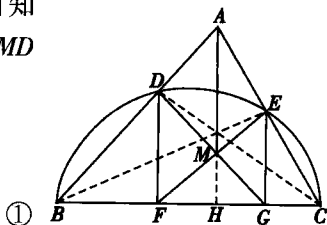


图 1-13

分析 首先证  $A, I, A_1$  三点共线  $\Leftrightarrow \angle BAC = 60^\circ$ .

设  $O$  为  $\triangle ABC$  的外心, 连  $BO, CO$ , 则  $\angle BOC = 2\angle BAC$ . 又  $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$ , 因此,  $\angle BAC = 60^\circ$

$\Leftrightarrow B, H, O, C$  四点共圆

$\Leftrightarrow A_1$  在  $\triangle ABC$  的外接圆  $\odot O$  上

$\Leftrightarrow AI$  与  $AA_1$  重合  $\Leftrightarrow A, I, A_1$  三点共线.

其次, 再证  $S_{\triangle BKB_2} = S_{\triangle CKC_2} \Leftrightarrow \angle BAC = 60^\circ$ . 并在三角函数式中, 用  $A, B, C$  分别表示三内角.

证法 1 设  $\triangle ABC$  的外接圆半径为  $R$ ,  $CI$  的延长

线交  $AB$  于  $D$ , 对  $\triangle ACD$  及截线  $C_1, IC_2$ , 应用梅涅劳斯定理, 有  $\frac{AC_1}{C_1D} \cdot \frac{DI}{IC} \cdot \frac{CC_2}{C_2A} = 1$ . ①

$$\text{注意到 } C_1D = AD - AC_1 = \frac{AC \cdot AB}{AC + BC} - \frac{AB}{2}$$

$$= \frac{AB(AC - BC)}{2(AC + BC)} = \frac{\sin C(\sin B - \sin A) \cdot R}{\sin B + \sin A} = \frac{2\sin^2 \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{B-A}{2} \cdot R}{\cos \frac{A-B}{2}},$$

$$\therefore \frac{C_1D}{AC_1} = \frac{\sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{B-A}{2}}{\cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}}$$

$$\text{而 } \frac{IC}{DI} = \frac{AC}{AD} = \frac{\sin \angle ADC}{\sin \angle ACD} = \frac{\sin(\frac{C}{2} + B)}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}, \text{ 由①式, 有 } \frac{CC_2}{C_2A} = \frac{IC}{DI} \cdot \frac{C_1D}{AC_1} =$$

$$\frac{\sin \frac{B-A}{2}}{\cos \frac{C}{2}}. \text{ 从而 } \frac{AC}{AC_2} = \frac{AC_2 - CC_2}{C_2A} = \frac{2\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}. \quad \text{②}$$

又对  $\triangle ACD$  及截线  $B_1, IB_2$ , 应用梅涅劳斯定理, 有  $\frac{AB_2}{B_2D} \cdot \frac{DI}{IC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ .

$$\text{注意到 } CB_1 = B_1A, \text{ 有 } \frac{B_2D}{AB_2} = \frac{DI}{IC} = \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}}, \frac{AD}{AB_2} = \frac{AB_2 - B_2D}{AB_2} = \frac{\cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} =$$

$$\frac{2\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}}, \text{ 即 } AB_2 = AD \cdot \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{2\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}} = AB \cdot \frac{AC}{AC + BC} \cdot \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{2\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}} = AB.$$

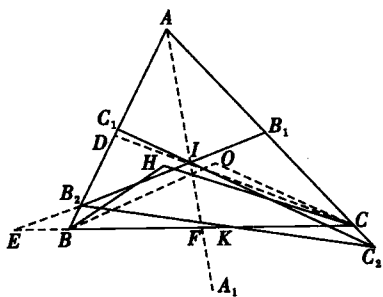


图 1-14



$$\frac{\sin B}{\sin B + \sin A} \cdot \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}} = AB \cdot \frac{\cos \frac{B}{2}}{2 \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2}}. \text{ 从而 } \frac{AB}{AB_2} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2}}. \quad (3)$$

由  $S_{\triangle BKB_2} = S_{\triangle CKC_2} \Leftrightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB_2C_2} \Leftrightarrow \frac{AB \cdot AC}{AB_2 \cdot AC_2} = 1$ , 注意②, ③  $\Leftrightarrow 4 \sin^2 \frac{A}{2} = 1$ , 且  $A$  为锐角  $\Leftrightarrow \angle BAC = 60^\circ$ .

**证法 2** 如图 1-14, 设直线  $AI$  交  $BC$  于  $F$ , 直线  $B_1B_2$  交  $CB$  的延长线于  $E$ . 对  $\triangle ACF$  及截线  $B_1IE$ , 应用梅涅劳斯定理, 有  $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CE}{EF} \cdot \frac{FI}{IA} = 1$ . (4)

又由  $AB_1 = B_1C$  及角平分线性质, 即有  $\frac{FI}{IA} = \frac{CF}{CA} = \frac{BF}{BA} = \frac{BC}{AB+AC}$ .

令  $BC = a, AC = b, AB = c$ , 则  $\frac{FI}{IA} = \frac{a}{b+c}$ .

由④式, 有  $\frac{CE}{EF} = \frac{b+c}{a}$ , 即  $\frac{EF}{CF} = \frac{EF}{CE-EF} = \frac{a}{b+c-a}$ .

而  $CF = \frac{ab}{b+c}$ , 则  $EF = \frac{a^2 b}{(b+c-a)(b+c)}$ .

又  $BF = \frac{ac}{b+c}, BE = EF - BF = \frac{a(a-c)}{b+c-a}$  (由题设知  $a > c$ ).

从而  $\frac{EF}{BE} = \frac{ab}{(b+c)(a-c)}$ . (5)

对  $\triangle ABF$  及截线  $IB_2E$ , 应用梅涅劳斯定理, 有  $\frac{AI}{IF} \cdot \frac{FE}{EB} \cdot \frac{BB_2}{B_2A} = 1$ .

将⑤式代入上式, 得  $\frac{BB_2}{B_2A} = \frac{IF}{AI} \cdot \frac{BE}{EF} = \frac{a-c}{b}, \therefore \frac{AB}{AB_2} = \frac{AB_2 + B_2B}{AB_2} = \frac{a+b-c}{b}$ . (6)

同理  $\frac{AC}{AC_2} = \frac{a+c-b}{c}$ . (7)

由  $S_{\triangle BKB_2} = S_{\triangle CKC_2} \Leftrightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB_2C_2} \Leftrightarrow \frac{AB \cdot AC}{AB_2 \cdot AC_2} = 1$ , 注意⑥, ⑦  $\Leftrightarrow \frac{a+b-c}{b}$

$$\frac{a+c-b}{c} = 1 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc \Leftrightarrow \angle BAC = 60^\circ.$$

**注 例 11** 还有其他证法, 可参见笔者另文《关于 2003 年中国数学奥林匹克第一题》(《中等数学》2003 年第 6 期).

**例 12** 如图 1-15, 凸四边形  $ABCD$  的一组对边  $BA$  与  $CD$  的延长线交于  $M$ , 且  $AD \not\parallel BC$ , 过  $M$  作截线交另一组对边所在直线于  $H, L$ , 交对角线所在直线于  $H', L'$ . 求