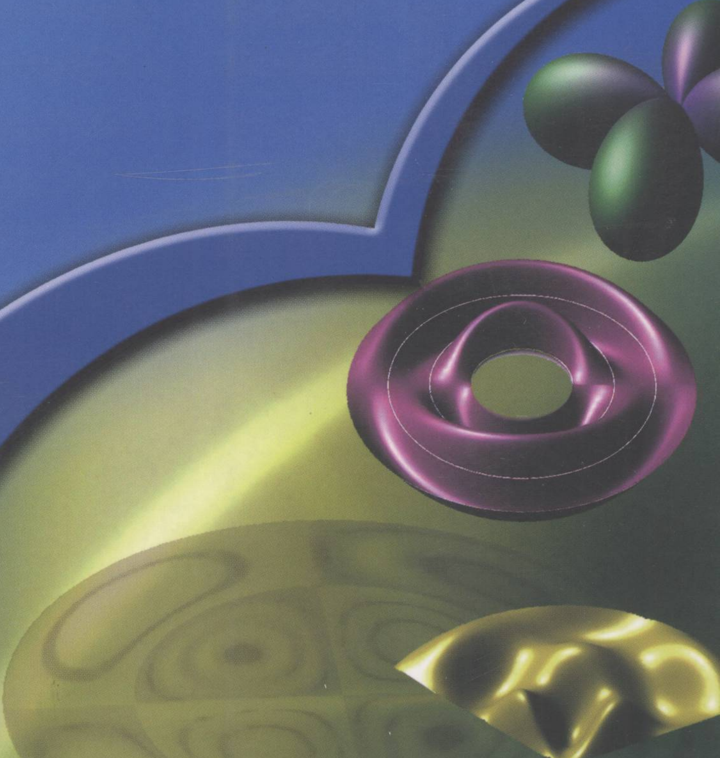
高等学校教材

数学物理方程与特殊函数

华中科技大学　李元杰　编著



高等教育出版社
Higher Education Press

高等学校教材

数学物理方程与特殊函数

华中科技大学　李元杰　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是一部数字教学模式的新型教材，它体现讲知识、讲思想、讲方法三者并重的教学理念，全面采用解析定量、几何定量和数值定量三结合的可交互动态定量描述技术，并增加了对知识的宏观理解。全书借助一个科学计算与模拟软件平台，介绍了五个重要的数学物理思想、五个求解偏微分方程的方法和五个应用研究专题，研究了十个特殊函数和十类基本的偏微分方程。本书内容简明、思路清晰，特别适合理工科非物理和数学专业的本科生和研究生学习数学物理方程及特殊函数使用。全书有近百幅数字图片并附一张光盘（含60多个研究式学习的数字动画及源程序）。

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方程与特殊函数/李元杰编著. —北京：高等教育出版社，2009.9

ISBN 978-7-04-028080-7

Ⅰ.数…　Ⅱ.李…　Ⅲ.①数学物理方程-高等学校-教材②特殊函数-高等学校-教材　Ⅳ.O175.24　O174.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第139400号

策划编辑 于丽娜　**责任编辑** 李华英　**封面设计** 张　志
责任绘图 尹文军　**版式设计** 王艳红　**责任校对** 王　雨
责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
总　　机	010-58581000	网上订购	http://www.landraco.com http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	唐山市润丰印务有限公司		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2009年9月第1版
印　　张	12.5	印　　次	2009年9月第1次印刷
字　　数	230 000	定　　价	33.00元（含光盘）

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　28080-00

郑 重 声 明

前　言

“数学物理方程与特殊函数”是理工类专业重要的基础课,该课程的教学质量是关系到理工类本科生能否成为创新人才的重要条件之一,也是各高校提高本科生教学质量的关键指标。但是改革三十年来,由于该课程内容多、难度大、加之学时又少,教师教得很费劲,学生也普遍反映很难学懂。

作者十多年来探讨摸索了一种在数字与信息环境下的教学手段与模式,称为数字教学,并在大学物理的教学实践中取得了明显的效果,于是自然想到把这一模式应用到数学物理方程与特殊函数这门课程中来,基本思路有三条:

一、打破传统教材只讲知识、很少甚至完全不讲思想的习惯,而把讲授知识、思想、方法放在同等重要的地位;

二、全面引入数字技术,把科学计算与模拟和学科教学内容密切结合,并相互协作、相互推动,以提高和增进教学效益,加深学生对知识的理解,加强学生解决实际问题的能力,扩大学生的知识面;

三、加强对学科宏观与全局规律的讲授,加强立体思维与交叉思维。

本书共分三章:第一章介绍特殊函数;第二章介绍方程的建立及解法;第三章通过五个专题的研究,训练学生的实际应用能力。教材内容结构简洁清晰,可概括为:一个科学计算与模拟的软件平台、五个思想、五个方法、五个专题、十个特殊函数和十类方程,包含了目前理工类非物理专业数学物理方程教材的基本内容。本书在许多地方有所创新,如把传统的用符号及公式表达的定量描述、用几何图形表达的定量描述和用数值表达的定量描述三者结合并发展为一种最高层次的定量描述——可交互的数字定量几何描述;又如明确提出并讲述了数学物理中的五个思想:(1) 现代函数及空间的思想;(2) 用微分方程定义函数的思想,本征方程、本征函数及正交归一完备系;(3) 关于数学变换与等效性的思想;(4) 关于边界决定内部的思想;(5) 关于变分原理及稳定性思想。特别是编者专门设计了一些计算积分与展开系数的软件工具包,使学生在运用格林函数法、变分法、积分变换法和差分法时,能简易方便地操作并实实在在地解决问题。在应用专题中,还专设了一节,训练学生如何作出复变函数、特殊函数和偏微分方程的解的图形。此外,本书包含了近百幅精美的数字图片及60多个可交互的数字演示程序。

总之，本书是围绕加深学生对知识的理解能力和加强学生解决实际问题的应用能力而精心设计的。限于作者的水平，难免有错误与不妥之处，希望读者批评指正。

李元杰

2009年于武汉

目　录

第一章

函数与函数空间

第一节　函数概念的推广

数学物理研究的对象一般可以表述为一个张量，其中，0 阶张量就是标量、1 阶张量称为矢量或者 n 元数组、2 阶张量则是 $n \times n$ 元数组等，当然这些数组尚需满足一定的运算法则或公理，比如加法运算、数乘运算、内积运算等，最后，这些按阶数归类的张量的集合就构成了一个张量空间.

函数的概念是研究这些空间之间的对应关系而产生的，例如，我们最初接触到的函数就是研究实数空间（实数定义域）与实数空间（实数值域）的对应关系，像幂函数 $y=x^2$、三角函数 $y=\sin x$、指数函数 $y=e^x$ 等都属于此类函数，它们可以统一表述为：对于 $x\in\mathbf{R}$（$\mathbf{R}$ 表示实数域），存在 $y\in\mathbf{R}$，使得 $y=f(x)$，或者记为 $f:x\mapsto y$.

函数 $y=f(x)$ 的作用是把定义域中的某个数 x 与值域中的某个数 y 对应起来，这个对应的规则就是函数. 于是我们看到构造一个函数有三个部分：定义域、值域及两域之间的对应规则. 如果把这三个部分加以推广：把定义域、值域从标量空间推广到任意阶的张量空间，而且定义域、值域的张量空间可以有不同阶数，把对应的数学规则推广为一般的操作或映射，那么我们可以用下面的框图示意现代函数的概念：

$$\boxed{m\text{阶张量空间}} \xrightarrow{\text{映射（函数）}} \boxed{n\text{阶张量空间}}$$

定义　设 X,Y 是两个非空集合，若对每个 $x\in X$，按某个法则 f 有唯一的 $y\in Y$ 与之对应，则称 f 为定义于 X 上而取值于 Y 中的函数，或称 f 为从 X 到 Y 的映射，记为 $f:X\to Y$. 以 $f(x)$ 记 x 所对应的 y，称它为 f 在 x 所取的值，称 X 为定义域，称 $\{f(x):x\in X\}$ 为 f 的值域.

依照以上关于函数的定义，能够把许多数学的分支都理解为函数，如线性代数中的矩阵就符合函数的定义：

$$\boldsymbol{H}_{mn}: a_n \mapsto b_m,$$

其中 $\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix}$，它把 n 元数组 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 映射为 m 元数组 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

又如微分方程 $\Delta U(x,y,z) = -\dfrac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon}$，也可以理解为函数

$$\Delta: U(x,y,z) \mapsto -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon},$$

其中 $U(x,y,z) \in H$，$-\dfrac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon} \in H$，$H$ 是一个不可数无穷维的函数空间.

此外，上限或下限为变量的定积分也可以看成函数，如指数积分

$$Ei(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^t}{t} dt = \gamma + \ln(-z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{kk!} \quad (\gamma \text{ 为欧拉常数}),$$

$$Ei: \quad z \in \mathbf{C} \mapsto \int_{-\infty}^{z} \frac{e^t}{t} dt \in \mathbf{C}, \quad \text{其中 } \mathbf{C} \text{ 为复数域}.$$

练习 1.1.1 在你所接触的数学中，能理解为函数的有多少？请举例说明.

第二节 函数与矢量空间

我们已经掌握函数或映射是在两个空间之间建立的一个对应的法则，下面将进一步深入认识函数与空间的关系，那就是函数不仅是空间之间的映射，同时函数自身也能张成一个新的空间. 函数可分为三类：一类是可用微分方程来定义的函数，它能通过函数的本征方程、本征态来构成一套正交、归一、完备的基底(也有非正交本征函数的情形，参见 Harold Levine 写的 Partial Differential Equations 的中译本，丘成桐主编)，去建立一个函数空间，该空间的其他满足一定条件的函数都可以按这套基本矢量展开，从而实现用已知的本征函数组去表示未知的函数；另一类函数是无法用微分方程去定义的，但它们可以按已知的本征函数组展开，或者它们能用积分或者级数求和的方式来表达；最后，还有大量的无法用已知的数学形式表示的函数. 我们只关心前两类函数，在数学物理方程中称这些函数为特殊函数.

为了理解空间与其基本矢量组的关系，我们采用公理式的定义来讨论一般矢量空间的概念，有了矢量空间的概念就不难得到一般张量空间的概念.

设有一集合 V，其中 $A,B,C,\cdots$ 是集合 V 中的元素，若在集合 V 内定义了下列三种运算：

（1）加法运算；　（2）数乘运算；　（3）内积运算.

则称集合 V 为矢量空间，元素 $A,B,C,\cdots$ 为矢量，记为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$.

什么是加法、数乘、内积运算？也要使用公理式的定义：

（1）加法运算公理

对于任意 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in V$，若在集合 V 内满足下列四个公理：

1）封闭性：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\in V$；

2）交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

3）结合律：$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$；

4）存在逆元：$\boldsymbol{A}'\in V$ 且 $\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

则在集合 V 中定义了元素的加法运算.

（2）数乘运算公理

对于任意 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in V,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$（$\mathbf{R}$ 是实数集合），若在集合 V 内满足下列四个公理：

1）封闭性：$\alpha\boldsymbol{A}\in V$；

2）交换律：$\beta\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\beta$；

3）分配律：$\gamma(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\gamma\boldsymbol{B}+\gamma\boldsymbol{C}$；

4）结合律：$\alpha(\gamma\boldsymbol{C})=(\alpha\gamma)\boldsymbol{C}$.

则在集合 V 中定义了元素在实数域上的数乘运算.

（3）内积运算公理

对于任意 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in V,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$（$\mathbf{R}$ 是实数集合），若在集合 V 内满足下列四个公理：

1）内积：两个元素与一个数的对应，即 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle=\alpha$；

2）交换律：$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ 或 $\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle=\langle\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\rangle$；

3）分配律：$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ 或 $\langle\boldsymbol{A},(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\rangle=\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle+\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}\rangle$；

4）非负模：$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^2\geqslant 0$，其中 $|\boldsymbol{A}|=\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\rangle^{1/2}$.

则在集合 V 中定义了元素的内积运算.

结论：遵守一定的运算法则是矢量的最本质的特征，而其中内积的法则给出了：

（1）矢量的大小或模；

（2）任意两矢量的夹角；

（3）一组正交、归一、完备基底.

矢量的内积举例.

例 1　三维欧几里得空间的矢量.

基矢组 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$，三维矢量 $\boldsymbol{A}$ 按基矢组展开

$$\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k},$$

$$B = B_1 i + B_2 j + B_3 k,$$

利用

$$\langle i,j\rangle = \langle j,k\rangle = \langle i,k\rangle = 0, \quad \langle i,i\rangle = \langle j,j\rangle = \langle k,k\rangle = 1$$

可得

$$\langle A,B\rangle = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3.$$

矢量 A 的投影与展开

$$A_1 = \langle A,i\rangle, \quad A_2 = \langle A,j\rangle, \quad A_3 = \langle A,k\rangle;$$

$$A = A_1 i + A_2 j + A_3 k.$$

例 2 矩阵组 $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ 构成二维矢量空间的正交归一基矢组.

任意矢量按基矢组展开

$$A = (a_1,a_2) = a_1 e_1 + a_2 e_2 = a_1(1,0) + a_2(0,1),$$

$$B = (b_1,b_2) = b_1 e_1 + b_2 e_2 = b_1(1,0) + b_2(0,1).$$

内积

$$\langle A,B\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 \in \mathbf{R}.$$

基矢组的正交归一性

$$\langle e_1,e_2\rangle = 0, \quad \langle e_1,e_1\rangle = 1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = 1.$$

投影与展开

$$a_1 = \langle A,e_1\rangle, \quad a_2 = \langle A,e_2\rangle.$$

例 3 幂函数组 $\{x^0,x^1,x^2,\cdots,x^n,\cdots\}$ 构成可数无穷维矢量空间的正交归一基矢组.

内积定义为

$$\langle x^m,x^n\rangle = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^m x^n}{\mathrm{d}x^m} \quad (m \geqslant n)$$

或

$$\langle x^m,x^n\rangle = \begin{cases} 1 & (m = n), \\ 0 & (m \neq n). \end{cases}$$

内积的实质是一个标量与两个矢量的对应,按什么法则对应,则是人为的规定.

例 4 正弦余弦函数组 $\{\sin(mx),\cos(nx)\}$,其中 m,n 为正整数,构成可数无穷维矢量空间的正交归一基矢组.

周期函数 $F(x)$ 可按基矢组 $\{\sin(mx),\cos(nx)\}$ 展开为

$$F(x) = \sum_m a_m \sin(mx) + \sum_n b_n \cos(nx),$$

其中 a_m, b_n 是 $F(x)$ 在基矢组 $\{\sin(mx),\cos(nx)\}$ 上的投影分量.

内积(基矢组正交归一)

$$\langle \sin(mx),\sin(nx)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}1 & (m=n),\\ 0 & (m\neq n);\end{cases}$$

$$\langle\cos(mx),\cos(nx)\rangle=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}1 & (m=n),\\ 0 & (m\neq n);\end{cases}$$

$$\langle\sin(mx),\cos(nx)\rangle=0.$$

投影与展开

$$a_m=\langle F(x),\sin(mx)\rangle,\ b_n=\langle F(x),\cos(nx)\rangle,$$

$$F(x)=\sum_m a_m\sin(mx)+\sum_n b_n\cos(nx).$$

从上面的例子看到，函数可以看成矢量空间中的一个矢量，而且还能选出一组正交、归一、完备的基矢组，构成基矢组的函数一定满足一个本征方程，如幂函数组$\{x^0,x^1,x^2,\cdots,x^n,\cdots\}$由本征方程

$$x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=nf \tag{1.2.1}$$

或映射算子(函数)

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}:\ f\mapsto nf$$

把矢量f映射为矢量nf，其方向特征保持不变，只是放大了n倍，所以称为本征方程，而f为本征矢量. 显然$f=x^n$是方程的解，前面我们已证明它们满足正交、归一、完备性，于是该空间的任意其他函数可按此幂函数组展开，这就是高等数学中的泰勒展开.

再看三角函数组$\{\sin(mx),\cos(nx)\}$，它满足本征方程

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}=-k^2f \tag{1.2.2}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}:\ f\mapsto -k^2f.$$

显然$f=\sin(kx)$或$f=\cos(kx)$是本征方程的解，至于它们的正交、归一、完备性，前面我们已证实.

其实上面的结论可以推广到大多满足各种本征方程的本征函数(也有不能满足正交性的例外)，换言之，一旦我们解决了一组本征方程，并得到一组本征函数或本征矢量，我们也就获得了一套观察研究自然规律的“参考系”，因为许多未知规律如果能用一个函数来描述，我们就可以把该未知规律用已知的本征函数展开，从而对它进行分析和研究. 我们掌握的本征函数或“参考系”越多，研

究未知的问题就越方便，洞察其本质规律的机会就越多，这也是我们学习函数和数学物理方程的重要意义.

第三节　由积分或级数定义的特殊函数

下面介绍几个重要的由积分或级数定义的特殊函数.

1. Γ(伽玛)函数

定义积分

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \qquad (x>0) \tag{1.3.1}$$

为 Γ 函数，在复变函数的围线积分和经典统计力学中，经常要用到 Γ 函数. 对于 Γ 函数掌握下面几个重要性质是十分必要的：

(1) $\Gamma(1)=1,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$;

(2) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$，当 x 为正整数 n 时，$\Gamma(n+1)=n!$;

(3) 对于 $-n<x<-n+1,\Gamma(x)=\dfrac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$;

(4) 对于复变数 z，$\Gamma(z)$ 在极点 $z=-n$ 处的留数

$$\lim_{z\to-n}(z+n)\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n-1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\bigg|_{z=-n}=\frac{(-1)^n}{n!}.$$

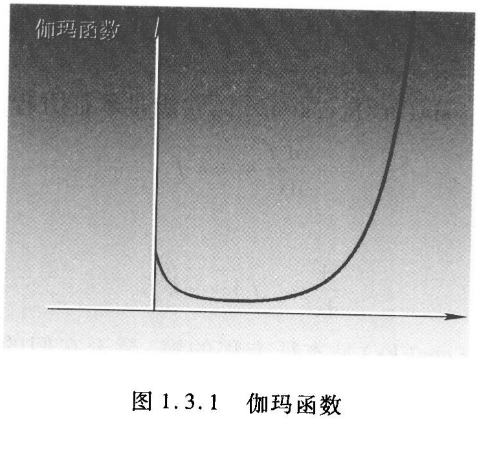


图 1.3.1　伽玛函数

关于 Γ 函数更详细的性质可查阅《数学手册》. 图 1.3.1 是利用伽玛函数的积分定义绘制而成的，其中 $x>0$.

练习 1.3.1　请读者利用性质(3)绘制 $-n<x<-n+1$ 的伽玛函数曲线图.

2. B(贝塔)函数

定义定积分

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x \tag{1.3.2}$$

为欧拉第一类积分,其中 $\mathrm{Re}(p)>0,\mathrm{Re}(q)>0$,以保证积分的收敛.

(1) 作变换 $x=1-t$,可证

$$B(p,q)=B(q,p);$$

(2) 可用 Γ 函数表述

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.3.3}$$

证明 考察

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{p-1}\mathrm{d}t\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s}s^{q-1}\mathrm{d}s.$$

令 $t=x^2,s=y^2$,则

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=4\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}x^{2p-1}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}y^{2q-1}\mathrm{d}y\\&=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

再利用极坐标变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,得

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=4\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\mathrm{d}r\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\mathrm{d}\theta\\&=\Gamma(p+q)\int_0^1 z^{q-1}(1-z)^{p-1}\mathrm{d}z=\Gamma(p+q)B(p,q),\end{aligned}$$

其中 $z=\sin^2\theta,\mathrm{d}z=2\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$,于是得证.

用 Γ 函数定义的 $B(p,q)$ 称为贝塔函数(B 函数),利用 B 函数可得到许多有用的积分公式,它们在计算规则物体的体积、静力矩、惯性矩和惯性中有重要应用,详见《现代数学手册》经典数学卷(华中科技大学出版社),图 1.3.2 是用 Γ 函数绘制的 $B(p,q)$ 曲面.

3. 误差函数

定义复下限积分

$$\mathrm{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!\,(2k+1)},\qquad |z|<\infty \tag{1.3.4}$$

为误差函数.

它与标准正态分布函数 $\Phi(z)$ 有如下关系:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right).$$

误差函数常用于正态概率计算和求解二阶常系数抛物型偏微分方程的定界问题.

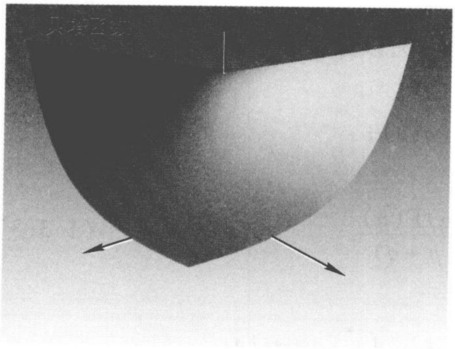


图 1.3.2 贝塔函数

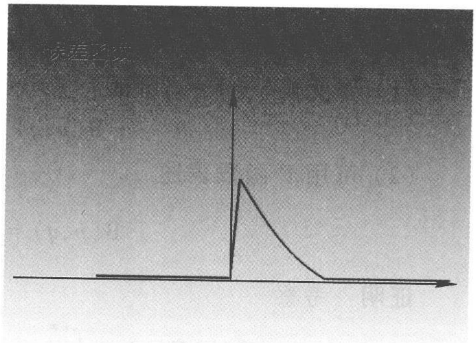


图 1.3.3 误差函数

练习 1.3.2 请读者自行编程绘制误差函数,图 1.3.3 是用积分定义绘制的误差函数.

4. 椭圆积分及其反函数

(1) 勒让德椭圆积分

下面三个积分

$$F(k,\phi) = \int_0^{\sin\phi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \qquad (1.3.5)$$

$$E(k,\phi) = \int_0^{\sin\phi} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta, \qquad (1.3.6)$$

$$\Pi(h,k,\phi) = \int_0^{\sin\phi} \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$= \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1+h\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad (1.3.7)$$

分别称为勒让德第一类、第二类、第三类椭圆积分,其中 k 为积分的模数,h 为第三类积分参数,当 $\phi = \frac{\pi}{2}$时,则得到三个完全椭圆积分.

许多积分都可归结为椭圆积分,详见《现代数学手册》经典数学卷(华中科技大学出版社). 图 1.3.4 和图 1.3.5 给出了 $k = 0.95$ 时椭圆积分 $E(k,\phi)$,

$F(k,\phi)$的曲线图形.

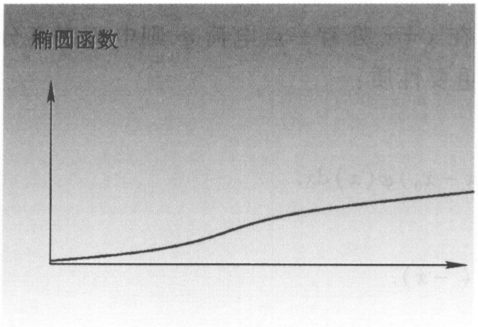


图 1.3.4　$E(0.95,\phi)$

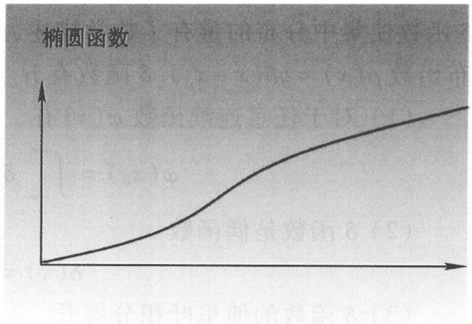


图 1.3.5　$F(0.95,\phi)$

练习 1.3.3　借助积分表达式,试以 k,ϕ 为平面,$F(k,\phi)$,$E(k,\phi)$为曲面高度,绘制椭圆积分 $F(k,\phi)$,$E(k,\phi)$的曲面图形.

(2) 雅可比椭圆函数

第一类椭圆积分的反函数称为椭圆正弦函数.

实际上取

$$F(k,\phi)=z=\int_0^w \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=\int_0^\phi \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

则反函数 $w(z)=\mathrm{sn}(z,k)$为椭圆正弦函数,或者 $\phi=\mathrm{am}(z)$为角振幅函数. 其他还有椭圆余弦、椭圆正切等,统称为雅可比椭圆函数

$$\mathrm{cn}(z)=\sqrt{1-w^2}=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2 z},$$

$$\mathrm{tn}(z)=\frac{\mathrm{sn}(z)}{\mathrm{cn}(z)}=\frac{\mathrm{sn}(z)}{\sqrt{1-\mathrm{sn}^2 z}},$$

$$\mathrm{dn}(z)=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2 z}.$$

我们计算椭圆的弧长、单摆的周期、圆电流的磁场等都要用到椭圆积分.

练习 1.3.4　以 $E(0.95,\phi)$和 $F(0.95,\phi)$为例作图说明反函数与函数之间的关系.

5. δ 函数

δ 函数定义在$(-\infty,+\infty)$上,并满足

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0 & (x\neq x_0),\\ +\infty & (x=x_0),\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\,dx = 1. \tag{1.3.8}$$

δ 函数使集中分布的量有了数学描述，如在 $x = x_0$处有一点电荷 q，则电荷密度分布函数 $\rho(x) = q\delta(x - x_0)$. δ 函数有五个重要性质：

（1）对于任意连续函数 $\varphi(x)$有

$$\varphi(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\varphi(x)\,dx.$$

（2）δ 函数是偶函数

$$\delta(x) = \delta(-x).$$

（3）δ 函数的傅里叶积分展开

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(x - x_0)}\,d\omega. \tag{1.3.9}$$

当 $x_0 = 0$ 时，

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x}\,d\omega. \tag{1.3.10}$$

（4）δ 函数的傅里叶级数展开

$$\delta(x - x_0) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi x}{l},$$

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi x}{l},$$

$$\delta(x - x_0) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{(2n+1)\pi x_0}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

（5）δ 函数的傅里叶变换与拉普拉斯变换

1）傅里叶变换

正变换

$$F[\delta(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)e^{-i\omega x}\,dx = e^{-i\omega\cdot 0} = 1,$$

逆变换

$$F^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot e^{-i\omega x}\,d\omega = \delta(x).$$

2）拉普拉斯变换

正变换

$$L[\delta(x)] = \int_{0}^{+\infty} \delta(x)e^{-sx}\,dx = e^{-s\cdot 0} = 1,$$

逆变换

$$L^{-1}[L(s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} 1\cdot e^{sx}\,ds = \delta(x).$$