2005版·考研经典

NETEM MATHS

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学

重点题型80

文登考研数学团队

陈文灯 黄先开

曹显兵 施明存

殷先军

文登考研

指定用书

- 新编题型
- 专题讲解
- 命题规律 10年总结

经济类

FOCUS 聚焦图书

有此防伪标志皆为正版

世界图书出版公司

FOCUS 聚焦图书

2005版·考研经典

N E T E M M A T H S

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学

重点题型80

文登考研数学团队

陈文灯 黄先开 曹显兵
施明存 殷先军

经济类

- 《数学复习指南》
  帮助考生理解和吃透大纲，掌握解题方法和技巧，奠定坚实的应试知识基础。
- 《数学题型集粹与练习题集》
  将浩渺的习题浓缩于有限的题型之中，并配以练习题巩固所学知识点。
- 《重点题型》
  帮助考生在中后期复习阶段梳理思路，对重点题型了然于胸。
- 《模拟试卷》
  依据05年新大纲与十年命题规律编写，全面检测考生的水平。

世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

FOCUS
聚焦图书

图书在版编目(CIP)数据

重点题型80.经济类/陈文灯等编著.—北京:世界图书出版公司北京公司,2001.10

ISBN 7—5062—4338—5

Ⅰ.数… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学—研究生—自学参考资料
Ⅳ.013

中国版本图书馆 **CIP** 数据核字(2001)第072076号

重点题型80(经济类)

主　　编:陈文灯　黄先开　曹显兵　施明存　殷先军
责任编辑:武海燕
封面设计:滕晓娜

出　　版:世界图书出版公司北京公司
发　　行:世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街137号　邮编:100010　电话:62198079)
销　　售:各地新华书店
印　　刷:北京时代华都印刷有限公司

开　　本:787×1092毫米　1/16
印　　张:10.25
字　　数:249千字
版　　次:2004年8月第3版　　2004年8月第1次印刷

ISBN 7—5062—4338—5/O·330　　**定价:13.20**

服务热线　010—62198078

前 言

众所周知,考研数学复习的范围大、内容多。很多考生往往看了后面忘了前面,总感觉不会的东西太多,知识点比较零乱,对自己越来越没有信心。如何帮助考生在中后期复习阶段梳理思路,把握重点以及对常用解题技巧的熟练掌握,是文登数学团队一直研究的课题。

本书根据2004年6月出版的《2005年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》在2004版《数学最后冲刺》(经济类)的基础上修订而成。本书以考题原型为指针,对各重要的知识点、考点进行有机“串联”,使知识由厚变薄,可使考生在已有的基础上对重要题型了然于胸,增强应试的自信心。

本书今年主要作了如下变动:

(1)对各板块进行了调整,分为重点冲刺题型、专项突破、解题技巧综述三个板块,使考生复习时更加有的放矢。

(2)【重点冲刺题型】板块:①新增的“**内容逻辑图**”帮助考生快速梳理思路,对所考知识点有一个全面系统的认识;②21种“**思维定势**”帮助考生快速打开思路,节省宝贵的考场时间;③“**命题规律**”通过对十年真题的研究,针对每一个重点冲刺题型,给出最近十年的出题类型、命题规律以及近3年的出题情况,可使考生在较短时间内了解命题规律及趋势。

(3)【专项突破】板块:考生可对函数方程的求解、不等式的证明、应用题、综合题这些几乎每年必考的重要题型进行专项学习,使考生在短时间内有一个质的突破。

(4)【解题技巧综述】板块:通过对高等数学快速解题型、变量代换法、辅助函数法、单项选择题的解题技巧学习,考生可迅速拔高快速、准确、灵活的解题能力。

(5)新编并更换了不少例题,拓宽并锻炼考生的应变能力。

另:本书的配套模拟练习题为《模拟试卷8套》(数学一、数学二、数学三、数学四),其中模拟试卷按照2005大纲对考生能力的要求科学编排,并对每套试卷中的每道试题给出了详细的答案解析(包括解题提示,答案详解,知识点链接及对解题技巧的评注)。

书中若有不当之处,敬请广大读者和同仁批评指正。

编 者

2004.8

目　录

第一部分　重点冲刺题型大串讲

第二部分　专项突破

第三部分　解题技巧综述

注:带 * 号内容,数四考生不作要求。

第一部分　重点冲刺题型大串讲

第 1 讲　微积分

内容逻辑图

- 微积分
  - 函数、极限、连续
    - 函数概念、函数的基本性质
    - 数列的极限、函数的极限、无穷小与无穷大、极限存在的准则、两个重要极限
    - 函数的连续与间断、连续函数的运算、初等函数的连续性、闭区间上连续函数的性质
  - 一元函数的微积分
    - 导数与微分
      - 导数的求法
      - 高阶导数与微分
    - 中值定理、导数的应用
      - 中值定理
      - 洛必达法则
      - 导数应用
        - 函数的单调性
        - 极值和最值
        - 凹凸与拐点
        - 函数图形的描绘
    - 不定积分
      - 不定积分的概念与性质
      - 换元积分法
      - 分部积分法
    - 定积分
      - 定积分的概念与性质
      - 定积分基本公式
      - 定积分的换元积分法
      - 定积分的分部积分法
      - 广义积分
    - 定积分的应用
      - 定积分的微元法
      - 求平面图形的面积
      - 求体积
      - 求曲线弧长
  - 多元函数的微积分
    - 多元函数微分法及应用
      - 多元函数的基本概念
      - 多元函数的极限与连续
      - 偏导数
      - 全微分及应用
      - 隐函数的求导
      - 方向导数和梯度
      - 多元函数的极值
        - 多元函数的极值
        - 条件极值
    - 二重积分
      - 基本概念和性质
      - 计算方法
        - 用直角坐标
        - 用极坐标
      - 二重积分应用
  - 无穷级数
    - 常数项级数
      - 收敛级数的性质
      - 收敛性判别
        - 正项级数
          - 比较判别法
          - 比值判别法
          - 根式判别法
        - 交错级数 → 莱布尼茨判别法
        - 一般级数 → 条件收敛和绝对收敛
    - 幂级数
      - 幂级数的性质和运算法则
      - 收敛半径和收敛区间
      - 函数展成幂级数
      - 幂级数的应用
    - 级数求和基本概念
  - 微分方程
    - 可分离变量的微分方程
    - 一阶线性微分方程 → 贝努利方程
    - 可降阶的高阶微分方程
    - 二阶常系数线性微分方程
      - 二阶常系数齐次线性微分方程
      - 二阶常系数非齐次线性微分方程

重点冲刺题

一、极限与函数中的重点冲刺题

1. 未定式极限的求解

命题规律：一般出填空题或计算题，其中“数学三”最近十年考了2次，近三年来，03年未考；“数学四”最近十年考了6次，近三年均考。

【例1】 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2^x+3^x+4^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

【解】 属1^∞型令$I=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{2^x+3^x+4^x-3}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x+3^x+4^x-3}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x\ln2+3^x\ln3+4^x\ln4}{3}=\dfrac{1}{3}\ln24$,

则$I=e^{\frac{1}{3}\ln24}=\sqrt[3]{24}$.

【例2】 求$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\arctan x}$.

【解】 属$\dfrac{0}{0}$型因为$x^x-(\sin x)^x=(-x^x)\left[\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x-1\right]=(-x^x)\left(e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1\right)$，$x^x=e^{x\ln x}$,

又因 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$， 故 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=e^0=1$.

再考虑到$\arctan x\sim x(x\to0)$，有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to0^+}\frac{(-x^x)\left(e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1\right)}{x^3}=-\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1}{x^3}.$$

易见 $\ln\dfrac{\sin x}{x}\sim\dfrac{\sin x}{x}-1(x\to0)$.

又因 $x\ln\dfrac{\sin x}{x}\to0(x\to0)$，考虑到 $e^x-1\sim x(x\to0)$有

$$e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1\sim x\ln\frac{\sin x}{x}\sim x\left(\frac{\sin x}{x}-1\right),(x\to0).$$

于是
$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\arctan x}=-\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1}{x^3}=-\lim_{x\to0^+}\frac{x\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

【例3】 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,dt\right]du}{x(1-\cos x)}$.

【解】 方法一：属$\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}u}{1-\cos x+x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\arctan(1+x^2)}{\sin x+\sin x+x\cos x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\arctan(1+x^2)\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{2\sin x}{x}+\cos x}$$

$$=2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\pi}{6}.$$

方法二：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}=2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{3x^2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{2x\arctan(1+x^2)}{6x}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}.$$

2. 极限式中常数的确定

命题规律：一般出填空题，其中“数学三”最近十年考了2次，近三年来，02年、03年未考；“数学四”最近十年考了3次，近三年来，02年、03年未考。

【例1】 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x-\sqrt{x^2-1}-(ax+b)\right]=0$，试确定常数 a,b.

【解】 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt{x^2-1}-(a-1)x-b\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}-(a-1)x-b\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{x(x+\sqrt{x^2-1})}-(a-1)-\frac{b}{x}\right]=0.$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x(x+\sqrt{x-1})}-(a-1)-\frac{b}{x}\right]=0$，　由此可得 $a=1$.

于是，$I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt{x^2-1}-b\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}-b\right)=0$，　则有 $b=0$.

【例2】 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{1+x^{2n}}$ 连续，试确定 a,b.

【解】 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{1+x^{2n}}$

$$= \begin{cases} ax^2 + bx, & |x| < 1, \\ \dfrac{1}{x}, & |x| > 1, \\ \dfrac{1}{2}(1+a+b), & x = 1, \\ \dfrac{1}{2}(-1+a-b), & x = -1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ax^2 + bx, & -1 < x < 1, \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \text{ 或 } x < -1, \\ \dfrac{1}{2}(1+a+b), & x = 1, \\ \dfrac{1}{2}(-1+a-b), & x = -1. \end{cases}$$

由于$f(x)$连续，则$f_-(-1) = f_+(-1) = f(-1)$，$f_-(1) = f_+(1) = f(1)$，

$$f_-(-1) = \lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x} = -1, f_+(-1) = \lim_{x\to -1^+}(ax^2+bx) = a-b.$$

于是　$a - b = -1 = \dfrac{1}{2}(-1+a-b)$，　①

又$f_-(1) = \lim\limits_{x\to 1^-}(ax^2+bx) = a+b$，$f_+(1) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x} = 1$，

则　$a + b = 1 = \dfrac{1}{2}(1+a+b)$.　②

由①，②，得　$a = 0, b = 1$.

3. 函数的连续性或间断点问题

命题规律：一般出选择题，其中"数学三"最近十年考了7次，近三年来，02年未考；"数学四"最近十年考了5次，近三年来，02年未考。

【例1】 设$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上有定义，且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x) = a$，$g(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{x}), x \neq 0, \\ 0, x = 0, \end{cases}$则

(A)$x = 0$必是$g(x)$第一类间断点.
(B)$x = 0$必是$g(x)$第二类间断点.
(C)$x = 0$必是$g(x)$的连续点.
(D)$g(x)$在点$x = 0$处的连续性与a的取值有关.

【解】 因为$\lim\limits_{x\to 0}g(x) = \lim\limits_{x\to 0}f(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{u\to\infty}f(u) = a$（令$u = \frac{1}{x}$），又$g(0) = 0$，

所以，

当$a = 0$时，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x) = g(0)$，即$g(x)$在点$x = 0$处连续，

当$a \neq 0$时，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x) \neq g(0)$，即$x = 0$是$g(0)$的第一类间断点，

因此，$g(x)$在点$x = 0$处的连续性与a的取值有关，故选(D).

【例 2】 设$f(x)=\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)},x\in(0,\dfrac{1}{2}]$,试补充定义$f(0)$,使得$f(x)$在$[0,\dfrac{1}{2}]$上连续.

【解】 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}f(x)&=-\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi x-\sin\pi x}{\pi x\sin\pi x}\\&=-\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi x-\sin\pi x}{\pi^2x^2}\\&=-\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi-\pi\cos\pi x}{2\pi^2x}\\&=-\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi^2\sin x}{2\pi^2}=-\frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

由于$f(x)$在$[0,\dfrac{1}{2}]$上连续,因此定义$f(0)=-\dfrac{1}{\pi}$,使$f(x)$在$[0,\dfrac{1}{2}]$上连续.

二、导数与微分中的重点冲刺题

1. 分段函数微分法或求导

命题规律: 一般出计算题或填空题,其中"数学三"最近十年考了2次,近三年未考;"数学四"最近十年考了2次,近三年未考。

【例 1】 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}$可导,试求常数$a,b$.

【解】
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}=\begin{cases}x^2, & x>1,\\ \dfrac{1}{2}(1+a+b), & x=1,\\ ax+b, & x<1.\end{cases}$$

由于$f(x)$可导,则$f(x)$连续,于是有$f_+(1)=f_-(1)=f(1)$.又

$$f_+(1)=\lim_{x\to1^+}x^2=1,\quad f_-(1)=\lim_{x\to1^-}(ax+b)=a+b,$$

则 $a+b=1=\dfrac{1}{2}(1+a+b)$.

又$f(x)$可导,则$f'(1)=f'_-(1)=f'_+(1)$.而

$$\begin{aligned}f'_-(1)&=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1^-}\frac{a(x-1)}{x-1}=a,\end{aligned}$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

因此 $a=2,b=-1$.

【例 2】 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t, & x>0,\end{cases}$试讨论$f(x)$在$x=0$处的连续性和可导性.

【解】 (1) 由 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{1}=1,$$

可知$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1=f(0)$,

于是,函数$f(x)$在$x=0$处连续.

(2) 分别求$f(x)$在$x=0$处的左、右导数.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}\left[\frac{2(1-\cos x)}{x^2}-1\right]=\lim_{x\to0^-}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{2\sin x-2x}{3x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{2\cos x-2}{6x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\sin x}{3}=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t-1\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2-1}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-2x\sin x^2}{2}=0,$$

由于左、右导数都等于0,可见$f(x)$在$x=0$处可导,且$f'(0)=0$.

2. 复合函数或隐函数求导

命题规律: 一般出填空题,其中"数学三"最近十年考了2次,近三年未考;"数学四"最近十年考了3次,近三年来,02年、03年未考。

【例 1】 设$f(x)=\begin{cases}xe^{x^2}, & -\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ -1, & x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 则$\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1)\mathrm{d}x=$______

【解】 令$x-1=t$,则有

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{2}}^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}xe^{x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1(-1)\mathrm{d}x$$

$$=0+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

3. 函数的极点,单调区间,渐近线,拐点,切线等导数的应用题

命题规律: 一般出选择题,其中"数学三"最近十年考了8次,近三年均考;"数学四"最近十年考了8次,近3年均考。

【例 1】 设$f(x)=|x(1-x)|$,则 【 】

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.
(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极极值,但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.
(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,且 $(0,0)$ 是曲线,$y=f(x)$ 的拐点.
(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【解】 设 $0<\delta<1$,当 $x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 时,$f(x)>0$,而 $f(0)=0$,
所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.
显然,$x=0$ 是 $f(x)$ 的不可导点.
当 $x\in(-\delta,0)$ 时,$f(x)=-x(1-x)$. $f''(x)=2>0$,
当 $x\in(0,\delta)$ 时,$f(x)=x(1-x)$,$f''(x)=-2<0$,
所以点 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 故选(C).

【例2】 求函数 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间和极值,并求该函数图形的渐近线.

【解】 因为 $y'=\dfrac{x^2+x}{1+x^2}e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$;

令 $y'=0$,得驻点 $x_1=0$,$x_2=-1$.
列表讨论如下:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↑	极大值	↓	极小值	↑

由此可见,递增区间为 $(-\infty,-1)$,$(0,+\infty)$;递减区间为 $(-1,0)$.
极小值为 $f(0)=-e^{\frac{\pi}{2}}$;极大值为 $f(-1)=-2e^{\frac{\pi}{4}}$.
又因为

$$a_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=e^{\pi},b_1=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-a_1x]=-2e^{\pi},$$

$$a_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1,b_2=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-a_2x]=-2.$$

故所求渐近线为

$$y=a_1x+b_1=e^{\pi}(x-2),\text{以及 }y=a_2x+b_2=x-2.$$

三、不定积分中的重点冲刺题

1. 不定积分

命题规律: 一般出计算题或填空题,其中“数学三”最近十年考了4次,近三年来,03年、04年未考;“数学四”最近十年考了6次,近三年来,03年、04年未考。

Ⅰ. 凑微分法

【例1】 求下列不定积分:

(1) $\int x^2(3\ln x+1)/\sqrt{x^3\ln x+2}\,dx$; (2) $\int\dfrac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$.

【解】 (1)$I=\int\frac{x^2(3\ln x+1)}{\sqrt{x^3\ln x+2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{x^3\ln x+2}}d(x^3\ln x+2)$

$=2\sqrt{x^3\ln x+2}+C$;

(2)$I=\int\frac{(x+1)e^x}{xe^x(1+xe^x)}dx=\int(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{1+xe^x})d(xe^x)$

$=\ln|xe^x|-\ln(1+xe^x)+C=x+\ln|x|-\ln(1+xe^x)+C.$

【例 2】 计算 $I=\int[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f''(x)f^2(x)}{f'^3(x)}]dx.$

【解】 $I=\int\frac{f(x)f'^2(x)-f''(x)f^2(x)}{f'^3(x)}dx=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot\frac{f'^2(x)-f''(x)f(x)}{f'^2(x)}dx.$

由 $[\frac{f(x)}{f'(x)}]'=\frac{f'^2(x)-f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$,知 $I=\int\frac{f(x)}{f'(x)}d(\frac{f(x)}{f'(x)})=\frac{1}{2}[\frac{f(x)}{f'(x)}]^2+C.$

Ⅱ. 分部积分法

【例 3】 设 $f(x)$ 是单调连续函数,$f^{-1}(x)$ 是其反函数,又 $\int f(x)dx=F(x)+C.$

计算:$I=\int f^{-1}(x)dx.$

【解】 $I=\int f^{-1}(x)dx=xf^{-1}(x)-\int xd(f^{-1}(x)).$

由于 $f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数,又 $\int f(x)dx=F(x)+C$,则

$$f(x)=f'(x),f[f^{-1}(x)]=f'[f^{-1}(x)],\text{即 } x=f'[f^{-1}(x)].$$

故 $I=xf^{-1}(x)-\int f'[f^{-1}(x)]d(f^{-1}(x))=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C.$

【例 4】 求下列不定积分:

(1)$\int\ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}]\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$;

(2)$\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

【解】 (1)$I=\int\frac{\ln(x+a)}{x+b}dx+\int\frac{\ln(x+b)}{x+a}dx$

$=\int\ln(x+a)d[\ln(x+b)]+\int\frac{\ln(x+b)}{x+a}dx$

$=\ln(x+a)\ln(x+b)-\int\frac{\ln(x+b)}{x+a}dx+\int\frac{\ln(x+b)}{x+a}dx$

$=\ln(x+a)\ln(x+b)+C$;

(2)$I\overset{x=\sin t}{=\!=\!=}\int\frac{t}{\sin^2t}\cdot\frac{1+\sin^2t}{\cos t}\cdot\cos t\,dt$

$=\int\frac{t}{\sin^2t}dt+\int t\,dt=-t\cot t+\int\cot t\,dt+\frac{1}{2}t^2+C$

$=-t\cot t+\ln|\sin t|+\frac{t^2}{2}+C$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \ln|x| + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C.$$

四、定积分中的重点冲刺题

1. 与变上限积分相关的命题

命题规律：一般出计算题或选择题，其中“数学三”最近十年考了3次，近三年来，02年、04年未考；“数学四”最近十年考了5次，近三年来，03年、04年未考。

【例1】　设$f(x)$在$[1,+\infty)$上是正值函数，

试求在$[1,+\infty)$上，$F(x)=\int_1^x[(\frac{2}{x}+\ln x)-(\frac{2}{t}+\ln t)]f(t)\mathrm{d}t$的最小值.

【解】

$$F(x)=(\frac{2}{x}+\ln x)\int_1^x f(t)\mathrm{d}t-\int_1^x(\frac{2}{t}+\ln t)f(t)\mathrm{d}t,$$

$$f'(x)=(-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x})\int_1^x f(t)\mathrm{d}t+(\frac{2}{x}+\ln x)f(x)-(\frac{2}{x}+\ln x)f(x)$$

$$=(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{x-2}{x^2}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t.$$

由题设　$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t>0$，　令$f'(x)=0$，　则　$\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=0$，　即　$x=2$.

当$x<2$时，$f'(x)<0$；　当$x>2$时，$f'(x)>0$.

故　当$x=2$时，$F(x)$取极小值，$F(2)=\int_1^2[(1+\ln 2)-(\frac{2}{t}+\ln t)]f(t)\mathrm{d}t$.

【例2】　设$f(x)=\int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$，计算$I=\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x$.

【解】

$$I=\int_0^1 x^2(\int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}x^3(-\mathrm{e}^{-x^2})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})=\frac{1}{6}\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(x^2)$$

$$\xlongequal{x^2=t}\frac{1}{6}\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{6}-\frac{1}{3\mathrm{e}}.$$

【例3】　设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$. 计算$I=\int_0^1[f(x)\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$.

【解】

$$I=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\Big|_0^1-\int_0^1\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\cdot(-f(x))\mathrm{d}x$$

$$=0+\int_0^1(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t)=\frac{1}{2}[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t]^2\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}[\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t]^2=\frac{1}{2}A^2.$$

2. 求定积分或广义积分

命题规律：一般出填空题或计算题，其中“数学三”最近十年考了5次，近三年未考；“数学四”最近十年考了6次，近三年来，02年未考。